Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 4

Cuprins

1 Operatori liniari **5**
- 1.1 Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar 5
- 1.2 Diagonalizarea unui endomorfism 7
- 1.3 Endomorfism jordanizabil 10
- 1.4 Adjunctul unui endomorfism 18

Bibliografie **18**

Index **20**

Capitolul 1

Operatori liniari

1.1 Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar

Fie $T : V \to V$ un operator liniar pe spaţiul vectorial n dimensional V.

Definiţia 1.1.1 *Se numeşte* ***vector propriu*** *al lui T , un vector $x \neq 0$ cu proprietatea:*

$$(\exists)\lambda \in K \quad astfel \quad încât \quad T(x) = \lambda x$$

λ se numeşte ***valoare proprie*** *orespunzătoare vectorului propriu x.*

Definiţia 1.1.2 *Mulţimea $V_\lambda = \{x \in X \,|T(x) = \lambda x\}$ se numeşte* ***subspaţiu propriu*** *corespunzător lui $\lambda \in K$.*

Observaţia 1.1.3 *Se constatã cã $0 \in V_\lambda$ deoarece $T\ (0) = 0 = \lambda \cdot 0$.*

Propoziţia 1.1.4 *V_λ este un subspaţiu liniar al lui V.*

Ecuaţia

$$\det[(A - \lambda I)] = 0. \tag{1.1}$$

de grad n , în necunoscuta λ se numeşte **ecuaţie caracteristicã**.

Soluţiile acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale operatorului T.

Conform teoremei fundamentale a algebrei, această ecuaţie admite n rãdãcini (reale sau
complexe). Deci valorile proprii se deduc din rezolvarea ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nm}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Mulţimea valorilor proprii formeaza **spectrul matricei** A şi o vom nota $Sp(A)$:

$$Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n \in C \,|\det(A - \lambda_j I) = 0\}$$

Fiecărei valori proprii $\lambda_j \neq 0$ îi corespunde un vector propriu x_j, determinat ca soluţie a sistemului liniar omogen:

$$(A - \lambda_j I)\, X_j = 0$$

Observãm cã, deoarece soluţia unui sistem liniar omogen nu este unicã, existã pentru fiecare valoare proprie λ_j, o infinitate de vectori proprii X_j.

Polinomul

$$P(\lambda) = \det[(A - \lambda I)] \tag{1.2}$$

se numeşte **polinomul caracteristic** al lui T.

Exemplul 1.1.5 *Fie* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *matricea ataşată operatorului liniar* T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Sã se determine vectorii proprii şi valorile proprii ale operatorului* T.

Soluţie: Ecuaţia caracteristicã este : $\det(A - \lambda I) = 0$, adicã

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ cu rãdãcinile $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$.

Deci $Sp(A)$ ={1;2} este mulţimea valorilor proprii.

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 1$ determinãm vectorul propriu X_1 din sistemul $(A-\lambda_1 I)X_1 = 0$.

Notãm $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ecuaţia $x_1 + x_2 = 0$, deci notând $x_2 = \alpha$, se obţine $x_1 = -\alpha$.

Am obţinut vectorul propriu ataşat primei valori proprii, $X_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ sau

$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, adicã o infinitate de vectori proprii dupã valoarea scalarului α.

Pentru $\lambda = \lambda_2 = 2$, similar se obţine vectorul propriu $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ din ecuaţia $(A - \lambda_2 I)X_2 = 0$, adicã
$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 \\ 1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$
deci $x_1 = 0$ şi $x_2 \in \mathbb{R}$.

Notăm $x_2 = \beta \Rightarrow$ vectorul propriu $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci o infinitate de vectori proprii.

Deci vectorii proprii sunt $X_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $X_2 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se constatã cã X_1 şi X_2 sunt liniar independenţi.

Într-adevãr,$\Delta = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = -\alpha\beta \neq 0.$

Aceastã proprietate constatatã pentru cazul particular cercetat este adevãraratã în general. ■

1.2 Diagonalizarea unui endomorfism

Teorema 1.2.1 *Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K iar $T : V \to V$ un endomorfism. T este diagonalizabil $\Longleftrightarrow$ are toate valorile proprii λ_i în corpul K şi în plus, multiplicatorii algebrici m.a.(λ_i) = multiplicatorii geometrici m.g.(λ_i).*

Observaţia 1.2.2 *Multiplicatorul algebric al valorii proprii λ, m.a.(λ), este dat de ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ iar multiplicatorul geometric m.g.(λ) reprezintă dimensiunea subspaţiului propriu $V(\lambda)$.*

Exerciţiul 1.2.3 *Să se studieze dacă endomorfismele $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, cu matricile în baza canonică de mai jos, sunt diagonalizabile, iar în caz afirmativ să se diagonalizeze:*

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, *b)* $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluţie: a) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice:
$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 \\ -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-5-\lambda)(5-\lambda) + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0$ cu rãdãcinile

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Adică avem o singură rădăcină, pe care o vom nota cu $\lambda_1 = 0$, de multiplicitate algebrică m.a.$(\lambda_1) = 2$.
Subspaţiul propriu *corespunzător lui* $\lambda_1 = 0$ este *mulţimea*

$$V_{\lambda_1} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \,|(A - \lambda_1 I)\, X = 0 \right\}$$

$$\textit{adică } V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luăm separat egalitatea $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x_2 - 5x_1 \\ 5x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 5x_2 - 5x_1 = 0 \\ 5x_2 - 5x_1 = 0 \end{cases}$ cu soluţia: $x_1 = x_2$.
Deci $V_{\lambda_1} = \left\{ x = (x_1, x_1) \in \mathbb{R}^2 \,|x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.
Multiplicatorul geometric m.g.(λ_1) reprezintă dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} adică 1. Dar m.g.$(\lambda_1) = 1 \neq 2 =$m.a.(λ_1) deci endomorfismul T nu este diagonalizabil.
b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice:
$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -4 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9$ cu rãdãcinile $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$.
Deci vom avea multiplicităţile algebrice: m.a.$(\lambda_1) = 1$, m.a.$(\lambda_2) = 1$.
Subspaţiul propriu *corespunzător lui* $\lambda_1 = 3$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Luăm separat egalitatea $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4x_1 - 4x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ cu soluţia: $x_1 = x_2$.
Deci $V_{\lambda_1} = \left\{ x = (x_1, x_1) \in \mathbb{R}^2 \,|x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.
O bază în V_{λ_1} o putem considera ca fiind B_1 $=\{e_1 = (1, 1)\}$.
Multiplicatorul geometric m.g.(λ_1) reprezintă dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} adică 1. m.g.$(\lambda_1) = 1$.
Subspaţiul propriu *corespunzător lui* $\lambda_2 = -3$ este *mulţimea*

$$V_{\lambda_2} = \left\{ X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ cu soluţia: $x_1 = 2x_2$. Deci $V_{\lambda_2} = \left\{ x = (2x_2, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,| x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.
O bază în V_{λ_2} o putem considera ca fiind B_2 =$\{e_2 = (2, 1)\}$.
Multiplicatorul geometric m.g.(λ_2) reprezintă dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_2} adică 1. m.g.(λ_2) = 1.
Deoarece m.a.(λ_1) = m.g.(λ_1) =1 şi m.a.(λ_2) =m.g.(λ_2) = 1, operatorul T este în acest caz diagonalizabil. Forma diagonală a endomorfismului T este $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Avem relaţia $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$ unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2 = 1$. Deci vom avea multiplicităţile algebrice: m.a.(λ_1) = 3.
Subspaţiul propriu *corespunzător lui* $\lambda_1 = 1$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ cu soluţia: $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = x_3 = 0$.
Deci $V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \,| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.
O bază în V_{λ_1} o putem considera ca fiind B_1 =$\{e_1 = (1, 0, 0)\}$.
Multiplicatorul geometric m.g.(λ_1) reprezintă dimensiunea subspaţiului propriu V_{λ_1} adică 1. m.g.(λ_1) = 1.
Dar m.g.(λ_1) = $1 \neq 3$ =m.a.(λ_1) deci endomorfismul T nu este diagonalizabil.
■

Exerciţiul 1.2.4 *Să se diagonalizeze următoarea matrica* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluţie: *Pasul 1.* Determinăm $P_A(\lambda)$ şi spectrul $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$, cu multiplicităţile $n_1, n_2, ..., n_p$ respective;
$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 12\lambda - 16.$
$-\lambda^3 + 12\lambda - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -4.$
Deci $Sp(A) = \{2, -4\}$ cu multiplicităţile 2 respectiv 1.
Pasul 2. Pentru $\lambda = \lambda_1$ se determină spaţiul V_{λ_1} şi o bază $\mathcal{B}_1$ a sa.
Dacă $\dim V_{\lambda_1} \neq n_1$, matricea A nu se diagonalizează. Presupunem că $\dim V_{\lambda_1} = n_1, \dim V_{\lambda_2} = n_2, ..., \dim V_{\lambda_p} = n_p$ şi se determină bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_p$ pentru $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, ..., V_{\lambda_p}$.
Pentru $\lambda = \lambda_1 = 2$, $V_\lambda = \left\{(x_1, x_2, x_3)^t \,|x_1 = x_2 + x_3\right\}$ deci $\dim V_{\lambda_1} = 2$.
O bază este $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ unde $v_1 = (1, 1, 0)^t$ şi $v_2 = (1, 0, 1)^t$.
Pentru $\lambda_2 = -4$, $V_{\lambda_2} = \left\{(-t, t, t)^t \,|t \in \mathbb{R}\right\}$ deci $\dim V_{\lambda_2} = 1$ şi luăm $\mathcal{B}_2 = \{v_3\}$, $v_3 = (-1, 1, 1)^t$.
Pasul 3. Se consideră matricea C punând pe coloane, la rând, vectorii bazei $\mathcal{B}_1$ apoi ai lui $\mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_p$.
Atunci $C^{-1}AC = D$, diagonală. În plus, $A^k = CD^kC^{-1}$.
Luând $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A = C\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}C^{-1} \text{ şi } A^k = C\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}C^{-1}. \ \blacksquare$$

1.3 Endomorfism jordanizabil

Un endomorfism $T : V \to V$ pe spaţiul vectorial n dimensional $(V; K)$ se numeşte **jordanizabil** dacă există o bază B a spaţiului vectorial V pentru care matricea asociată este de forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & J_n \end{pmatrix}$$

unde J_i, $i = 1, ..., n$ sunt celule Jordan de diferite ordine ataşate valorilor proprii λ_i. Matricea J se numeşte formă canonică Jordan.

Teorema 1.3.1 *(Forma canonică Jordan) Pentru orice endomorfism $T : V \to V$ pe spaţiul vectorial n dimensional $(V; K)$, care are toate valorile proprii în corpul K, există o bază B_1 a lui V astfel încât matricea lui T în baza B_1 să fie scrisă sub formă canonică Jordan.*

Algoritm de reducere la forma canonică Jordan a unui endomorfism

1. Se fixează o bază B a spaţiului vectorial finit dimensional $(V; K)$ şi se scrie matricea asociată endomorfismului T în baza B. Fie ea A.

2. Se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, cu multiplicităţile lor algebrice m.a.(λ_1) ,m.a.(λ_2) , ...,m.a.$(\lambda_p) \in \mathbb{N}$, prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice $\det(A-\lambda I) = 0$.

3. Dacă toate valorile proprii λ_i, $i = 1, ..., p$, aparţin corpului K se contină algoritmul. În caz contrar, spunem că endomorfismul T nu este jordanizabil.

4. Pentru fiecare valoare proprie λ_i se determină subspaţiul propriu asociat V_{λ_i} şi dimensiunea acestuia $\dim V_{\lambda_1} = m.g. (\lambda_1)$, $\dim V_{\lambda_2} = m.g. (\lambda_2)$, ..., $\dim V_{\lambda_p} =$ m.g.(λ_p) cu m.g.$(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i} = n - rang(A - \lambda I) \leq$ m.a.(λ_i).

Numărul multiplictăţii geometrice m.g.(λ_i) $<$ m.a.(λ_i) ne dă numărul de celule Jordan corespunzătoare valorii proprii λ_i.

5. Pentru acele valori proprii pentru care m.g.$(\lambda_i) \leq$ m.a.(λ_i), se determină vectorii principali $X_2, ..., X_p$, asociaţi câte unui vector al unui sistem liniar independent de vectori proprii din V_{λ_i}, astfel: Se consideră $X_1 \in V_{\lambda_i}$ un vector propriu oarecare şi, impunându-se condiţiile de compatibilitate, se rezolvă sistemele de ecuaţii liniare recurente

$$\begin{array}{rcl} (A - \lambda_i I_n) X_2 & = & X_1 \\ (A - \lambda_i I_n) X_3 & = & X_2 \\ & & ... \\ (A - \lambda_i I_n) X_p & = & X_{p-1} \end{array}$$

Se determină vectorii proprii liniar independenţi din V_{λ_i} precum şi vectorii principali asociaţi fiecăruia, ţinând cont de condiţiile de compatibilitate şi de forma vectorilor proprii sau principali. În total, aceştia trebuie să fie în număr de m.a.(λ_i) pentru fiecare valoare proprie λ_i.

Ordinul celulelor Jordan este egal cu numărul de vectori din sistemul format dintr-un vector propriu şi vectorii principali asociaţi.

6. Reunind toţi vectorii proprii şi vectorii principali construiţi anterior vom scrie baza B_J în care se obţine forma canonică Jordan $J = \mathcal{M}_{B_J}(T)$.

7. Fie C matricea de trecere de la baza B la baza B_J. Scriem forma canonică Jordan $J = C^{-1} \cdot A \cdot C$.

Exercițiul 1.3.2 *Să se aducă la forma canonică Jordan endomorfismele* $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *, cu cu matricile în baza canonică de mai jos:*

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ b)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ c)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Soluţie: a) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -3\\ 0 & 3-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$, cu rãdãcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$. Acestea au multiplicităţile algebrice m.a.$(\lambda_1)=1$,m.a.$(\lambda_2)=1$,m.a.$(\lambda_3)=1$.

Subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 1$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1}=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} 2-1 & 2 & -3\\ 0 & 3-1 & -1\\ 0 & 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right.\right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_2-x_3=0\\ 0=0\end{cases}$ cu soluţia: $x_1 = 2x_3, x_2 = \frac{1}{2}x_3, x_3 \in \mathbb{R}$. Deci

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{X=\left(2x_3,\frac{1}{2}x_3,x_3\right)\in\mathbb{R}^3\,|x_3\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{X=x_3\left(2,\frac{1}{2},1\right)\in\mathbb{R}^3\,|x_3\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Prin urmare $\dim V_{\lambda_1} = 1 = m.g.\,(\lambda_1) =$m.a.$(\lambda_1)$.

Fie vectorul propriu $X_1 = \left(2, \frac{1}{2}, 1\right) \in V_{\lambda_1}$.

Subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 3$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1}=\left\{X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} 2-3 & 2 & -3\\ 0 & 3-3 & -1\\ 0 & 0 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right.\right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2x_2 - x_1 - 3x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$, cu soluţia: $x_1 = 2x_2, x_3 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$. Deci $V_{\lambda_2} = \left\{ X = (2x_2, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \left| x_2 \in \mathbb{R} \right. \right\} = \left\{ X = x_2 (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \left| x_2 \in \mathbb{R} \right. \right\}$.
Prin urmare $\dim V_{\lambda_2} = m.g.\left(\lambda_2\right) = 1 =$m.a.$(\lambda_2)$.
Fie vectorul propriu $X_2 = (2, 1, 0) \in V_{\lambda_2}$.
Subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii* $\lambda_3 = 2$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} 2-2 & 2 & -3 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$, cu soluţia: $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0, x_3 = 0$. Deci $V_{\lambda_3} = \left\{ X = (x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \left| x_1 \in \mathbb{R} \right. \right\} = \left\{ X = x_1 (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \left| x_1 \in \mathbb{R} \right. \right\}$.
Prin urmare $\dim V_{\lambda_3} = m.g.\left(\lambda_3\right) = 1 =$m.a.$(\lambda_3)$.
Fie vectorul propriu $X_3 = (1, 0, 0) \in V_{\lambda_3}$.
Prin urmare, obţinem baza Jordan $B_J = \{X_1, X_2, X_3\}$ în care matricea canonică Jordan este $J = C^{-1}{\cdot}A{\cdot}C$ unde C matricea de trecere de la baza B la baza B_J,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J &= C^{-1}{\cdot}A{\cdot}C \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3) = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Acestea au multiplicităţile algebrice m.a.$(\lambda_1) = 2$,m.a.$(\lambda_2) = 1$.
Subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 1$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2-1 & 1 & -3 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, cu soluţia: $x_1 = -x_2, x_3 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$. Deci

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ X = (-x_2, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ X = x_2 (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Prin urmare $\dim V_{\lambda_1} = m.g.(\lambda_1) = 1 <$ m.a.$(\lambda_1) = 2$. Adică avem o singură celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_1 = 1$.
Fie vectorul propriu $X_1 = (-1, 1, 0) \in V_{\lambda_1}$şi fie de asemenea matricea

$$B = A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvând sistemul $BX_2 = X_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Găsim mulţimea de soluţii $X_2 = (2 - x_2, x_2, 1), x_2 \in \mathbb{R}$. Fie, spre exemplu,

$X_2 = (2, 0, 1)$.
Subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 3$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_2} = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -3 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x_2 - x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$, cu soluţia: $x_1 = x_2, x_3 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$. Deci

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ X = (x_2, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \left| x_2 \in \mathbb{R} \right. \right\} \\ &= \left\{ X = x_2 (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \left| x_2 \in \mathbb{R} \right. \right\} \end{aligned}$$

Prin urmare $\dim V_{\lambda_2} = m.g.(\lambda_2) = 1 = \text{m.a.}(\lambda_2)$.
Fie vectorul propriu $X_3 = (1, 1, 0) \in V_{\lambda_2}$.
Prin urmare, obţinem baza Jordan $B_J = \{X_1, X_2, X_3\}$ în care matricea canonică Jordan este $J = C^{-1} \cdot A \cdot C$ unde C matricea de trecere de la baza B la baza B_J,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J &= C^{-1} \cdot A \cdot C \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^4 = 0,$$

cu rãdãcina multiplă de ordinul 4, $\lambda_1 = 1$. Acestea are multiplicitatea algebrică m.a.$(\lambda_1) = 4$.
Subspaţiul propriu *corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 1$ este *mulţimea:*

$$V_{\lambda_1} = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\}$$

Vom avea sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, cu soluţia: $x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_1 \in \mathbb{R}$. Deci

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ X = (x_1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \left| x_1 \in \mathbb{R} \right. \right\} \\ &= \left\{ X = x_1 (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \left| x_1 \in \mathbb{R} \right. \right\} \end{aligned}$$

Prin urmare $\dim V_{\lambda_1} = m.g.(\lambda_1) = 1 < m.a.(\lambda_1) = 4$.Adică avem o singură celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii $\lambda_1 = 1$.
Fie vectorul propriu $X_1 = (1, 0, 0, 0) \in V_{\lambda_1}$ şi fie de asemenea matricea

$$B = A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvând sistemul $BX_2 = X_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_3 + 2x_4 \\ 2x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Găsim mulţimea de soluţii $X_2 = (x_1, 1, 0, 0)\,, x_1 \in \mathbb{R}$.
Fie, spre exemplu, $X_2 = (1, 1, 0, 0)$.

În continuare rezolvăm sistemul $BX_3 = X_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Găsim mulţimea de soluţii $X_3 = (x_1, -1, 1, 0)\,, x_1 \in \mathbb{R}$.
Fie, spre exemplu, $X_3 = (1, -1, 1, 0)$.

În continuare rezolvăm sistemul $BX_4 = X_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Găsim mulţimea de soluţii $X_4 = (x_1, 3, -2, 1/2)\,, x_1 \in \mathbb{R}$.
Fie, spre exemplu, $X_4 = (1, 3, -2, 1/2)$.
Prin urmare, obţinem baza Jordan $B_J = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ în care matricea canonică Jordan este $J = C^{-1} \cdot A \cdot C$ unde C matricea de trecere de la baza B la baza B_J,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
J &= C^{-1}\cdot A\cdot C \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

■

1.4 Adjunctul unui endomorfism

Exerciţiul 1.4.1 *Să se determine adjunctul endomorfismului $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definit prin $T(x, y) = (2x + y, 3x)$, relativ la produsul scalar canonic.*

Soluţie: Vom considera $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ baza canonică ortonormată din $\mathbb{R}^2$. Matricea lui T în această bază este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Atuci adjunctul lui T va avea matricea $\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x \end{pmatrix}^t =$ $(2x + 3y, x) \Rightarrow T^*(x, y) = (2x + 3y, x)$. ■

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

Index

Ecuatie caracteristică, 5

Forma canonica Jordan, 10

jordanizabil, 10

Polinomul caracteristic, 6

Spectrul matricei, 6
Subspatiu
    propriu, 5

Valoare
    proprie, 5
Vector
    propriu, 5