Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 8

Seminarul 8

Cuprins

Capitolul 3

Vectori liberi

3.1 Definiţii

Fie E_3 spaţiul punctual tridimensional al geometriei elementare şi $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat (figura 1).

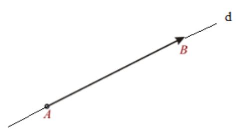


Fig. 1 [4],
modificata

Punctul A se numeşte originea, iar punctul B se numeşte extremitatea segmentului. În cazul când originea şi extremitatea coincid, se obţine segmentul orientat nul. Dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte dreapta suport a lui $\overrightarrow{AB}$ şi se notează cu AB. Această dreaptă este unic determinată numai dac $A \neq B$. Dreapta suport a segmentului orientat nul este nedeterminată. Două segmente orientate se numesc coliniare, dacă dreptele suport sunt egale; respectiv paralele, dacă dreptele suport sunt paralele. Lungimea (norma sau modulul) unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ se defineşte ca fiind lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanţa de la punctul A la punctul B. Un segment orientat are lungimea 0 dacă şi numai dacă el este segmentul nul.

Două segmente neorientate care au aceeaşi lungime se numesc segmente congruente.

Definiţia 3.1.1 *Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.*

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$, atunci vom scrie $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Se dovedeşte uşor că $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ implică $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ (figura 2).

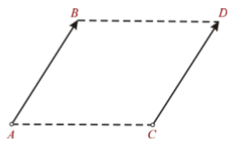


Fig. 2 [4],
modificata

Teorema 3.1.2 *Relaţia de echipolenţă pentru segmente orientate nenule este o relaţie de echivalenţă.*

Definiţia 3.1.3 *Clasele de echivalenţă ale segmentelor orientate relativ la relaţia de echipolenţă se numesc **vectori liberi**. Direcţia, sensul şi lungimea care sunt comune segmentelor orientate care definesc un vector liber se numesc direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber.*

Vectorii liberi vor fi notaţi cu litere mici ale alfabetului latin cu bară deasupra $\overline{a}$, $\overline{b}, \overline{c}, ...$, iar în desen vor fi reprezentaţi printr-unul dintre segmentele orientate echipolente care definesc clasa numită vector liber.

Vectorii liberi se mai noteazăşi prin $\overline{AB}$, $\overline{CD}, ..., .$

Dacă $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$ atunci spunem că $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al lui $\overline{AB}$.

Vom nota lungimea (norma) unui vector liber $\overline{a}$ sau $\overline{AB}$ cu $\|a\|$, $\left\|\overline{AB}\right\|$ sau $d(A, B)$.

Definiţia 3.1.4 *Se numeşte **versor** sau **vector unitate** un vector liber de lungime 1. Se numeşte **vector nul** vectorul liber care are lungimea 0.*

Observaţia 3.1.5 *Vectorul nul este reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AA}$ (în acest caz, direcţia şi sensul sunt nedeterminate).*
Doi vectori liberi ai căror reprezentanţi sunt echipolenţi sunt egali.

Definiţia 3.1.6 *Vectorii liberi care au aceeaşi direcţie se numesc **vectori coliniari**.*

Definiţia 3.1.7 *Vectorii liberi care au aceeaşi direcţie se numesc* ***vectori coliniari****.*

Definiţia 3.1.8 *Doi vectori coliniari care au aceeaşi lungime dar au sensuri opuse se numesc* ***vectori opuşi****. Opusul lui* $\overline{a}$ *îl vom nota cu* $-\overline{a}$ *(figura 3).*

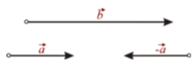


Fig. 3

Definiţia 3.1.9 *Trei vectori liberi se numesc* ***coplanari*** *dacă segmentele orientate reprezentative sunt paralele cu un plan dat (figura 4 [4]).*

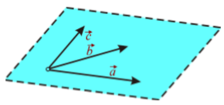


Fig. 4

Mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiul E_3 o vom nota cu V_3. Fixăm în E_3 un punct O, numit **origine**. La orice alt punct A din E_3 îi corespunde un vector şi numai unul $\overline{a} \in V_3$, al cărui reprezentant este $\overrightarrow{OA}$.

Reciproc, la orice vector $\overline{a}$ corespunde un punct şi numai unul A, astfel încât $\overrightarrow{OA}$ să reprezinte pe $\overline{a}$. Rezultă că mulţimile E_3 şi V_3 sunt în corespondenţă biunivocă, bijecţia fiind unic determinată prin fixarea originii O. Vectorul liber $\overline{a} = \overline{OA}$ se numeşte vectorul de poziţie al punctului A faţă de originea O.

3.2 Adunarea vectorilor liberi

Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori liberi iar $\overrightarrow{OA}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ doi reprezentanţi ai acestora.

Definiţia 3.2.1 *(**Regula triunghiului**) Definim* ***suma*** *vectorilori liberi* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *şi vom scrie acest lucru* $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ *sau* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, *ca fiind vectorul liber* $\overline{c}$ *reprezentat de segmentul orientat* $\overrightarrow{OB}$ *(figura 5 [4]).*

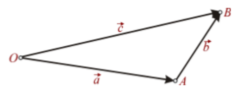


Fig. 5

Definiţia 3.2.2 *(**Regula paralelogramului**) Se desenează $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{AD} \in \overline{b}$ şi se fixează punctul C ca intersecţia dintre paralela la AB dusă prin D şi paralela la AD dusă prin B. Segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\overline{a} + \overline{b}$.*

Observaţia 3.2.3 *Vectoii liberi $\overline{a}, \overline{b}$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ sunt coplanari.*

Definiţia 3.2.4 *(**Regula poligonului strâmb**)Definim **suma a n** vectori liberi $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ cu $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{a_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2} \in \overline{a_1}, ..., \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \in \overline{a_n}$ ca fiind vectorul liber $\overline{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OA_n}$. Înmulţirea unui vector liber cu un scalar*

Fie $\mathbb{R}$ câmpul numerelor reale (câmpul scalarilor) şi $(V_3, +)$ grupul comutativ al vectorilor liberi. Vom introduce o lege de compoziţie externă, adică o funcţie definită pe $\mathbb{R} \times V_3$ cu valori în V_3, numită înmulţirea unui vector liber cu un scalar.

Definiţia 3.2.5 *Fie $k \in \mathbb{R}$ şi $\overline{a} \in V_3$. Prin $k \cdot \overline{a}$ înţelegem vectorul liber definit astfel:*
1) vectorul care are aceeaşi direcţie cu $\overline{a}$, acelaşi sens cu $\overline{a}$ şi lungimea $|k|||\overline{a}||$ atunci când $k > 0$, $\overline{a} \neq 0$ şi $k \neq 0$;
2) vectorul care are aceeaşi direcţie cu $\overline{a}$, sens contrar lui $\overline{a}$ şi lungimea $|k|||\overline{a}||$ atunci când $k < 0$, $\overline{a} \neq 0$ şi $k \neq 0$;
3) dacă $\overline{a} = 0$ sau $k = 0$ atunci $k \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

Observaţia 3.2.6 *Evident, $k \cdot \overline{a}$ este coliniar cu $\overline{a}$.*

Teorema 3.2.7 *Înmulţirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăţi:*
1) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$, $\overline{a} \in V_3$;
2) $m(n \cdot \overline{a}) = (mn) \cdot \overline{a}$, $(\forall)m, n \in \mathbb{R}$, $(\forall)\overline{a} \in V_3$;
3) distributivitatea faţă de adunarea scalarilor: $(m+n)\overline{a} = m\overline{a}+n\overline{a}$, $(\forall)m, n \in \mathbb{R}$, $(\forall)\overline{a} \in V_3$;
4) distributivitatea faţă de adunarea vectorilor: $k(\overline{a} + \overline{b}) = k \cdot \overline{a} + k \cdot \overline{b}$, $(\forall)k \in \mathbb{R}$, $(\forall)\overline{a}, \overline{b} \in V_3$.

Observaţia 3.2.8 $(V_3, +, \cdot)$ *formează un spaţiu vectorial real.*

Exerciţiul 3.2.9 *[15] Fie* $A_1, A_2, ..., A_n \in E_3$ *şi* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda \neq 0$. *Să se arate că punctul* P *este centru de greutate al sistemului de puncte* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *cu ponderile* $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ *dacă şi numai dacă* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{PA_i} = \bar{0}$. *Să se scrie relaţia pentru centrul de greutate al unui triunghi.*

Soluţie: Prin definiţie, punctul P este centru de greutate al sistemului de puncte $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ cu ponderile $\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ dacă şi numai dacă

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} A_i$$

Relaţia anterioară este însă echivalentă cu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} A_i - P &= \bar{0} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} (A_i - P) &= \bar{0} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \overline{PA_i} &= \bar{0} \end{aligned}$$

În cazul unui triunghi $A_1A_2A_3$, punctul P este centru de greutate dacă şi numai dacă

$$P = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$$

Prin urmare, ne aflăm în condiţiile din ipoteză, cu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. Ţinând cont de cele demonstrate mai sus, condiţia necesară şi suficientă ca punctul P să fie centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$ este:

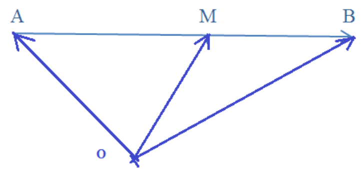
$$\overline{PA_1} + \overline{PA_2} + \overline{PA_3} = \bar{0}$$

■

Exercițiul 3.2.10 *[15]Punctul M împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul $k = \dfrac{m}{n}$. Să se demonstreze că $\forall O \in E_3$:*

$$\overline{OM} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$$

Soluție: Avem:

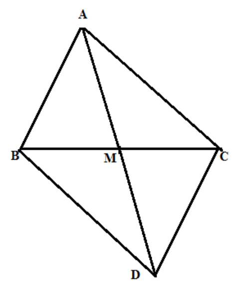


Din relația $\overline{AM} = \dfrac{m}{n}\overline{MB} \Rightarrow n\overline{AM} = m\overline{MB}$ relație echivalentă cu: $n\left(\overline{OM} - \overline{OA}\right) = m\left(\overline{OB} - \overline{OM}\right) \Leftrightarrow n\overline{OM} - n\overline{OA} = m\overline{OB} - m\overline{OM} \Leftrightarrow \overline{OM}\,(n+m) = n\overline{OA} + m\overline{OB}\ |: (n+m) \Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{n}{m+n}\overline{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overline{OB}$. ■

Exercițiul 3.2.11 *[15]Fie triunghiul $\triangle ABC$ și fie M mijlocul lui $\overline{BC}$. Atunci are loc relația vectorială a medianei:*

$$2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} \tag{3.1}$$

Soluție: Fie D simetricul punctului A față de M.

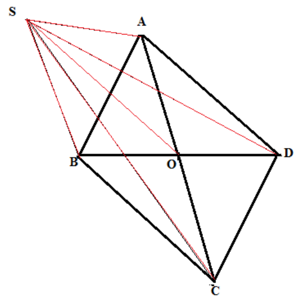


Evident avem $\overline{AD} = \overline{2AM}$. Deoarece în patrulaterul $ABDC$ diagonalele se înjumătățesc, rezultă că patrulaterul $ABDC$ este un paralelogram. Prin urmare, din regula paralelogramului, avem $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$, adică $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ ceea ce aveam de demonstrat. ■

Exercițiul 3.2.12 *[15]Fie $ABCD$ un paralelogram și fie O punctul de intersecție al diagonalelor sale. Fie S un punct arbitrar din spațiu. Atunci avem*

$$4\overline{SO} = \overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} + \overline{SD}.$$

Soluţie: Deoarece $ABCD$ este un paralelogram, rezultă că diagonalele se înjumătăţesc, adică $\|\overline{AO}\| = \|\overline{OC}\|$ şi $\|\overline{BO}\| = \|\overline{OD}\|$.



Aplicăm relaţia vectorială a medianei (3.1) în triunghiurile $\triangle SAC$ şi $\triangle SBD$ găsim

$$\begin{aligned} 2\overline{SO} &= \overline{SA} + \overline{SC} \\ 2\overline{SO} &= \overline{SB} + \overline{SD} \end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii rezultă egalitatea cerută. ■

Exerciţiul 3.2.13 *[15]Într-un cerc de centru O se consideră două coarde AMB şi CMD perpendiculare între ele. Să se demonstreze că*

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MO}$$

Soluţie: Ducem perpendiculare din centrul cercului pe cele două coarde.

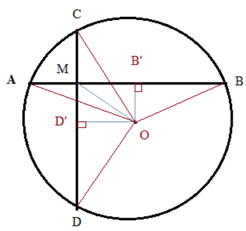


Figura 6

Fie $B\prime$ respectiv $D\prime$ punctele de intersecţie (vezi figura 6). Atunci

$$\begin{aligned} ||\overline{BB\prime}|| &= ||\overline{B\prime A}|| \\ ||\overline{DD\prime}|| &= ||\overline{CD\prime}|| \end{aligned}$$

Atunci conform relaţiei vectoriale a medianei (3.1) în triunghiurile $\triangle OCD$ şi $\triangle OAB$ găsim:

$$\begin{aligned} 2\overline{OD\prime} &= \overline{OC} + \overline{OD} \Rightarrow \overline{OD\prime} = \frac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2} \\ 2\overline{OB\prime} &= \overline{OA} + \overline{OB} \Rightarrow \overline{OB\prime} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} \end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\overline{OM} = \overline{OD\prime} + \overline{D\prime M}$$

Dar cum $OD\prime MB\prime$ dreptunghi, $\overline{D\prime M} = \overline{OB\prime}$ iar relaţia anterioară devine:

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{OD\prime} + \overline{OB\prime} = \frac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2} + \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} \\ 2\overline{OM} &= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} \\ 2\overline{MO} &= \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} \end{aligned}$$

■

3.3 Coliniaritate şi coplanaritate

Fie $(V_3, \mathbb{R})$ spaţiul vectorial real al vectorilor liberi. Noţiunile algebrice de subspaţiu vectorial, dependenţă şi independenţă liniară, bază şi dimensiune, coordonate, izomorfism de spaţii vectoriale, le presupunem cunoscute de la partea de algebră liniară.[4]

Teorema 3.3.1 *Fie $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ cu $\overline{a} \neq 0$, $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ coliniari. Atunci există şi este unic un număr real k astfel încât $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$.*

Teorema 3.3.2 *Vectorii $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ sunt coliniari dacă şi numai dacă ei sunt liniar dependenţi.*

Teorema 3.3.3 *Vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ sunt coplanari dacă şi numai dacă ei sunt liniar dependenţi.*

Observaţia 3.3.4 *Orice trei vectori liberi necoplanari sunt liniar independenţi.*

Teorema 3.3.5 *Spaţiul vectorial al vectorilor liberi din V_3 are dimensiunea 3.*

Exerciţiul 3.3.6 *[15]Fie A, B, C trei puncte afin independente. Să se arate că dacă punctele P şi Q împart vectorii $\overline{AB}$ şi respectiv $\overline{AC}$ în acelaşi raport, atunci vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari şi reciproc (**Teorema lui Thales**).*

Soluţie: " $\Rightarrow$" Să presupunem că $\overline{AP} = \rho\overline{AB}$ şi $\overline{AQ} = \rho\overline{AC}$, unde $\rho \neq 0$. Atunci avem

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \rho(\overline{AC} - \overline{AB}) = \rho\overline{BC}$$

Rezultă că vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt liniar dependenţi, adică coliniari.
"$\Leftarrow$" Reciproc, să presupunem că vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari, adică există $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ astfel încât $\overline{PQ} = \alpha\overline{BC}$. Totodată să considerăm vectorii

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \rho_1\overline{AB} \\ \overline{AQ} &= \rho_2\overline{AC} \end{aligned}$$

$\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Înlocuind pe $\overline{AQ}$ şi $\overline{AP}$ în relaţia

$$\overline{AQ} - \overline{AP} = \alpha(\overline{AC} - \overline{AB})$$

deducem că

$$(\alpha - \rho_1)\overline{AB} + (\rho_2 - \alpha)\overline{AC} = \bar{0}$$

În final, deoarece, din ipoteză, vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ sunt necoliniari (liniar independenţi), obţinem că

$$\begin{aligned} \rho_1 - \alpha &= \rho_2 - \alpha = 0 \\ \rho_1 &= \rho_2 = \alpha \end{aligned}$$

■

3.4 Proiecţia ortogonală a unui vector pe o dreaptă

Fie $d \in E_3$ o dreaptă, A şi $B \in E_3$ şi $\overline{a}$ un vector liber ce admite ca reprezentant vectorul $\overrightarrow{AB}$. Prin A şi B ducem planele π_1 respectiv π_2, perpendiculare pe d. Notăm cu $C = \pi_1 \cap d$ şi cu $D = \pi_2 \cap d$. Segmentul orientat $\overrightarrow{CE}$ reprezintă **proiecţia ortogonală** a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta d şi vom nota acest lucru prin $\pi_d(\overline{a})$ (figura 12).

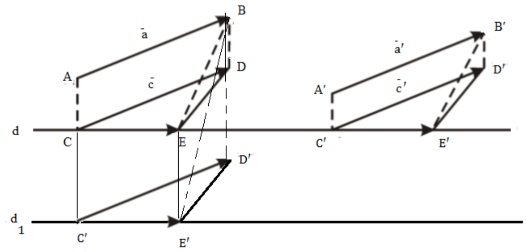


Figura 12 [4], modificata

Teorema 3.4.1 *Vectorul liber $\overline{c}$ nu depinde de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$, care reprezintă pe $\overline{a}$.*

Teorema 3.4.2 *Dacă d şi d_1 sunt două drepte paralele, atunci $\pi_d(\overline{a}) = \pi_{d_1}(\overline{a})$.*

Din teorema 3.4.1 rezultă că proiecţia ortogonală a unui vector liber $\overline{a}$ pe dreapta d depinde numai de direcţia lui d. Fie $\overline{v}$ un vector care dă direcţia lui d. Putem vorbi de proiecţia ortogonală a lui $\overline{a}$ pe $\overline{v}$, pe care o notăm cu $\pi_{\overline{v}}(\overline{a})$.

Fie $\overline{v}$ un vector liber iar $\overline{v_0}$ versorul său:

$$\overline{v} = \|\overline{v}\| \cdot \overline{v_0}$$

Vectorul $\pi_{\overline{v}}(\overline{a})$ este coliniar cu $\overline{v_0}$, deci există un număr real $pr_{\overline{v}}\overline{a}$ astfel încât: (figura 14).

$$\pi_{\overline{v}}(\overline{a}) = \overrightarrow{pr}_{\overline{v}}\overline{a} \cdot \overline{v_0}$$

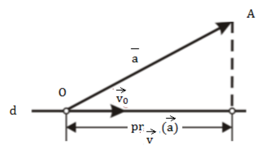


Figura 14 [4], modificata

Definiţia 3.4.3 *Numărul real* $\overrightarrow{pr}_{\overline{v}}\overline{a}$ *se numeşte mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale* $\pi_{\overline{v}}(\overline{a})$.

Definiţia 3.4.4 *Fie* $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ *cu reprezentanţii* $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}, \overrightarrow{OB} \in \overline{b}$. *Unghiul* $\varphi \in [0, \pi]$ *determinat de* $\overrightarrow{OA}$ *şi* $\overrightarrow{OB}$ *se numeşte* ***unghiul dintre vectorii*** $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *(figura 15).*

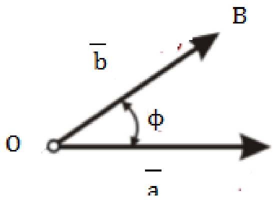


Figura 15 [4], modificata

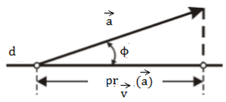


Figura 16 [4], modificata

Observaţia 3.4.5 *Definiţia unghiului nu depinde de punctul* O.
Dacă cel puţin unul dintre vectorii liberi $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *este 0, atunci unghiul* $\varphi \in [0, \pi]$ *dintre* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *este nedeterminat. Dacă* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ *atunci vectorii liberi* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *se numesc* ***ortogonali***. *Vectorul nul este ortogonal pe orice vector.*

Cu ajutorul noţiunii de unghi dintre doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{v}$ putem scrie pe $\overrightarrow{pr}_{\overline{v}}\overline{a}$ în funcţie de $\|\overline{a}\|$ şi de unghiul φ dintre $\overline{a}$ şi $\overline{v}$, anume $\overrightarrow{pr}_{\overline{v}}\overline{a} = \|\overline{a}\| \cos\varphi$ (figura 16).

Analog definirii proiecţiei ortogonale a unui vector pe o dreaptă putem vorbi despre proiecţia ortogonală a unui vector $\overline{a}$ pe un plan P. [4]

Fie P un plan şi $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$ un vector liber. Ducem prin A şi B drepte perpendiculare pe planul P şi notăm cu $A\prime$ şi $B\prime$ punctele în care aceste perpendiculare intersectează planul P (figura 17).

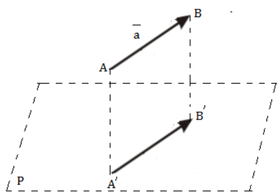


Figura 17

Se arată uşor că vectorul liber $\overline{A\prime B\prime}$ nu depinde de segmentul $\overrightarrow{AB}$ ci numai de $\overline{a}$. Din acest motiv, vectorul liber $\overline{A\prime B\prime}$ se numeşte **proiecţia ortogonală a unui vector $\overline{a}$ pe un plan** P şi se notează $\pi_P(\overline{a})$. Un vector liber are aceeaşi proiecţie pe două plane paralele, adică $\pi_P(\overline{a})$ depinde doar de $\overline{a}$ şi de spaţiul vectorial bidimensional ataşat lui P. Mai mult, se dovedeşte că proiecţia ortogonală a vectorilor liberi pe un plan este o transformare liniară.

3.5 Produs scalar

Fie V_3 spaţiul vectorilor liberi şi $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$. Notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Definiţia 3.5.1 *Aplicaţia*

$$< \cdot, \cdot >: V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$$

se numeşte ***produs scalar*** *al vectorilor* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *şi-l vom nota cu* $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ *:*

$$\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = \begin{cases} \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cdot \cos\varphi & \text{dacă } \overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0} \\ 0 & \text{dacă } \overline{a} = 0 \text{ sau } \overline{b} = \overline{0} \end{cases} \tag{3.2}$$

Observaţia 3.5.2 *Vectorii* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ *sunt perpendiculari (ortogonali) dacă şi numai dacă* $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = 0$.

Teorema 3.5.3 *Produsul scalar* $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ *are proprietăţile:*

$$\begin{array}{ll} 1. & \langle \overline{a}, \overline{a} \rangle \geq 0; \langle \overline{a}, \overline{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0} \\ 2. & \langle \overline{a} + \overline{b}, \overline{c} \rangle = \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle + \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle \\ 3. & \langle \lambda \cdot \overline{a}, \overline{c} \rangle = \lambda \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle \\ 4. & \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = \langle \overline{b}, \overline{a} \rangle \end{array} \tag{3.3}$$

$(\forall)\, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ *şi* $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$

Observaţia 3.5.4 *Din definiţia spaţiului prehilbertian şi din teorema anterioară tragem concluzia că V_3 este un spaţiu vectorial euclidian.*
Dacă se cunoaşte $\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle$ putem determina lungimea lui $\overline{a}$ din relaţia:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle}$$

Observaţia 3.5.5 *Fie $\{\overline{\imath}, \overline{\jmath}, \overline{k}\}$ o bază în V_3 şi $\overline{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\overline{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$. Atunci*

$$\begin{aligned} \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle &= \langle a_1\overline{\imath} + a_2\overline{\jmath} + a_3\overline{k}, b_1\overline{\imath} + b_2\overline{\jmath} + b_3\overline{k} \rangle = a_1 b_1 \langle \overline{\imath}, \overline{\imath} \rangle + a_1 b_2 \langle \overline{\imath}, \overline{\jmath} \rangle + a_1 b_3 \langle \overline{\imath}, \overline{k} \rangle + a_2 b_1 \langle \overline{\jmath}, \overline{\imath} \rangle \\ &+ a_2 b_2 \langle \overline{\jmath}, \overline{\jmath} \rangle + a_2 b_3 \langle \overline{\jmath}, \overline{k} \rangle + a_3 b_1 \langle \overline{k}, \overline{\imath} \rangle + a_3 b_2 \langle \overline{k}, \overline{\jmath} \rangle + +a_3 b_3 \langle \overline{k}, \overline{k} \rangle \end{aligned}$$

Deci produsul scalar $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ este complet determinat dacă se cunosc produsele scalare din tabelul de mai jos:

$\langle , \rangle$	$\overline{\imath}$	$\overline{\jmath}$	$\overline{k}$
$\overline{\imath}$	$\langle \overline{\imath}, \overline{\imath} \rangle$	$\langle \overline{\imath}, \overline{\jmath} \rangle$	$\langle \overline{\imath}, \overline{k} \rangle$
$\overline{\jmath}$	$\langle \overline{\jmath}, \overline{\imath} \rangle$	$\langle \overline{\jmath}, \overline{\jmath} \rangle$	$\langle \overline{\jmath}, \overline{k} \rangle$
$\overline{k}$	$\langle \overline{k}, \overline{\imath} \rangle$	$\langle \overline{k}, \overline{\jmath} \rangle$	$\langle \overline{k}, \overline{k} \rangle$

Cel mai simplu pentru a calcula produsele din acest tabel ar fi atunci când baza $\{\overline{\imath}, \overline{\jmath}, \overline{k}\}$ este ortonormată deoarece produsele scalare ar fi toate 0 în afară de $\langle \overline{\imath}, \overline{\imath} \rangle, \langle \overline{\jmath}, \overline{\jmath} \rangle, \langle \overline{k}, \overline{k} \rangle$ care sunt 1. Deci dacă $\{\overline{\imath}, \overline{\jmath}, \overline{k}\}$ este ortonormată avem:

$\langle , \rangle$	$\overline{\imath}$	$\overline{\jmath}$	$\overline{k}$
$\overline{\imath}$	1	0	0
$\overline{\jmath}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

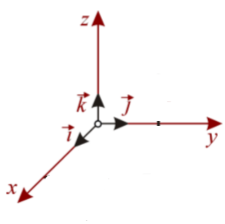


Figura 18 [4]

Baza ortonormată $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ o vom numi **bază canonică** iar coordonatele unui vector liber $\overline{a}$ scris în baza canonică le vom numi **coordonate euclidiene**.

$$\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{3.4}$$

Coordonatele euclidiene ale vectorului $\overline{a}$ sunt de fapt proiecţiile ortogonale ale lui $\overline{a}$ pe cele trei axe de coordonate (Figura 18). Din produsul scalar obţinem norma vectorului $\overline{a}$:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{3.5}$$

Din ecuaţia (3.2) obţinem formula pentru determinarea unghiului dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ ca fiind:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}{\|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{3.6}$$

3.6 Produs vectorial

Fie V_3 spaţiul vectorilor liberi şi $\overline{a}, \overline{b} \in V_3, \overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$. Notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Definiţia 3.6.1 *Aplicaţia:* $\times : V_3 \times V_3 \to V_3$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{cases} \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cdot \sin\varphi \cdot \overline{e} & \textit{dacă } \overline{a}, \overline{b} \textit{ necoliniari} \\ \overline{0} & \textit{dacă } \overline{a}, \overline{b} \textit{ coliniari} \end{cases} \tag{3.7}$$

*unde $\overline{e}$ este un versor perpendicular pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se numeşte **produs vectorial** dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ cu sensul dat de regula mâinii drepte (adică rotim pe $\overline{a}$ peste $\overline{b}$) pentru tripletul $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{e})$ (figura 19).*

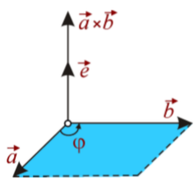


Figura 19 [4]

Teorema 3.6.2 *Produs vectorial dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ au următoarele proprietăţi:*

$$\begin{array}{ll} 1. & \overline{a}\times\overline{0}=\overline{0}, \overline{a}\times\overline{a}=0; (\forall)\,\overline{a}\in V_3 \\ 2. & \overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}\ ; (\forall)\,\overline{a},\overline{b}\in V_3 \\ 3. & \lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\left(\lambda\overline{b}\right)\ ; (\forall)\,\lambda\in\mathbb{R} \\ 4. & \overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}; (\forall)\,\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V_3 \end{array} \tag{3.8}$$

Dacă $\left\{\overline{\imath},\overline{\jmath},\overline{k}\right\}$ este baza canonică iar $\overline{a}=a_1\overline{\imath}+a_2\overline{\jmath}+a_3\overline{k}$, $\overline{b}=b_1\overline{\imath}+b_2\overline{\jmath}+b_3\overline{k}$, $\overline{a},\overline{b}\in V_3$ atunci folosind definiţia produsului vectorial şi proprietaţile (3.8)

$$\overline{a}\times\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{3.9}$$

$$\begin{array}{|c|ccc|} \hline \times & \overline{\imath} & \overline{\jmath} & \overline{k} \\ \hline \overline{\imath} & \overline{0} & \overline{k} & -\overline{\jmath} \\ \overline{\jmath} & -\overline{k} & \overline{0} & \overline{\imath} \\ \overline{k} & \overline{\jmath} & -\overline{\imath} & \overline{0} \\ \hline \end{array} \tag{3.10}$$

care conduce la expresia canonică a produsului vectorial:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\overline{\imath}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\overline{\jmath}\ +\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\overline{k} \tag{3.11}$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{\imath} & \overline{\jmath} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Exerciţiul 3.6.3 *Se consideră vectorul $\overline{v}=-\overline{i}+\alpha\overline{j}+\beta\overline{k}$, unde α, $\beta\in\mathbb{R}$.*
a) Să se determine α şi β astfel încât v să fie perpendicular pe vectorii $\overline{a}=-\overline{i}+4\overline{j}+2\overline{k}$ şi $\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$.
b) Cu α şi β determinaţi la punctul a) să se afle unghiul dintre vectorii $\overline{v}$ şi $\overline{a}+\overline{b}$.

Soluţie: a) Vectorul $\overline{v}$ este perpendicular pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ dacă şi numai dacă $\overline{v}$ este coliniar cu produsul vectorial $\overline{a}\times\overline{b}$. Conform relaţiei (3.10) avem:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{\imath} & \overline{\jmath} & \overline{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=14\overline{\imath}+4\overline{\jmath}-\overline{k}$$

Pentru ca $\bar{v}$ să fie coliniar cu produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ trebuie ca

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \rho\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \\ -\bar{i} + \alpha\bar{j} + \beta\bar{k} &= \rho\left(14\bar{\imath} + 4\bar{j} - \bar{k}\right) \end{aligned}$$

cu $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Obţinem sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 14\rho = -1 \\ \alpha - 4\rho = 0 \\ \beta + \rho = 0 \end{cases}$, cu soluţia: $\alpha = -\frac{2}{7}, \beta = \frac{1}{14}, \rho = -\frac{1}{14}$.

b) Conform relaţiei (3.6) avem:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\left\langle \bar{v}, \bar{a} + \bar{b} \right\rangle}{\|\bar{v}\| \cdot \left\|\bar{a} + \bar{b}\right\|} \\ \bar{a} + \bar{b} &= \bar{j} + 4\bar{k} \\ \cos\varphi &= \frac{1 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) + 4 \cdot \frac{1}{14}}{\sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{14}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 4^2}} \\ \cos\varphi &= 0 \\ \varphi &\in \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

deci $\bar{v} \perp \bar{a} + \bar{b}$. ■

Definiţia 3.6.4 *Vectorul* $\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$ *se numeşte dublu produs vectorial al vectorilor* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Exprimând pe $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ în baza ortonormată $\left\{\bar{\imath}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ şi folosind expresiile canonice ale produsului scalar şi vectorial, se poate arăta că:

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \, \bar{b} - \left\langle \bar{a}, \bar{b} \right\rangle \bar{c} \tag{3.13}$$

Observaţia 3.6.5 *1)* $\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) \neq \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \times \bar{c}$ *;*
2) Produsul vectorial dublu se poate scrie sub forma determinantului simbolic:

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ \left\langle \bar{a}, \bar{b} \right\rangle & \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Propoziţia 3.6.6 *Dacă notăm cu* $\bar{d} = \bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$ *dublu produs vectorial al vectorilor* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *atunci* $\bar{d}$ *este coplanar cu* $\bar{b}$ *şi* $\bar{c}$.

(figura 20).

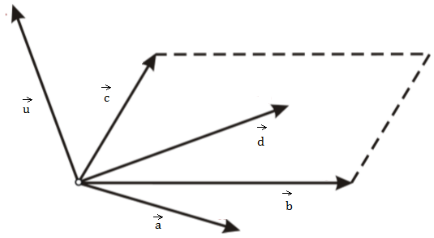


Figura 20 [4], modificata

Exerciţiul 3.6.7 *[15]Fie vectorii* $\bar{a} = \bar{m} + 2 \cdot \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3 \cdot \bar{n}$, *unde* $\|\bar{m}\| = 5$, $\|\bar{n}\| = 3$, $\measuredangle(m, n) = \dfrac{\pi}{2}$. *Să se calculeze:*
a) lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$*;*
b) unghiul dintre diagonale;
c) aria paralelogramului determinat de $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$*.*

Soluţie: a) Diagonalele paralelogramului construit pe $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt determinate de vectorii $\bar{a} + \bar{b}$ şi $\bar{a} - \bar{b}$. Prin urmare, din ecuaţia (3.5) obţinem:

$$\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\| = \sqrt{\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b} \rangle}$$

Dar $\bar{a} + \bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$ prin urmare

$$\begin{aligned} \left\|\bar{a} + \bar{b}\right\| &= \sqrt{\langle 2\bar{m} - \bar{n}, 2\bar{m} - \bar{n} \rangle} = \sqrt{(2\bar{m} - \bar{n})^2} \\ &= \sqrt{4\|\bar{m}\|^2 - 4\|\bar{m}\|\|\bar{n}\| + \|\bar{n}\|^2} = \sqrt{4\|\bar{m}\|^2 + \|\bar{n}\|^2} \\ &= \sqrt{109} \end{aligned}$$

deoarece $\measuredangle(m, n) = \dfrac{\pi}{2}$ iar aceasta este echivalent cu $\langle \overline{m}, \overline{n} \rangle = 0$.
Analog: $\bar{a} - \bar{b} = 5\bar{n}$ prin urmare

$$\begin{aligned} \left\|\bar{a} - \bar{b}\right\| &= \sqrt{\langle 5\bar{n}, 5\bar{n} \rangle} = \sqrt{(5\bar{n})^2} \\ &= \sqrt{25\|\bar{n}\|^2} = 15 \end{aligned}$$

b) Deoarece avem $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left(\bar{a}-\bar{b}\right)=(2\bar{m}-\bar{n})\cdot(5\bar{n})=10\bar{m}\bar{n}-5\bar{n}^2=-5*9=-45$, rezultă că unghiul dintre diagonale este, conform ecuaţiei (3.5):

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\left\langle \bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}\right\rangle}{\left\|\bar{a}+\bar{b}\right\|\cdot\left\|\bar{a}-\bar{b}\right\|}=\frac{(2\bar{m}-\bar{n})\,(5\bar{n})}{\sqrt{109}\cdot 15}\\ &= \frac{-3}{\sqrt{109}}\end{aligned}$$

d) Aria paralelogramului este

$$\|\bar{a}\|\cdot\left\|\bar{b}\right\|\cdot\sin\theta=\sqrt{61}\cdot\sqrt{106}\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

deoarece:

$$\begin{aligned}\|\bar{a}\| &= \sqrt{\langle\bar{a},\bar{a}\rangle}=\sqrt{(\bar{m}+2\cdot\bar{n})^2}\\ &= \sqrt{\|\bar{m}\|^2+4\,\|\bar{m}\|\,\|\bar{n}\|+4\,\|\bar{n}\|^2}=\sqrt{25+36}\\ &= \sqrt{61}.\\ \left\|\bar{b}\right\| &= \sqrt{\left\langle\bar{b},\bar{b}\right\rangle}=\sqrt{(\bar{m}-3\cdot\bar{n})^2}\\ &= \sqrt{\|\bar{m}\|^2-6\,\|\bar{m}\|\,\|\bar{n}\|+9\,\|\bar{n}\|^2}=\sqrt{25+81}\\ &= \sqrt{106}.\\ \sin\frac{\pi}{2} &= 1\end{aligned}$$

■

3.7 Produs mixt

Fie V_3 spaţiul vectorilor liberi şi $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V_3$.

Definiţia 3.7.1 *Se numeşte produs mixt al vectorilor* $\overline{a},\overline{b},\bar{c}$ *numărul:*

$$\left\langle\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\rangle=\left\langle\overline{a},\overline{b}\times\overline{c}\right\rangle \tag{3.15}$$

Modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului care se poate construi pe suporturile reprezentanţilor vectorilor $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ ce au originea comună (am presupus că $\overline{a},\overline{b},\bar{c}$ sunt necoplanari) (figura 21).

Într-adevăr, fie θ unghiul dintre vectorii $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ şi fie φ unghiul dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{u} = \overline{b} \times \overline{c}$, atunci conform ecuaţiilor (3.2) şi (3.7) avem:

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle &= \langle \overline{a}, \overline{u} \rangle = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{u}\| \cdot \cos\varphi = \|\overline{a}\| \cdot \left\|\overline{b} \times \overline{c}\right\| \cdot \cos\varphi \\ &= \|\overline{a}\| \cdot \left(\left\|\overline{b}\right\| \cdot \|\overline{c}\| \cdot \sin\theta\right) \cdot \cos\varphi \\ &= \underbrace{\|\overline{a}\| \cdot \cos\varphi}_{inaltimea} \cdot \underbrace{\left(\left\|\overline{b}\right\| \cdot \|\overline{c}\| \cdot \sin\theta\right)}_{aria} \\ &= volumul\ paralelipipedului \end{aligned} \tag{3.16}$$

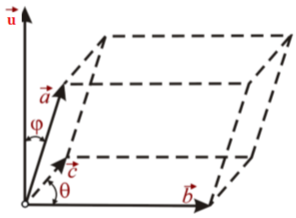


Figura 21 [4]

Observaţia 3.7.2 *Dacă* $\left\{\overline{\imath}, \overline{\jmath}, \overline{k}\right\}$ *este baza canonică iar* $\overline{a} = a_1\overline{\imath} + a_2\overline{\jmath} + a_3\overline{k}$ *,* $\overline{b} = b_1\overline{\imath} + b_2\overline{\jmath} + b_3\overline{k}$ *,* $\overline{c} = c_1\overline{\imath} + c_2\overline{\jmath} + c_3\overline{k}$ *,* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ *atunci:*

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

Teorema 3.7.3 *Produsul mixt are următoarele proprietăţi:*

1. $\left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{c}, \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = \left\langle \overline{b}, \overline{c}, \overline{a} \right\rangle$;
2. $\left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = -\left\langle \overline{b}, \overline{a}, \overline{c} \right\rangle$;
3. $\left\langle \overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{a_1}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle + \left\langle \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle$;
4. $\left\langle k \cdot \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{a}, k \cdot \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{a}, \overline{b}, k \cdot \overline{c} \right\rangle$;
5. $\left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = 0$ *dacă şi numai dacă:*

a) *cel puţin unul dintre vectorii* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *este nul*;

b) *doi dintre vectori sunt coliniari;*

c) *vectorii* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *sunt coplanari.*

6. $\left\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d} \right\rangle = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{d} \rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{d} \rangle \end{vmatrix}$ *identitatea Lagrange.*

Definiţia 3.7.4 *Prin determinant Gram al vectorilor* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *înţelegem numărul:*

$$G = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{a} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{a} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{b} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle \\ \langle \overline{c}, \overline{a} \rangle & \langle \overline{c}, \overline{b} \rangle & \langle \overline{c}, \overline{c} \rangle \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

Propoziţia 3.7.5 *Vectorii* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul lor Gram este nul.*

Exerciţiul 3.7.6 *[15] Să se demonstreze relaţia:*

$$\left\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{b} \times \overline{c}, \overline{c} \times \overline{a} \right\rangle = \left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle^2$$

Dacă $\overline{a} \times \overline{b}, \overline{b} \times \overline{c}, \overline{c} \times \overline{a}$ *sunt coplanari, atunci ei sunt şi coliniari.*

Soluţie: Utilizând formula dublului produs vectorial (3.13)

$$\overline{a} \times \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) = \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle \, \overline{b} - \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle \overline{c}$$

obţinem relaţia:

$$\left(\overline{b} \times \overline{c}\right) \times \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) = \left\langle \left(\overline{b} \times \overline{c}\right), \overline{a} \right\rangle \overline{c} - \left\langle \left(\overline{b} \times \overline{c}\right), \overline{c} \right\rangle \overline{a} = \left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle \overline{c}$$

Folosind acum şi definiţia produsului mixt (3.15)

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left\langle \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} \right\rangle$$

deducem că:

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a}\right\rangle &= \left\langle \overline{a}\times\overline{b},\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\times\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\right\rangle = \left\langle \overline{a}\times\overline{b},\left\langle \overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\rangle\overline{c}\right\rangle \\ &= \left\langle \overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\rangle\left(\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\overline{c}\right) = \left\langle \overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\rangle^2\end{aligned}$$

Din relaţia anterioară deducem că dacă $\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a}$ sunt coplanari, atunci $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ sunt coplanari. Prin urmare, $\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a}$ sunt şi coliniari. ■

Exerciţiul 3.7.7 *[15] Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{v}_1=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{v}_2=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{v}_3=\lambda\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, să fie coplanari şi să se găsească relaţia de dependenţă liniară.*

Soluţie: Condiţia de coplanaritate este: $\langle\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\rangle=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ \lambda & -1 & 1\end{vmatrix}=0.$ Rezultă $\lambda=-3$. Pentru a găsi relaţia de dependenţă liniară, se determină α şi β din egalitatea $\bar{v}_3=\alpha\bar{v}_1+\beta\bar{v}_2 \Leftrightarrow \lambda\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}=\alpha\left(\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}\right)+\beta\left(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}\right)$ $\Rightarrow \alpha=\beta=-1$. În concluzie, relaţia de dependenţă liniară este $\bar{v}_3=-\bar{v}_1-\bar{v}_2$. ■

Exerciţiul 3.7.8 *[15] Să se calculeze aria şi înălţimea din A pentru triunghiul $\triangle ABC$ determinat de punctele $A(0,1,0)$, $B(2,0,1)$, $C(-1,0,-4)$.*

Soluţie: Punctele A, B şi C determină vectorii

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB}-\overline{OA}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}\\ \overline{AC} &= \overline{OC}-\overline{OA}=-\bar{i}-\bar{j}-4\bar{k}\\ \overline{BC} &= \overline{OC}-\overline{OB}=-3\bar{i}-5\bar{k}\end{aligned}$$

Produsul vectorial al vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ este conform relaţiei (3.10):

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -4\end{vmatrix}=5\bar{i}+7\bar{j}-3\bar{k}$$

Prin urmare, aria triunghiului $\triangle ABC$ este dată de formula:

$$Aria_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{83}$$

Înălţimea din A se determină din relaţia:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} h_A \left\| \overline{BC} \right\| \\ h_A &= \frac{2S_{ABC}}{\left\| \overline{BC} \right\|} = \sqrt{\frac{83}{34}} \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 3.7.9 *[15]Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$ şi înălţimea din A a acestuia, unde A(3, 2,-1) , B (4, 3,-1) , C (5, 3,-1) , D(4, 2, 1).*

Soluţie: Punctele A, B, C şi D determină vectorii

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} \\ \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} \\ \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = \bar{\imath} + 2\bar{k} \end{aligned}$$

Produsul mixt al vectorilor $\overline{AB}, \overline{AC}$ şi $\overline{AD}$ este

$$\langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Prin urmare, volumul tetraedrului $ABCD$ este dat de formula

$$Vol_{ABCD} = \frac{1}{6} \langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle = \frac{1}{3}.$$

Produsul vectorial al vectorilor $\overline{BC}$ şi $\overline{BD}$ este conform relaţiei (3.10):

$$\overline{BC} \times \overline{BD} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar{\imath} - \bar{k}$$

şi deci, aria triunghiului $\triangle BCD$ este:

$$Aria_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \left\| \overline{BC} \times \overline{BD} \right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Înălţimea din A a tetraedrului ABCD se determină din relaţia

$$\begin{aligned} Vol_{ABCD} &= \frac{1}{3} h_A Aria_{\triangle BCD} \\ h_A &= \frac{3Vol_{ABCD}}{Aria_{\triangle BCD}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

■

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

[15] Stoica, E., Neagu, M., Algebră liniară, *geometrie analitică şi diferenţială*, Culegere de probleme.

Index