Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 5

Cuprins

Seminarul 5

Capitolul 1

Spaţii euclidiene

1.1 Definiţii

Definiţia 1.1.1 *Un spaţiu vectorial real V se numeşte* ***prehilbertian real*** *dacă există o aplicaţie*

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$$

astfel încât pentru orice $x, y, z \in V$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, să fie îndeplinite proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} 1. & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\ 2. & \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \\ 3. & \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \\ 4. & (\forall)\, x \in V, \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \tag{1.1}$$

Aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte ***produs scalar real****. Spaţiile prehilbertiene reale finit dimensionale se mai numesc* ***spaţii eucliediene reale****.*

Se poate arăta prin inducţie că dacă $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ...y_n \in V$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j \rangle \tag{1.2}$$

Dacă în relaţia (*1.1*) punctul 3 luăm $\lambda = -1$, vom avea:

$$\langle -x, y \rangle = - \langle x, y \rangle \quad (\forall)\, x, y \in V \tag{1.3}$$

Definiţia 1.1.2 *Vectorii $x, y \in V$ se numesc **ortogonali** dacă:*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

şi se scrie $x \perp y$.

Relaţia de ortogonalitate este o relaţie simetrică: dacă $x \perp y$ atunci şi $y \perp x$.
Deoarece $\langle u, 0 \rangle = 0$, rezultă că $u \perp 0$, $(\forall)\, u \in V$.
De asemenea, dacă $u \perp u$, atunci $u = 0$.(din relaţia 1.1 punctul 4)
Notăm cu:

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{1.4}$$

Din relaţia (1.1) punctul 4 rezultă că:

$$\| x \| \geq 0 \;\text{ şi }\; \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{1.5}$$

Definiţia 1.1.3 *Numărul $\| x \|$ se numeşte **norma** lui x.*

Exemplul 1.1.4 *Fie $V = \mathbb{R}^3$, $v, w \in \mathbb{R}^3$, $v = x_1\bar{\imath} + x_2\bar{\jmath} + x_3\bar{k}$ şi $w = y_1\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath} + y_3\bar{k}$ cu:*

$$\langle v, w \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

V pe care s-a definit aplicaţia de mai sus este un spaţiu euclidian, deoarece au loc proprietăţile produsului scalar.

Fie $V = \mathbb{R}^n$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ dacă luăm:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{1.6}$$

*se obţine un **produs scalar** numit **euclidian**.*

Teorema 1.1.5 *Fie V un spaţiu prehilbertian real. Atunci:*

a) (**inegalitatea lui Schwartz**) *Pentru orice $x, y \in V$ are loc relaţia:*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \cdot \| y \| \tag{1.7}$$

b) *V este spaţiu vectorial normat, relativ la norma : $V \to \mathbb{R}$, $x \to \| x \|$;*

c) (**regula paralelogramului**) $(\forall)x, y \in V$,

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \tag{1.8}$$

Fie V spaţiu prehilbertian real, şi $x \in V$. Norma $\|x\|$ se mai numeşte ***lungimea vectorului*** *x.*

Dacă $x, y \in V$, numărul real

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.9}$$

se numeşte ***distanţa*** *dintre x şi y.*

Dacă x şi y sunt nenuli, atunci conform inegalităţii lui Schwartz:

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$$

şi numim ***unghi*** *al vectorilor x , y numărul real $\theta \in [0, \pi]$ astfel încât:*

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.10}$$

Definiţia 1.1.6 *Un spaţiu vectorial complex V se numeşte* ***prehilbertian complex*** *dacă există o aplicaţie $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, astfel încât pentru orice $x, y, z \in V$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ să fie îndeplinite proprietăţile:*

a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

b) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$;

c) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$;

d) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. ($\langle x, x\rangle$ este un număr real deoarece $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$)

Aplicaţia care îndeplineşte proprietăţile de mai înainte se numeşte ***produs scalar complex****. Spaţiile prehilbertiene complexe finit dimensionale se mai numesc* ***spaţii euclidiene complexe*** *(sau spaţii unitare).*

Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex.

Un sistem $\{e_1, ..., e_n\}$ se numeşte ***sistem ortogonal de vectori*** *dacă:*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0, \quad (\forall)i \neq j. \tag{1.11}$$

El se numeşte ***sistem ortonormal*** *de vectori dacă:*

$$(\forall)i,j \ \text{ avem: } \ \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \ i \neq j \\ 1 & \text{pentru } \ i = j \end{cases} \tag{1.12}$$

Avem deci:

$$\|e_i\| = 1, \quad (\forall)i \tag{1.13}$$

Teorema 1.1.7 ***(ortogonalizarea Gram-Schmidt)*** *Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex, $L = \{v_1, v_2, ..., v_k, ...\}$ un sistem liniar independent de vectori şi fie, pentru orice $k \geq 1, W_k$ subspaţiul generat de $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Atunci există un sistem ortogonal de vectori $L' = \{e_1, e_2, ..., e_k, ...\}$ astfel încât subspaţiul W_k' generat de $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ să coincidă cu W_k, pentru orice $k = 1, 2, ...$.*

1.2 Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

Exemplul 1.2.1 *Să se ortonormeze sistemele de vectori:*
a) $S_1 = \{u_1 = (1,1),\ u_2 = (2,3)\}$ relativ la produsul scalar euclidian din $\mathbb{R}^2$;
b) $S_2 = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (2,3,0), u_3 = (1,2,3)\}$ relativ la produsul scalar euclidian din $\mathbb{R}^3$;
c) $S_3 = \left\{u_1 = -X,\ u_2 = X^2 - 1, u_3 = 1 - X\right\}$ relativ la produsul scalar euclidian din spaţiul polinoamelor de grad cel mult doi $\mathbb{R}_2[X]$, definit prin:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx \quad , (\forall)P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

utilizând procedeul Gram-Schmidt.

Soluţie: a) Construim vectorii ortogonali:

$$\begin{aligned} f_1 &= u_1 \\ f_2 &= u_2 + \lambda u_1 \end{aligned}$$

cu $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalar pe care-l vom determina în continuare din condiţia:

$$\langle f_2, f_1\rangle = 0$$

Vom avea: $f_2 = (2,3) + \lambda(1,1) = (\lambda + 2, \lambda + 3)$.
Din $\lambda + 2 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$.

Deci $f_2 = -\frac{5}{2}(1,1) + (2,3) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ iar sistemul de vectori $\{f_1, f_2\}$ este ortogonal.
Pentru a-l ortonorma considerăm:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_2 &= \frac{f_2}{\|f_2\|} \end{aligned}$$

Cum $\|f_1\| = \sqrt{2}$, $\|f_2\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ obţinem $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Astfel, sistemul $S_1' = \{e_1, e_2\}$ este ortonormal.
b) Construim vectorii ortogonali:

$$\begin{aligned} f_1 &= u_1 = (1,1,1) \\ f_2 &= u_2 + \lambda u_1 = (2,3,0) + \lambda(1,1,1) = (\lambda+2, \lambda+3, \lambda) \\ f_3 &= u_3 + \alpha u_1 + \beta u_2 = (1,2,3) + \alpha(1,1,1) + \beta(2,3,0) \\ &= (\alpha + 2\beta + 1, \alpha + 3\beta + 2, \alpha + 3) \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ este un scalar pe care-l vom determina în continuare din condiţia:

$$\begin{aligned} \langle f_2, f_1 \rangle &= 0 \\ \lambda + 2 + \lambda + 3 + \lambda &= 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Deci $f_2 = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ iar sistemul de vectori $\{f_1, f_2\}$ este ortogonal.
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt scalari pe care-i vom determina în continuare din condiţiile:

$$\begin{aligned} \langle f_3, f_1 \rangle &= 0 \Rightarrow \alpha + 2\beta + 1 + \alpha + 3\beta + 2 + \alpha + 3 = 0 \\ &\Rightarrow 3\alpha + 5\beta + 6 = 0 \\ \langle f_3, f_2 \rangle &= 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta + 1) + \frac{4}{3}(\alpha + 3\beta + 2) - \frac{5}{3}(\alpha + 3) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{14}{3}\beta - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta + 6 = 0 \\ \frac{14}{3}\beta - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{80}{21},\ \beta = \frac{3}{7}.$$

Deci $f_3 = (-\frac{8}{21}, \frac{34}{21}, -\frac{17}{21})$ iar sistemul de vectori $\{f_1, f_2, f_3\}$ este ortogonal.

Pentru a-l ortonorma considerăm:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1,1,1) \\
&= (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\
e_2 &= \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2}}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}) \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{42}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}) \\
e_3 &= \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{8}{21}\right)^2+\left(\frac{34}{21}\right)^2+\left(-\frac{17}{21}\right)^2}}(-\frac{8}{21}, \frac{34}{21}, -\frac{17}{21}) \\
&= \frac{1}{21}\sqrt{1509}(-\frac{8}{21}, \frac{34}{21}, -\frac{17}{21})
\end{aligned}$$

Astfel, sistemul $S_2' = \{e_1, e_2, e_3\}$ este ortonormal.
c) Construim vectorii ortogonali:

$$\begin{aligned}
f_1 &= u_1 = -X, \\
f_2 &= u_2 + \lambda u_1 = X^2 - \lambda X - 1, \\
f_3 &= u_3 + \alpha u_1 + \beta u_2 = 1 - X + \alpha(-X) + \beta\left(X^2-1\right) = \beta X^2 - X(\alpha+1) - \beta + 1
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ este un scalar pe care-l vom determina în continuare din condiţia:

$$\begin{aligned}
\langle f_2, f_1\rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(X^2-\lambda X-1\right)(-X)\,dX = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0
\end{aligned}$$

Deci $f_2 = X^2 - 1$ iar sistemul de vectori $\{f_1, f_2\}$ este ortogonal.
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt scalari pe care-i vom determina în continuare din condiţiile:

$$\begin{aligned}
\langle f_3, f_1\rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(\beta X^2 - X(\alpha+1) - \beta + 1\right)(-X)\,dX = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3} = 0 \\
\langle f_3, f_2\rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(\beta X^2 - X(\alpha+1) - \beta + 1\right)\left(X^2-1\right)dX = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{16}{15}\beta - \frac{4}{3} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3} = 0 \\ \frac{16}{15}\beta - \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = \tfrac{5}{4}.$$

Deci $f_3 = \frac{1}{4}\left(5X^2 - 1\right)$ iar sistemul de vectori $\{f_1, f_2, f_3\}$ este ortogonal.
Pentru a-l ortonorma considerăm:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|} = -X\frac{1}{\int_{-1}^{1}(-X)(-X)dX} = -X\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}X \\
e_2 &= \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{X^2-1}{\int_{-1}^{1}(X^2-1)(X^2-1)dX} = \frac{X^2-1}{\frac{16}{15}} = \frac{15}{16}(X^2-1) \\
e_3 &= \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{\frac{1}{4}\left(5X^2-1\right)}{\int_{-1}^{1}(\frac{1}{4}\left(5X^2-1\right))(\frac{1}{4}\left(5X^2-1\right))dX} = \frac{\frac{1}{4}\left(5X^2-1\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left(5X^2-1\right)
\end{aligned}$$

Astfel, sistemul $S_3' = \{e_1, e_2, e_3\}$ este ortonormal.
■

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

Index