Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 7

Cuprins

Capitolul 1

Funcţionale pătratice

1.1 Forma canonică a unei funcţionale pătratice

Definiţia 1.1.1 *O funcţională pătratică este dată sub* ***formă canonică*** *dacă:*

$$H(x) = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + ... + \lambda_n X_n^2 \tag{1.1}$$

sau dacă matricea ataşată lui H are forma diagonală:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

O bază în care funcţionala pătratică H poate fi scrisă sub formă canonică se numeşte ***bază canonică*** *pentru funcţionala pătratică H.*

Propoziţia 1.1.2 *Pentru orice funcţională pătratică H există o bază canonică $\mathcal{G}$ în care forma funcţionalei este:*

$$H(x) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + ... + \lambda_n \alpha_n^2 \tag{1.3}$$

unde $x_{\mathcal{G}} = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)^t$.

Demonstraţie: Fie $H : V \to \mathbb{R}$, $H \neq 0$ scrisă în baza $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ sub forma $H(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$.

Să presupunem că există un indice i astfel încât $a_{ii} \neq 0$.
Fie $i = 1$. Scriem separat toţi termenii care conţin pe x_1 : $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left[x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + ... + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right]$
$= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right]$
$= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right]$
$-a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$
$= a_{11}\left[\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right]$
$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2.$
Revenind la expresia lui H obţinem: $H(x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + ... + 2a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2$
$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + H_1(x)$
unde $H_1(x)$ este o expresie care nu conţine termenul x_1.
Facem transformarea:

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1 + \tfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\
&y_2 = x_2 \\
&.............................. \\
&y_n = x_n
\end{aligned} \tag{1.4}$$

şi obţinem:

$$H(x) = a_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + 2b_{23}y_2y_3 + ... + b_{nn}y_n^2$$

Aplicăm acelaşi procedeu lui $H_1(x)$ şi după n paşi se obţine forma canonică a funcţionalei.

Dacă suntem în situaţia în care $a_{ii} = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$ transformarea:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= y_n \end{aligned} \tag{1.5}$$

ne va conduce la:

$$H(x) = a_{12}\,(y_1 + y_2)\,(y_1 - y_2) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \geq 3}}^{n} a_{ij} y_i y_j = a_{12} y_1^2 - a_{12} y_2^2 + \sum_{i,j \geq 3}^{n} a_{ij} y_i y_j$$

şi se continuă ca mai sus. ∎

Exerciţiul 1.1.3 *Să se aducă la forma canonică funcţionala pătratică* $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$H(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$$

aplicând metoda lui Gauss.

Soluţie: În acest caz $a_{11} = 1 \neq 0$. Avem deci:

$$\begin{aligned} H(x) &= \left[x_1^2 - 2x_1(2x_2 - x_3) + (2x_2 - x_3)^2\right] - (2x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 2(x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2) \\ &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 2\left[(x_2 - x_3)^2 - 3x_3^2\right] \\ &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 2\,(x_2 - x_3)^2 + 6x_3^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, \end{aligned}$$

unde am pus:

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3; \quad y_2 = \sqrt{2}x_2 - x_3; \quad y_3 = \sqrt{6}x_3$$

∎

Exerciţiul 1.1.4 *Să se aducă la forma canonică funcţionala pătratică* $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$H(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

aplicând metoda lui Gauss.

Soluţie: În acest caz $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1,3}$. Vom face transformările (*1.5*)

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1 - y_2$$
$$x_3 = y_3$$

şi obţinem:

$$\begin{aligned} H(x) &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + y_3(y_1 + y_2) \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_3y_1 = y_1^2 + 2y_3y_1 - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 \end{aligned}$$

unde:

$$z_1 = y_1 + y_3; \quad z_2 = y_2; \quad z_3 = y_3$$

■

Teorema 1.1.5 *Fie V un spaţiu euclidian real sau complex, $\dim_K V = n$, şi $h : V \times V \to K$ o funcţională biliniară hermitică. Atunci există o bază $\mathcal{E}'$ în V astfel încât matricea ataşată lui h în baza $\mathcal{E}'$ să fie diagonală.*

Observaţia 1.1.6 *Dacă matricea asociată funcţionalei biliniare h în baza $\mathcal{E}'$ este matrice diagonală, adică:*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

atunci în această bază putem scrie:

$$h(x, x) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \overline{x_i}$$

iar forma canonică a funcţionalei pătratice h se va scrie:

$$H_1(x) = d_1 |x_1|^2 + d_2 |x_2|^2 + ... + d_n |x_n|^2 \tag{1.6}$$

Observaţia 1.1.7 *Baza $\mathcal{E}'$ este formată din vectorii proprii ai matricei A, iar $d_1, ..., d_n$ sunt valorile proprii ale lui A. Din această cauză metoda de mai sus de reducere a funcţionalelor pătratice la forma canonică se mai numeşte* ***metoda valorilor şi vectorilor proprii.***

1.2 Metoda valorilor şi vectorilor proprii de aducere la formă canonică a unei funcţionale pătratice

Fie $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţională pătratică.

1. Se determină matricea asociată funcţionalei pătratice. Fie ea A. Deci $H(x) = x^t Ax$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$;

2. Se calculează valorile proprii λ_i, $i = \overline{1,p}$, ale lui A, fiecare dintre ele cu multipli-
cităţile n_i şi se determină subspaţiile proprii corespunzătoare V_{λ_i} (deoarece A este simetrică, ea este diagonalizabilă şi $\dim_K V_{\lambda_i} = n_i$, $i = \overline{1,p}$);

3. Se ia câte o bază ortonormată în fiecare subspaţiu propriu V_{λ_i} (folosind eventual procedeul Gram-Schmidt);

4. Se formează matricea $M_n(\mathbb{R})$ în care pe coloane se pun vectorii proprii ai bazelor reunite ale spaţiilor V_{λ_i}, $i = \overline{1,p}$. Matricea M este ortogonală ($M = M^t$) şi în plus $M^{-1}AM = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) y = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$.

Analog se procedează pentru cazul complex.

Exerciţiul 1.2.1 *Să se aducă la forma canonică funcţionala pătratică:*

$$V(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Soluţie: Matricea asociată lui V este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii ale lui A sunt: $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 4$.
Avem $V_{\lambda_1} = \ker(A + 2I_3) = \tilde{v}_1$, unde $v_1 = (-2a, a, a)^t$, cu $a \neq 0$.
Normăm deci v_1şi obţinem:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Apoi $V_{\lambda_2} = \ker(A - 4I_3) = \{\tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$, unde $v_2 = (1,0,2)^t$, $v_3 = (0,1,-1)^t$. Ortonormând v_2, v_3 cu procedeul Gram-Schmidt, rezultă:

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

Avem astfel o bază ortonormală pentru $\mathbb{R}^3$ şi anume: $\{u_1, u_2, u_3\}$. Se formează matricea ortogonală:

$$M = (u_1 \mid u_2 \mid \ u_3) = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

Conform teoriei, $M^{-1}AM = diag(-2,4,4)$ şi prin transformarea liniară ortogonală $x = M \cdot y$ se obţine:

$$H(x_1, x_2, x_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

■

1.3 Metoda lui Jacobi de aducere la formă canonică a unei funcţionale pătratice

Teorema 1.3.1 *(**Metoda lui Jacobi**) Fie V un spaţiu euclidian real, $\dim_K V = n$, $\mathcal{B}$ o bază oarecare fixată în V : $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ iar $H : V \to \mathbb{R}$,*

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad \textit{unde} \ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_ib_i \quad \textit{şi} \quad a_{ji} = h(b_i, b_j)$$

este funcţionala pătratică asociată unei funcţionale biliniare simetrice h. Dacă toţi minorii principali ai matricei simetrice asociate lui H, $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= 1 \\
\Delta_1 &= a_{11} \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_n &= \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

sunt nenuli, atunci există baza canonică pentru H, $\mathcal{B}_1 = (b'_1, ..., b'_n)$ *a lui* V, *astfel încât* H *să aibă forma canonică:*

$$H(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2 \tag{1.8}$$

unde $(\xi_1, ..., \xi_n)$ *sunt coordonatele lui* x *în noua bază (* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i b'_i \in V$ *).*

Exerciţiul 1.3.2 *Fie funcţionala pătratică:*

$$H(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

scrisă în baza standard $(e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$. *Să se aducă la forma canonică funcţionala pătratică.*

Soluţie: *Aplicăm metoda Jacobi*: $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

cu $\begin{cases} \Delta_0 = 1; \\ \Delta_1 = 7; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38; \\ \Delta_3 = \det A = 162. \end{cases}$

Forma canonică a funcţionalei pătratice date este:

$$H(x) = \frac{1}{7}\xi_1^2 + \frac{7}{38}\xi_2^2 + \frac{19}{81}\xi_3^2$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3 sunt coordonatele lui x în noua bază $\mathcal{B}_1 = (b_1, b_2, b_3)$. ■

Observaţia 1.3.3 *Dacă $\Delta_1 = 0$ nu se poate aplica metoda Jacobi. Atunci facem o schimbare convenabilă de variabile (schimbând baza), astfel încât în noua matrice, $\Delta_1 \neq 0$, etc.*

Exemplul 1.3.4 *Considerăm funcţionala pătratică:*

$$f(x,x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Evident $\Delta_1 = 0$.
Facem o schimbare de variabilă a coordonatelor lui x:

$$\begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_1 \\ y_3 = x_2 \end{cases} \to f(x,x) = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2y_3, \text{ cu } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $f(x,x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + 4\xi_3^2$ - adică funcţionala pătratică este nedefinită.

Următoarea teoremă ne dă un criteriu pentru ca o funcţională pătratică să fie pozitiv definită, criteriu ce poate fi aplicat fără să mai aducem funcţionala pătratică la forma canonică.

Teorema 1.3.5 ***(Sylvester)*** *Funcţionala pătratică H este pozitiv definită dacă şi numai dacă toţi minorii principali ai matricei asociate lui H într-o bază oarecare sunt pozitivi ($\Delta_k > 0$,$(\forall)\, k = \overline{1,n}$).*

Din teorema lui Sylvester, trecând la $-H$, rezultă imediat un criteriu ca o funcţională pătratică să fie negativ definită. Avem deci:

i) Funcţionala patratică este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_k > 0\ (\forall)\, k = \overline{1,n}$;

ii) Funcţionala patratică este negativ definită $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_k > 0 & \text{pentru } k \ -\text{par} \\ \Delta_k < 0 & \text{pentru } k - \text{impar} \end{cases}$

Dacă $(\exists)\ \Delta_k = 0$, în cazul i) funcţionala pătratică este pozitiv semidefinită, iar în cazul ii) este negativ semidefinită;

iii) Când rapoartele

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}$$

sunt unele de semn pozitiv, altele de semn negativ, funcţionala patratică este nedefinită.

Exerciţiul 1.3.6 *Să se descrie funcţionala pătratică ataşată fiecareia dintre matricele următoare şi să se precizeze natura ei (pozitiv sau negativ definită, semidefinită, nedefinită).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$f_A(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ este nedefinită ($\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$);
$f_B(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ este pozitiv semidefinită ($\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$);
$f_C(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ este pozitiv definită ($\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$);
$f_D(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$ este negativ definită ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$).

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

Index