Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

CURSUL 10

Cuprins

Part I

Geometrie analitică

Capitolul 2

Dreapta şi planul în spaţiu

În cele ce urmează, presupunem cunoscute noţiunile elementare din geometria euclidiană ca punct, dreaptă, plan, perpendiculară, etc. De asemenea, presupunem că V_3 este raportat la baza ortonormată $\left\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\right\}$, iar E_3 la reperul cartezian $\left\{O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\right\}$, prin notaţia $Oxyz$ înţelegându-se că s-au fixat originea O şi axele reciproc ortogonale Ox, Oy şi Oz.

Coordonatele carteziene ale unui punct M reprezintă mărimile algebrice ale proiecţiilor ortogonale ale vectorului OM pe cele trei axe de coordonate (figura 1 [3]).

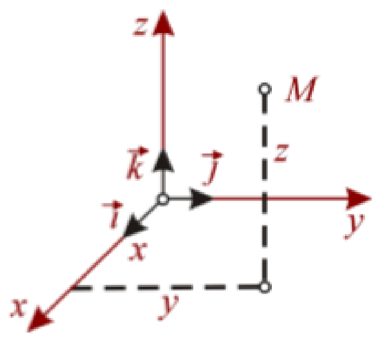

Figura 1

Axele sunt formate din punctele (x, y, z) caracterizate respectiv prin ecuaţiile:

$$Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad Oy : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Cele trei axe determină planele xOy, yOz şi zOx, numite plane de coordonate. Ele sunt caracterizate respectiv prin ecuaţiile $xOy : z = 0$, $yOz : x = 0$, $xOz : y = 0$. Cele trei plane de coordonate împart spaţiul în opt regiuni numite octante (sau octanţi).

2.1 Ecuaţiile dreptei în spaţiu

O dreaptă în spaţiu poate fi determinată de:

a) un punct şi un vector nenul;

b) două puncte;

c) intersecţia a două plane.

Ne propunem să transformăm aceste condiţii din E_3 în ecuaţii în V_3 sau în $\mathbb{R}^3$.

2.1.1 Dreapta determinată de un punct şi un vector nenul

Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ din E_3 , $\bar{r}_0 = x_0\bar{\imath} + y_0\bar{\jmath} + z_0\bar{k}$, şi un vector nenul $\bar{v}\,(l, m, n) \in V_3$ fixează o dreaptă d care trece prin M_0 şi are direcţia lui $\bar{v}$ (figura 2 [3]).

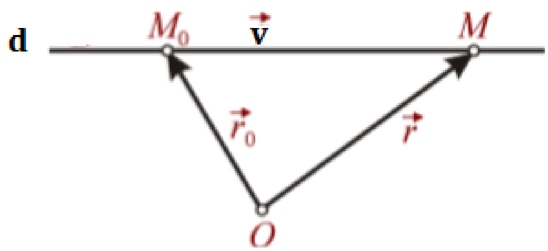

Figura 2

Punctul $M(x, y, z) \in E_3$ aparţine dreptei d dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ şi $\bar{v}$ sunt coliniari, adică folosind teorema **??**,

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{v} = 0$$

Această ecuaţie în V_3 se numeşte *ecuaţia vectorială a dreptei definită de un punct şi o direcţie.*

Vectorul nenul $\bar{v}\,(l, m, n)$ care dă direcţia dreptei d, se numeşte *vector director,* iar vectorul nenul $k \cdot \bar{v}$, joacă acelaşi rol ca $\bar{v}$. Coliniaritatea vectorilor $\bar{r} - \bar{r}_0$ şi $\bar{v}$ se pune în evidenţă şi prin ecuaţia vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{v} \quad t \in \mathbb{R}$$

Această ecuaţie vectorială este echivalentă cu trei ecuaţii în $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot l \\ y &= y_0 + t \cdot m \\ z &= z_0 + t \cdot n \end{aligned}$$

numite *ecuaţii parametrice ale dreptei d.* Aceste ecuaţii se pot înlocui cu două *ecuaţii carteziene* în $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

cu convenţia că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu 0.

Observaţia 2.1.1 *Deoarece vectorul $\bar{v}\,(l, m, n)$ este nenul, cel mult două dintre numerele l, m şi n se pot anula.*
1) Dacă $l = 0$ şi $m \cdot n \neq 0$, atunci ecuaţiile carteziene precedente sunt echivalente cu

$$x - x_0 = 0; \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu planul yOz.
2) Dacă $l = m = 0$ şi $n \neq 0$, atunci ecuaţiile carteziene precedente se reduc la

$$x - x_0 = 0; \quad y - y_0 = 0$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu Oz.

2.1.2 Dreapta determinată de două puncte

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ două puncte distincte din E_3. Ele determină o dreaptă d şi numai una. Pentru a scrie ecuaţiile acestei drepte vom considera dreapta ca fiind determinată de punctul M_1 şi de vectorul director $\bar{v}$ reprezentate în figura 3 [3].

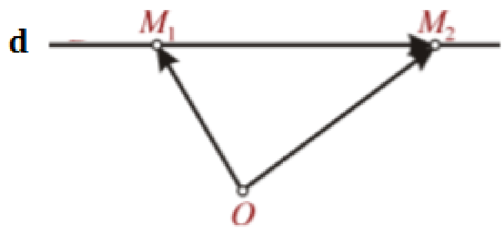

Figura 3

Astfel, *ecuaţiile carteziene ale dreptei d* sunt:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

2.1.3 Dreapta determinată de intersecţia a două plane

Considerăm P_1 şi P_2 două plane de ecuaţii $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Intersecţia $P_1 \cap P_2$ este dreapta de ecuaţii (figura 4 [3]):

$$d : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

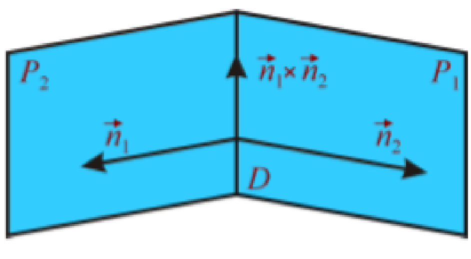

Figura 4

2.1.4 Dreapta orientată

Definiţia 2.1.2 *Dreapta D se numeşte orientată dacă pe ea s-a ales un sens de parcurs (+) sau (-).*

Dacă presupunem că $\bar{v}$ este vectorul director al lui D atunci direcţia (+) lui D este dată de $\bar{v}$.Prin urmare prin dreaptă orientată vom presupune perechea $(D,\bar{v})$.

Exemple de drepte orientate pot fi considerate axele de coordonate Ox, Oy şi Oz.

Să presupunem că $\bar{v}$ este vectorul director al lui Ox. Mulţimea

$$D^{+} = \left\{M \mid \overline{OM} = k\bar{v},\ k \geq 0\right\}$$

o vom numi parte pozitivă a lui Ox iar mulţimea:

$$D^{-} = \left\{M \mid \overline{OM} = k\bar{v},\ k \leq 0\right\}$$

o vom numi parte negativă a lui Ox . Lui $\bar{v}$ putem să-i ataşăm versorul director $\bar{e}$ şi ţinând seama de mulţimile D^{+} şi D^{-} putem să sciem pe D ca fiind mulţimea:

$$D = \left\{M \mid \overline{OM} = k\bar{e},\ k \in \mathbb{R}\right\}$$

Versorul director $\bar{e}$ formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, respectiv γ, numite unghiurile directoare ale dreptei D (figura 5 [3]):

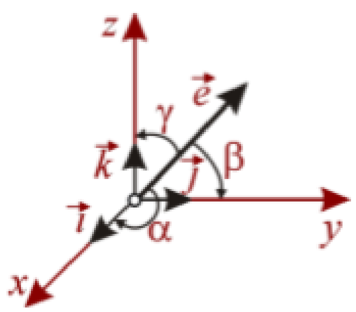

Figura 5

Definiţia 2.1.3 *Numim cosinusuri directoare ale versorului $\bar{e}$, în raport cu baza ortonormată $\left\{\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}\right\}$, coordonatele lui $\bar{e}$ şi putem scrie:*

$$\bar{e} = \cos\alpha\bar{\imath} + \cos\beta\bar{\jmath} + \cos\gamma\bar{k}$$

de unde, ţinând cont de faptul că $\|\bar{e}\| = 1$,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Fie reperul cartezian $\left\{O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\right\}$ în care luăm vectorul nenul $\bar{a} = a_1\bar{\imath} + a_2\bar{\jmath} + a_3\bar{k}$. Cosinusurile directoare ale lui $\bar{a}$ sunt

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

2.2 Ecuaţia planului în spaţiu

În E_3 un plan poate fi determinat astfel:

1) un punct şi un vector nenul normal la plan;

2) un punct şi doi vectori necoliniari;

3) trei puncte necoliniare;

4) o dreaptă şi un punct nesituat pe dreaptă;

5) două drepte concurente;

6) două drepte paralele.

Ne propunem să stabilim ecuaţia sub formă vectorială, carteziană sau normală a planului în condiţiile de mai sus.

2.2.1 Planul determinat de un punct şi un vector normal la plan

Considerăm vectorul nenul $\bar{n}\,(l, m, n)$, dreapta D ce trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi care are direcţia vectorului $\bar{n}$. În aceste condiţii există un singur plan P

perpendicular pe D în punctul M_1. (figura 6).

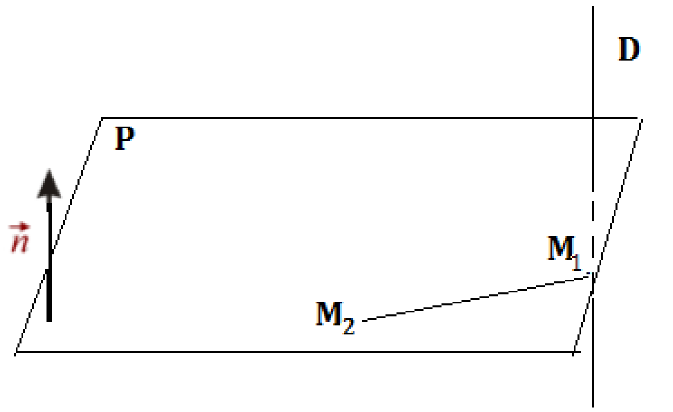

Figura 6

Definiţia 2.2.1 *D se numeşte normala la planul P, iar vectorul $\bar{n}$ se numeşte vectorul normal al planului P.*

Ecuaţia carteziană a planului ce trece prin M_1şi este perpendicular pe $\bar{n}$ este:

$$l\,(x - x_1) + m\,(y - y_1) + n\,(z - z_1) = 0$$

Într-adevăr, ecuaţia lui D va fi:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

cu $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$.

Punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ aparţine planului P dacă $\overline{M_1M_2}$ este perpendicular pe vectorul normal$\Leftrightarrow \left\langle \overline{M_1M_2}, \bar{n} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow l\,(x - x_1) + m\,(y - y_1) + n\,(z - z_1) = 0$.

Reciproc, se poate arăta că, orice ecuaţie de forma $lx + my + nz + p = 0$ reprezintă un plan.

Observaţia 2.2.2 *a) Dacă ecuaţiile planelor diferă doar prin termenul liber, atunci acele plane sunt paralele, iar ecuaţia*

$$lx + my + nz + p = 0, p \in \mathbb{R}$$

reprezintă familia planelor paralele din spaţiu cu normala $\bar{n}\,(l, m, n)$.

b) Dacă ecuaţiile planelor au termenul liber egal cu zero, atunci ele conţin originea O.

Plane particulare

1. Planul de ecuaţie $z = n$ este un plan paralel cu xOy. Pentru $n = 0$ obţinem chiar ecuaţia planului xOy.

   Planul de ecuaţie $x = m$ este un plan paralel cu yOz. Pentru $m = 0$ obţinem chiar ecuaţia planului yOz.

   Planul de ecuaţie $y = l$ este un plan paralel cu xOz. Pentru $l = 0$ obţinem chiar ecuaţia planului xOz.

2. Planul de ecuaţie $mx + ny + p = 0$ este un plan perpendicular pe xOy.

   Planul de ecuaţie $ny + lz + p = 0$ este un plan perpendicular pe yOz.

   Planul de ecuaţie $mx + lz + p = 0$ este un plan perpendicular pe xOz.

3. Planul de ecuaţie $by + lz = 0$ este un plan care trece prin Ox.

   Planul de ecuaţie $mx + lz = 0$ este un plan perpendicular pe Oy.

   Planul de ecuaţie $mx + ny = 0$ este un plan perpendicular pe Oz.

4. Planul de ecuaţie $mx + ny + lz = 0$ este un plan care trece prin originea O.

2.2.2 Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari

Ne propunem să determinăm ecuaţia planului determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi de doi vectori necoliniari $\bar{u} = l_1\bar{\imath}+m_1\bar{\jmath}+n_1\bar{k}$ şi $\bar{v} = l_2\bar{\imath}+m_2\bar{\jmath}+n_2\bar{k}$, $P : (M, \bar{u}, \bar{v})$. (vezi figura 7).

$\bar{u}$ şi $\bar{v}$ necoliniari este echivalent cu condiţia: $\bar{u} \times \bar{v} \neq 0$.

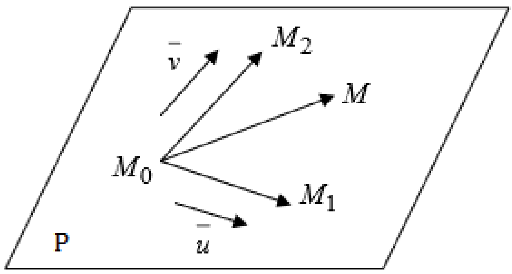

Figura 7

Fie $\overrightarrow{M_0M_1}$ un reprezentant al lui $\bar{u}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ un reprezentant al lui $\bar{v}$.

Punctul M aparţine planului P dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_2}$ sunt coplanari.

Faptul că aceşti trei vectori sunt coplanari se poate exprima în două moduri:

a) folosind regula paralelogramului de adunare:

$$\overrightarrow{M_0M} = k_1 \cdot \overrightarrow{M_0M_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{M_0M_2}$$

unde $k_1 \in \mathbb{R}$ şi $k_2 \in \mathbb{R}$ sunt unic determinaţi. Relaţia de mai înainte o scriem sub forma

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v}$$

De aici deducem:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v}$$

numită *ecuaţia parametrică vectorială a planului P* şi:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 \\ y &= y_0 + k_1 \cdot m_1 + k_2 \cdot m_2 \\ z &= z_0 + k_1 \cdot n_1 + k_2 \cdot n_2 \end{aligned}$$

numite *ecuaţiile parametrice ale planului P***.**

b) $\overrightarrow{M_0M}$ este perpendicular pe $\bar{u} \times \bar{v}$, adică

$$\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{u} \times \bar{v} \rangle = 0$$

numită *ecuaţia vectorială a planului P*.Pe de altă parte $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\,\bar{\imath} + (y - y_0)\,\bar{j} + (z - z_0)\,\bar{k}$ deci conform relaţiei (**??**) ecuaţia precedentă devine

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

numită *ecuaţia carteziană a planului P.*

2.2.3 Planul determinat de trei puncte necoliniare

Ne propunem să obţinem ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1,3}$, din E_3, $\bar{r}_i = x_i\bar{\imath} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$, $i = \overline{1,3}$, reprezentat în figura

8 şi pe care-l notăm $P : (M_1, M_2, M_3)$.

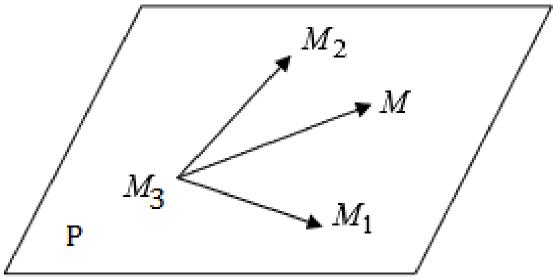

Figura 8

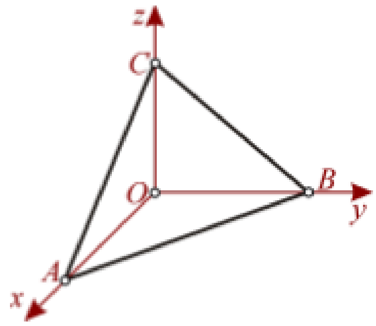

Figura 9

Să considerăm un punct M , $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$, care generează planul. Condiţia de coplanaritate a vectorilor $\overrightarrow{M_3M}$ şi $\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}$ este chiar ecuaţia vectorială a planului: $\left\langle \overline{M_3M}, \overline{M_3M_1} \times \overline{M_3M_2} \right\rangle = 0$. Dacă scriem această relaţie cu ajutorul vectorilor de poziţie, obţinem:

$$\langle \bar{r} - \bar{r}_3, \bar{r}_1 - \bar{r}_3 \times \bar{r}_2 - \bar{r}_3 \rangle = 0$$

numită *ecuaţia parametrică vectorială a planului* P. Pe de altă parte

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_3M} &= (x - x_3)\,\bar{\imath} + (y - y_3)\,\bar{\jmath} + (z - z_3)\,\bar{k} \\
\overrightarrow{M_3M_1} &= (x_1 - x_3)\,\bar{\imath} + (y_1 - y_3)\,\bar{\jmath} + (z_1 - z_3)\,\bar{k} \\
\overrightarrow{M_3M_2} &= (x_2 - x_3)\,\bar{\imath} + (y_2 - y_3)\,\bar{\jmath} + (z_2 - z_3)\,\bar{k}
\end{aligned}$$

deci conform relaţiei (**??**) ecuaţia precedentă devine

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

numită *ecuaţia carteziană a planului P.*

Pe de altă parte, condiţia de coplanaritate a punctelor $M_i(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1,3}$ şi M, se mai poate scrie folosindu-ne de ecuaţia generală a planului şi ecuaţiile obinute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în ecuaţia generală, ca ecuaţii în necunoscutele a, b, c şi d. Rezultă sistemul liniar omogen:

$$P : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

Acesta are soluţie nebanală întrucât a, b şi c nu pot fi toţi nuli. Adică:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care este chiar *ecuaţia carteziană a planului* P.

Ca un caz particular, găsim ecuaţia planului prin tăieturi (figura 9 [3]). Dacă tăieturile sunt $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ şi $C(0, 0, c)$, atunci ecuaţia planului (ABC) este:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

2.2.4 Planul determinat de o dreaptă şi un punct nesituat pe dreaptă

Să considerăm dreapta $d \in E_3$ şi punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ ce nu apartine dreptei d. (figura 10).

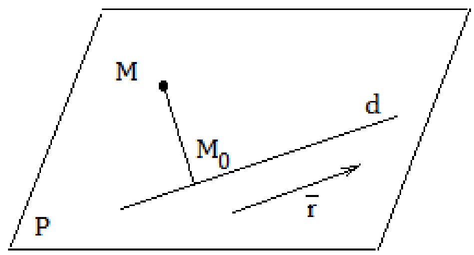

Figura 10

Scrierea ecuaţiei planului $P(M, d)$ este echivalentă cu a scrie ecuaţia planului $P(M, \overline{MM_0}, \bar{r})$ adică, revine la a scrie ecuaţia numită *ecuaţia vectorială a planului P,* plan determinat de un punct $M(x_1, y_1, z_1)$ şi doi vectori necoliniari $\overline{m_0} - \bar{m}$ şi $\bar{r}$,

$$\langle \bar{m}, (\overline{m_0} - \bar{m}) \times \bar{r} \rangle = 0$$

unde cu $\overline{m_0}$ am notat vectorul de poziţie al punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ iar cu $\bar{m}$ vectorul de poziţie al punctului M, caz studiat mai înainte. Ecuaţia precedentă devine:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

cu $\bar{r} = l\bar{\imath} + m\bar{\jmath} + n\bar{k}$, numită *ecuaţia carteziană a planului P.*

2.2.5 Planul determinat de două drepte concurente

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I. C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte,C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[4] Ungureanu,V. M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[5] Ungureanu,V. M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

1. Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

2. V. Bălan, Algebră liniară, geometrie analitică, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

3. S. Chiriţă, Probleme de matematici superioare, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

4. I. Iatan, Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

5. I. Iatan, “Advances Lectures on Linear Algebra with Applications”, Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

6. M. Popescu, Algebră liniară şi geometrie, note de curs, 1993.

7. C. Udrişte, Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale, ed. Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

8. I. Vladimirescu, M. Popescu, Algebră liniară şi geometrie analitică, ed. Universitaria, Craiova, 1993

Index