Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 6

Cuprins

Capitolul 1

Funcţionale biliniare

1.1 Definiţii

Fie U şi V două spaţii vectoriale peste corpul K, cu $\dim_K U = n$ şi $\dim_K V = m$.

Definiţia 1.1.1 *Se numeşte **funcţională biliniară** (sau **aplicaţie biliniară**) orice funcţională $f : U \times V \to K$ cu proprietăţile:*

1. $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$, $(\forall)x, x' \in U, y \in V$;
2. $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$, $(\forall)\, x \in U, y \in V, \alpha \in K$;
3. $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$, $(\forall)\, x \in U, (\forall)\, y, y' \in V$;
4. $f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$, $(\forall)\, x \in U$, $(\forall)\, y \in V, \beta \in K$.

Adică f este liniară în fiecare din cele două argumente.
Cele patru proprietăţi se pot scrie sub forma echivalentă:

5. $f(\alpha x+\alpha' x', \beta y+\beta' y') = \alpha\beta f(x, y)+\alpha\beta' f(x, y')+\alpha'\beta f(x', y)+\alpha'\beta' f(x', y')$

   $(\forall)x, x' \in U, (\forall)\, y, y' \in V, (\forall)\, \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in K$.

Exemplul 1.1.2 *Fie $f(x)$ şi $g(y)$ două funcţionale liniare $f, g : V \to \mathbb{R}$. Atunci:*

$$h(x, y) = f(x)g(y)$$

este o funcţională biliniară.

Soluţie: Într-adevăr, pentru x-fixat,

$$x = \widehat{x} \Rightarrow h(\widehat{x}, y) = f(\widehat{x})g(y)$$

este funcţie liniară în $y \in V$, deoarece $f(\widehat{x}) \in \mathbb{R}$ este o constantă. Analog pentru y fixat. ■

Exemplul 1.1.3 ***Produsul scalar***. *Fie $x, y \in V$. Produsul scalar al vectorilor x cu y , adică funcţia:*

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

este o funcţională biliniară.

Exemplul 1.1.4 $U = V = C\left[a, b\right], K = \mathbb{R}, T : C\left[a, b\right] \times C\left[a, b\right] \to \mathbb{R}$

$$T(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$(\forall) f, g \in C\left[a, b\right]$ *, este o funcţională biliniară.*

Exemplul 1.1.5 $f : \mathbb{R}\left[X\right] \times \mathbb{R}\left[X\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(P, Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx$$

$(\forall) P, Q \in \mathbb{R}\left[X\right]$ *este o funcţională biliniară.*

Fie funcţionala biliniară $f : U \times V \to K$ şi $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în U iar $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_m\}$ o bază în V.

Pentru orice $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ şi $y = (y_1, ..., y_m) \in V$ avem scrierea unică:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ \ y = \sum_{j=1}^{m} y_j g_j$$

deci:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j g_j\right) \qquad (1.1) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j f(e_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1, ..., x_n)A(y_1, ..., y_m)^t \\ &= x_{\mathcal{E}}^t \cdot A \cdot y_{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

Evident, dacă bazele $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{G}$ sunt fixate, atunci f determină matricea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$ şi reciproc, matricea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$ determină complet funcţionala biliniară f.

Definiţia 1.1.6 *Matricea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$, $(a_{ij}) = f(e_i, g_j)$ se numeşte* ***matricea funcţionalei biliniare*** *f în bazele $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{G}$.*

Exemplul 1.1.7 *Aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, este o funcţională biliniară care are ataşată matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^2$şi $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, respectiv $\mathcal{G} = \{g_1 = (1, 0, 0), g_2 = (0, 1, 0), g_3 = (0, 0, 1)\}$.

1.2 Modificarea matricii unei funcţionale biliniare atunci când se schimbă bazele.

Fie în U bazele $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ şi $\mathcal{H} = \{h_1, ..., h_n\}$. Considerăm $C = (c_{ij})$, matricea de trecere de la $\mathcal{E}$ la $\mathcal{H}$, adică:

$$h_p = \sum_{i=1}^{n} c_{ip}e_i \ , \ p = \overline{1, n}$$

Fie în V bazele $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_m\}$ şi $\mathcal{L} = \{l_1, ..., l_m\}$. Considerăm $D = (d_{ij})$, matricea de trecere de la $\mathcal{G}$ la $\mathcal{L}$, adică:

$$l_q = \sum_{j=1}^{m} d_{jq}g_j \ , \ q = \overline{1, m}$$

Vrem să determinăm matricea de trecere de la $\mathcal{H}$ la $\mathcal{L}$. Notăm cu $B = (b_{pq})$

această matrice. Vom avea:

$$\begin{aligned} b_{pq} &= f(h_p, l_q) = f(\sum_{i=1}^{n} c_{ip} e_i \ , \sum_{j=1}^{m} d_{jq} g_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ip} d_{jq} f(e_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ip} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} d_{jq} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{ip} \left(AD\right)_{iq} = \sum_{i=1}^{n} \left(C^t\right)_{pi} \left(AD\right)_{iq} \\ &= \left(C^t AD\right)_{pq} \end{aligned}$$

Deci:

$$B = C^t AD \tag{1.2}$$

Observaţia 1.2.1 *Dacă $U = V$ atunci vom avea $\mathcal{E}$ $=\mathcal{G}$ şi $\mathcal{H}$ $=\mathcal{L}$ şi deci:*

$$B = C^t AC \tag{1.3}$$

Observaţia 1.2.2 *Rangul matricei asociate funcţionalei biliniare f nu depinde de baza aleasă deoarece matricele lui f în oricare două baze sunt echivalente deci au acelaşi rang.*

Observaţia 1.2.3 *În cazul complex, funcţionala biliniară $f : V \times V \to \mathbb{C}$ îndeplineşte condiţiile 1)-4) din definiţia 1.1.1 doar că:*

$$f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y) \ , \ (\forall)\, x, y \in V \quad \text{şi} \ (\forall)\, \alpha \in \mathbb{C} \tag{1.4}$$

Definiţia 1.2.4 *O funcţională biliniară $f : V \times V \to K$ se numeşte **simetrică** dacă:*

$$f(x, y) = f(y, x) \ , \ (\forall)\, x, y \in V \tag{1.5}$$

*O funcţională biliniară $f : V \times V \to \mathbb{C}$ se numeşte **hermitică** dacă:*

$$f(x, y) = f\left(\overline{y, x}\right) \ , \ (\forall)\, x, y \in V \tag{1.6}$$

Propoziţia 1.2.5 *O funcţională biliniară f este simetrică dacă şi numai dacă matricea ei într-o bază a lui V este simetrică.*

Exerciţiul 1.2.6 *Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$,*

$$f(P, Q) = P(0)\, Q'(0) + P'(0)\, Q(0) + P(1)\, Q(1)\,.$$

Să se arate că f este o funcţională biliniară simetrică şi să se determine matricea ei relativ la baza $\{1, X, X^2\}$.

Soluţie: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Arătăm că f este liniară în primul argument:

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + \beta P_2, Q) &= (\alpha P_1 + \beta P_2)(0)Q'(0) + (\alpha P_1 + \beta P_2)'(0)Q(0) \\ &+(\alpha P_1 + \beta P_2)(1)Q(1) \\ &= (\alpha P_1(0) + \beta P_2(0))\, Q'(0) + (\alpha P_1'(0) + \beta P_2'(0))\, Q(0) \\ &+\alpha P_1(1)Q(1) + \beta P_2(1)Q(1) \\ &= \alpha P_1(0)\, Q'(0) + \alpha P_1'(0)Q(0) + \alpha P_1(1)Q(1) \\ &+\beta P_2(0)\, Q'(0) + \beta P_2'(0)Q(0) + \beta P_2(1)Q(1) \\ &= \alpha f(P_1, Q) + \beta f(P_2, Q) \end{aligned}$$

Arătăm că f este liniară în cel de-al doilea argument:

$$\begin{aligned} f(P, \alpha Q_1 + \beta Q_2) &= P(0)\,(\alpha Q_1 + \beta Q_2)'(0) + P'(0)\,(\alpha Q_1 + \beta Q_2)(0) \\ &+P(1)\,(\alpha Q_1 + \beta Q_2)(1) \\ &= \alpha P(0)\, Q_1'(0) + \alpha P'(0)Q_1(0) + \alpha P(1)Q_1(1) \\ &+\beta P(0)\, Q_2'(0) + \beta P'(0)Q_2(0) + \beta P(1)Q_2(1) \\ &= \alpha f(P, Q_1) + \beta f(P, Q_2) \end{aligned}$$

f este simetrică deoarece:

$$\begin{aligned} f(P, Q) &= P(0)\, Q'(0) + P'(0)\, Q(0) + P(1)\, Q(1) \\ &= P'(0)\, Q(0) + P(0)\, Q'(0) + P(1)\, Q(1) = f(Q, P) \end{aligned}$$

Să notăm cu $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matricea căutată, unde $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ şi cu $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$. Avem:

$$\begin{aligned} a_{11} &= f(e_1, e_1) = f(1, 1) = 1; \\ a_{12} &= f(e_1, e_2) = f(1, X) = 2; \\ a_{13} &= f(e_1, e_3) = f(1, X^2) = 1; \\ a_{21} &= f(e_2, e_1) = f(X, 1) = 2; \\ a_{22} &= f(e_2, e_2) = f(X, X) = 1; \\ a_{23} &= f(e_2, e_3) = f(X, X^2) = 1; \\ a_{31} &= f(e_3, e_1) = f(X^2, 1) = 1; \\ a_{32} &= f(e_3, e_2) = f(X^2, X) = 1; \\ a_{33} &= f(e_3, e_3) = f(X^2, X^2) = 1. \end{aligned}$$

Am obţinut deci matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Definiţia 1.2.7 *Fie funcţionala biliniară $f : V \times V \to \mathbb{R}$. Atunci:*

1. f este **pozitiv definită** dacă $f(x,x) > 0$, $(\forall)\, x \in V$, $x \neq 0$;
2. f este **pozitiv semidefinită** dacă $f(x,x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in V$;
3. f este **negativ definită** dacă $f(x,x) < 0$, $(\forall)\, x \in V$, $x \neq 0$;
4. f este **negativ semidefinită** dacă $f(x,x) \leq 0$, $(\forall)\, x \in V$;
5. f este **nedefinită** dacă $(\exists)\, x \in V$ şi $y \in V$ astfel încât $f(x,x) > 0$ şi $f(y,y) < 0$.

Observaţia 1.2.8

$$f(0,y) = f(x,0) = 0, (\forall)\, x, y \in V$$

Observaţia 1.2.9 *Cu ajutorul oricărei funcţionale biliniare $f : V \times V \to \mathbb{R}$ se poate defini o funcţională biliniară simetrică $h : V \times V \to \mathbb{R}$,*

$$h(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(y,x)\right]$$

Exemplul 1.2.10 *Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de:*

$$f\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

atunci f este o funcţională biliniară simetrică dar nu e pozitiv definită iar aplicaţia $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de:

$$h\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

este o funcţională biliniară dar care nu este simetrică.

Exerciţiul 1.2.11 *Scrieţi forma biliniară pentru matricele:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ şi } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluţie: Evident $f : V \times V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^2$. Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$. Se obţine:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 \end{aligned}$$

care este o funcţională biliniară.
Analog pentru $f_2(x, y) = x^t A_2 y$. Se obţine o funcţională biliniară nesimetrică. ■

Capitolul 2

Funcţionale pătratice

2.1 Definiţii

Fie $f : V \times V \to \mathbb{R}$ o funcţională biliniară simetrică, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$.

Definiţia 2.1.1 *Se numeşte* ***funcţională pătratică*** *şi o vom nota cu $H(x)$, restricţia unei funcţionale biliniare simetrice la diagonala produsului cartezian Δ,*

$$\Delta = diag\ (X \times X) = \{(x, x)\,|x \in X\} \tag{2.1}$$

Deci

$$H(x) = f(x, x) \tag{2.2}$$

Fie $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V, $x \in X$, $x = (x_1, ..., x_n)^t$ coordonatele lui x în baza $\mathcal{E}$ iar $A = (a_{ij}) = f(e_i, e_j) = (a_{ji})$ matricea ataşată funcţionalei biliniare simetrice f în baza $\mathcal{E}$. Funcţionala pătratică $H(x)$ devine:

$$H(x) = f(x, x) = x_E^t A x_E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n +$$
$$... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + ... + 2a_{2n}x_2x_n +$$
$$... + a_{nn}x_n^2$$

(am ţinut cont de faptul că $(a_{ij}) = (a_{ji})$).

Observaţia 2.1.2 *Reciproc dacă se dă funcţionala pătratică $H(x) = f(x,x)$, atunci funcţionala biliniară simetrică din care provine $H(x)$ se obţine în mod unic din $f(x,x)$ astfel:*

$$f(x+y,x+y) = f(x,x)+f(y,y)+f(x,y)+f(y,x) = f(x,x)+2f(x,y)+f(y,y)$$

deci:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x+y,x+y) - f(x,x) - f(y,y)\right] = \frac{1}{2}\left[H(x+y) - H(x) - H(y)\right] \tag{2.3}$$

Funcţionala pătratică din care provine $H(x)$ se numeşte ***funcţionala polară a funcţionalei pătratice*** *$H(x)$.*

Exerciţiul 2.1.3 *Fie $V \subset \mathbb{R}^2$, cu $f : V \times V \to \mathbb{R}$ şi funcţionala biliniară simetrică f care are matricea ataşată, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se scrie funcţionala pătratică $H(x)$.*

Soluţie: Avem: $f(x,y) = x^T Ay \qquad f(x,x) = x^T Ax$

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2 \end{aligned}$$

deci funcţionala pătratică $H(x)$ este:

$$H(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

■

Exerciţiul 2.1.4 *Pe spaţiul vectorial $V \subset \mathbb{R}^2$ se dã funcţionala pătratică $H(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2$. Să se scrie funcţionala biliniară simetrică corespunzãtoare.*

Soluţie: Avem:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}\left[f(x+y,x+y) - f(x,x) - f(y,y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[4(x_1+y_1)^2 + 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 6(x_2+y_2)^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[-4x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_2^2 - 4y_1^2 - 2y_1y_2 - 6y_2^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[8x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2\right] \\ &= 4x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2 \end{aligned}$$

Se constată că funcţionala biliniară are matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. ■

Corolarul 2.1.5 *Matricea funcţionalei pătratice se obţine scriind termenii* $(a_{ij}x_iy_j)$ *sub forma* $\frac{1}{2}(a_{ij}x_iy_j + a_{ji}x_jy_i)$.

Definiţia 2.1.6 *Fie funcţionala pãtratică* $H(x) : V \to \mathbb{R}$.

a) $H(x)$ **este pozitiv definită** dacă $H(x) > 0, (\forall)x \in V - \{0\}$;

b) $H(x)$ **este pozitiva semidefinită** dacă $H(x) \geq 0, (\forall)x \in V - \{0\}$;

c) $H(x)$ este **negativ definită** dacă $H(x) < 0, (\forall)x \in V - \{0\}$;

d) $H(x)$ este **negativ semidefinită** dacă $H(x) \leq 0, (\forall)x \in V - \{0\}$;

e) $H(x)$ este **nedefinită** dacă $(\exists)\, x \in V$ pentru care $H(x) \geq 0$ şi $(\exists)\, x \in V$ pentru care $H(x) \leq 0$.

Stabilirea calităţii unei funcţionale pãtratice de a fi pozitiv sau negativ definitã (semidefinitã) este o etapã foarte importantã în cercetarea existenţei optimului unei funcţii reale de o variabilã vectorialã.

Astfel, dacã prin grupãri convenabile în expresia funcţionalei pãtratice $H(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ se aduce această formã la o sumã de pãtrate cu coeficienţi pozitivi, funcţionala pãtraticã va fi pozitiv definitã.

Dacã însã, toţi coeficienţii vor fi negativi, funcţionala pãtraticã va fi negativ definitã.

2.2 Modificarea matricii unei funcţionale pătratice la schimbarea bazei

Se face la fel ca cea a unei funcţionale biliniare.

Dacă se schimbă baza $\mathcal{E}$ cu baza $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_n\}$ şi considerăm $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\det C \neq 0$,matricea de trecere de la baza $\mathcal{E}$ la baza $\mathcal{G}$ atunci $x_{\mathcal{E}} = Cx_{\mathcal{G}}$, deci:

$$H(x) = x_{\mathcal{E}}^t A x_{\mathcal{E}} = (Cx_{\mathcal{G}})^t ACx_{\mathcal{G}} = x_{\mathcal{G}}^t C^t ACx_{\mathcal{G}}$$

şi deci matricea ataşată lui H în baza $\mathcal{G}$ este:

$$B = C^t AC \tag{2.4}$$

Exercițiul 2.2.1 *Se dau formele pătratice de mai jos:*

$$\begin{array}{rcl} a)\ H & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ H(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \\ B)\ H & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ H(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2 \end{array}$$

în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^2 : \mathcal{E} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *şi respectiv* $\mathbb{R}^3, \mathcal{G} = \{g_1 = (1,0,0), g_2 = (0,1,0), g_3 = (0,0,1)\}$.
Să se scrie aceste forme în bazele $\mathcal{E}' = \{e_1' = 2e_1 - e_2, e_2' = e_1 + e_2\}$ *şi respectiv* $\mathcal{G}' = \{e_1' = 2e_1 - e_2 + e_3, e_2' = e_1 + e_2 + e_3, e_3' = e_1 + e_2 - 2e_3\}$

Soluţie: a) Matricea de trecere de la baza $\mathcal{E}$ la baza $\mathcal{E}'$ este:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui H în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

şi deci matricea ataşată lui H în baza $\mathcal{E}'$ este:

$$\begin{aligned} B &= C^t A C \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$H_{\mathcal{E}'}(x') = 7x_1^2 + x_1x_2 + 7x_2^2$.
b) Matricea de trecere de la baza $\mathcal{E}$ la baza $\mathcal{E}'$ este:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui H în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şi deci matricea ataşată lui H în baza $\mathcal{G}'$ este:

$$\begin{aligned} B &= C^t A C \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 13 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$H_{\mathcal{G}'}(x') = 11x_1^2 + 26x_1x_2 + 8x_1x_3 + 10x_2^2 + 14x_2x_3 - 5x_3^2$. ■

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

Index