Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 9

Cuprins

Capitolul 3

Ecuaţia planului în spaţiu

În E_3 un plan poate fi determinat astfel:

1) un punct şi un vector nenul normal la plan;

2) un punct şi doi vectori necoliniari;

3) trei puncte necoliniare;

4) o dreaptă şi un punct nesituat pe dreaptă;

5) două drepte concurente;

6) două drepte paralele.

Ne propunem să stabilim ecuaţia sub formă vectorială, carteziană sau normală a planului în condiţiile de mai sus.

3.1 Planul determinat de un punct şi un vector normal la plan

Considerăm vectorul nenul $\bar{n}\,(l, m, n)$, dreapta D ce trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi care are direcţia vectorului $\bar{n}$. În aceste condiţii există un singur plan P

perpendicular pe D în punctul M_1. (figura 6).

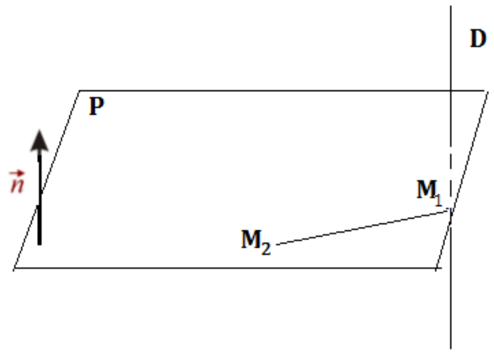

Figura 6

Definiţia 3.1.1 *D se numeşte normala la planul P, iar vectorul $\bar{n}$ se numeşte vectorul normal al planului P.*

Ecuaţia carteziană a planului ce trece prin M_1 şi este perpendicular pe $\bar{n}$ este:

$$l\,(x - x_1) + m\,(y - y_1) + n\,(z - z_1) = 0 \tag{3.1}$$

Într-adevăr, ecuaţia lui D va fi:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{3.2}$$

cu $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$.

Punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ aparţine planului P dacă $\overline{M_1M_2}$ este perpendicular pe vectorul normal$\Leftrightarrow \left\langle \overline{M_1M_2}, \bar{n} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow l\,(x - x_1) + m\,(y - y_1) + n\,(z - z_1) = 0$.

Reciproc, se poate arăta că, orice ecuaţie de forma $lx + my + nz + p = 0$ reprezintă un plan.

Observaţia 3.1.2 *a) Dacă ecuaţiile planelor diferă doar prin termenul liber, atunci acele plane sunt paralele, iar ecuaţia*

$$lx + my + nz + p = 0, p \in \mathbb{R}$$

reprezintă familia planelor paralele din spaţiu cu normala $\bar{n}\,(l, m, n)$.

b) Dacă ecuaţiile planelor au termenul liber egal cu zero, atunci ele conţin originea O.

Plane particulare

1. Planul de ecuaţie $z = n$ este un plan paralel cu xOy. Pentru $n = 0$ obţinem chiar ecuaţia planului xOy.
2. Planul de ecuaţie $x = m$ este un plan paralel cu yOz. Pentru $m = 0$ obţinem chiar ecuaţia planului yOz.
3. Planul de ecuaţie $y = l$ este un plan paralel cu xOz. Pentru $l = 0$ obţinem chiar ecuaţia planului xOz.
4. Planul de ecuaţie $mx + ny + p = 0$ este un plan perpendicular pe xOy.
5. Planul de ecuaţie $ny + lz + p = 0$ este un plan perpendicular pe yOz.
6. Planul de ecuaţie $mx + lz + p = 0$ este un plan perpendicular pe xOz.
7. Planul de ecuaţie $by + lz = 0$ este un plan care trece prin Ox.
8. Planul de ecuaţie $mx + lz = 0$ este un plan perpendicular pe Oy.
9. Planul de ecuaţie $mx + ny = 0$ este un plan perpendicular pe Oz.
10. Planul de ecuaţie $mx + ny + lz = 0$ este un plan care trece prin originea O.

3.2 Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari

Ne propunem să determinăm ecuaţia planului determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi de doi vectori necoliniari $\bar{u} = l_1\bar{\imath}+m_1\bar{\jmath}+n_1\bar{k}$ şi $\bar{v} = l_2\bar{\imath}+m_2\bar{\jmath}+n_2\bar{k}$, $P : (M, \bar{u}, \bar{v})$. (vezi figura 7).

$\bar{u}$ şi $\bar{v}$ necoliniari este echivalent cu condiţia: $\bar{u} \times \bar{v} \neq 0$.

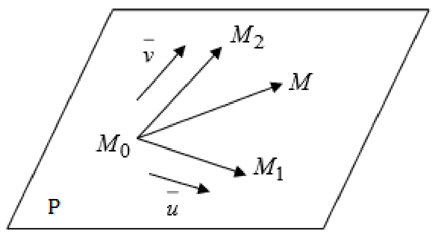

Figura 7

Fie $\overrightarrow{M_0M_1}$ un reprezentant al lui $\bar{u}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ un reprezentant al lui $\bar{v}$.

Punctul M aparţine planului P dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_2}$ sunt coplanari.

Faptul că aceşti trei vectori sunt coplanari se poate exprima în două moduri:

a) folosind regula paralelogramului de adunare:

$$\overrightarrow{M_0M} = k_1 \cdot \overrightarrow{M_0M_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{M_0M_2}$$

unde $k_1 \in \mathbb{R}$ şi $k_2 \in \mathbb{R}$ sunt unic determinaţi. Relaţia de mai înainte o scriem sub forma:

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v}$$

De aici deducem:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + k_1 \cdot \bar{u} + k_2 \cdot \bar{v}$$

numită *ecuaţia parametrică vectorială a planului* P şi:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 \\ y &= y_0 + k_1 \cdot m_1 + k_2 \cdot m_2 \\ z &= z_0 + k_1 \cdot n_1 + k_2 \cdot n_2 \end{aligned}$$

numite *ecuaţiile parametrice ale planului* P.

b) $\overrightarrow{M_0M}$ este perpendicular pe $\bar{u} \times \bar{v}$, adică:

$$\langle \bar{r} - \bar{r}_0, \bar{u} \times \bar{v} \rangle = 0$$

numită *ecuaţia vectorială a planului* P.Pe de altă parte $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\,\bar{\imath} + (y - y_0)\,\bar{\jmath} + (z - z_0)\,\bar{k}$ deci conform relaţiei (**??**) ecuaţia precedentă devine:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

numită *ecuaţia carteziană a planului P.*

3.3 Planul determinat de trei puncte necoliniare

Ne propunem să obţinem ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1,3}$, din E_3, $\bar{r}_i = x_i\bar{\imath} + y_i\bar{\jmath} + z_i\bar{k}$, $i = \overline{1,3}$, reprezentat în figura

8 şi pe care-l notăm $P:(M_1,M_2,M_3)$.

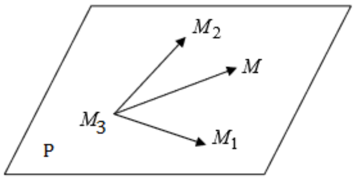

Figura 8

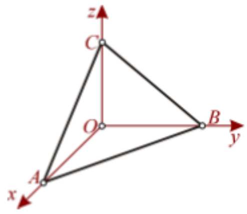

Figura 9 [4]

Să considerăm un punct M , $\bar{r}=x\bar{\imath}+y\bar{j}+z\bar{k}$, care generează planul. Condiţia de coplanaritate a vectorilor $\overrightarrow{M_3M}$ şi $\overrightarrow{M_3M_1},\overrightarrow{M_3M_2}$ este chiar ecuaţia vectorială a planului: $\left\langle\overline{M_3M},\overline{M_3M_1}\times\overline{M_3M_2}\right\rangle=0$. Dacă scriem această relaţie cu ajutorul vectorilor de poziţie, obţinem:

$$\langle\bar{r}-\bar{r}_3,\bar{r}_1-\bar{r}_3\times\bar{r}_2-\bar{r}_3\rangle=0$$

numită *ecuaţia parametrică vectorială a planului P.* Pe de altă parte

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_3M}&=(x-x_3)\,\bar{\imath}+(y-y_3)\,\bar{j}+(z-z_3)\,\bar{k}\\ \overrightarrow{M_3M_1}&=(x_1-x_3)\,\bar{\imath}+(y_1-y_3)\,\bar{j}+(z_1-z_3)\,\bar{k}\\ \overrightarrow{M_3M_2}&=(x_2-x_3)\,\bar{\imath}+(y_2-y_3)\,\bar{j}+(z_2-z_3)\,\bar{k}\end{aligned}$$

deci conform relaţiei (**??**) ecuaţia precedentă devine

$$\begin{vmatrix}x-x_3&y-y_3&z-z_3\\x_1-x_3&y_1-y_3&z_1-z_3\\x_2-x_3&y_2-y_3&z_2-z_3\end{vmatrix}=0$$

numită *ecuaţia carteziană a planului P.*

Pe de altă parte, condiţia de coplanaritate a punctelor $M_i(x_i,y_i,z_i),i=\overline{1,3}$ şi M, se mai poate scrie folosindu-ne de ecuaţia generală a planului şi ecuaţiile obinute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în ecuaţia generală, ca ecuaţii în necunoscutele a, b, c şi d. Rezultă sistemul liniar omogen:

$$P : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

Acesta are soluţie nebanală întrucât a, b şi c nu pot fi toţi nuli. Adică:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care este chiar *ecuaţia carteziană a planului P*.

Ca un caz particular, găsim ecuaţia planului prin tăieturi (figura 9 [4]). Dacă tăieturile sunt $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ şi $C(0, 0, c)$, atunci ecuaţia planului (ABC) este:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

3.4 Planul determinat de o dreaptă şi un punct nesituat pe dreaptă

Să considerăm dreapta $d \in E_3$ şi punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ ce nu aparţine dreptei d. (Figura 10).

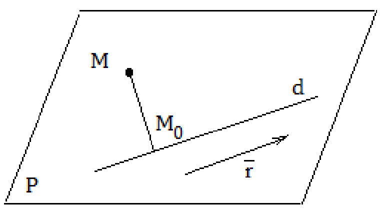

Figura 10

Scrierea ecuaţiei planului $P(M,d)$ este echivalentă cu a scrie ecuaţia planului $P(M,\overline{MM_0},\bar{r})$ adică, revine la a scrie ecuaţia numită *ecuaţia vectorială a planului P,* plan determinat de un punct $M(x_1,y_1,z_1)$ şi doi vectori necoliniari $\overline{m_0}-\bar{m}$ şi $\bar{r}$:

$$\langle \bar{m}, (\overline{m_0}-\bar{m})\times\bar{r}\rangle = 0$$

unde cu $\overline{m_0}$ am notat vectorul de poziţie al punctului $M_0(x_0,y_0,z_0)$ iar cu $\bar{m}$ vectorul de poziţie al punctului M, caz studiat mai înainte.

Ecuaţia precedentă devine:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

cu $\bar{r} = l\bar{\imath} + m\bar{\jmath} + n\bar{k}$, numită *ecuaţia carteziană a planului P.*

3.5 Planul determinat de două drepte concurente

Să presupunem că avem două drepte d_1 şi d_2 care se intersectează în punctul M (vezi figura 11).

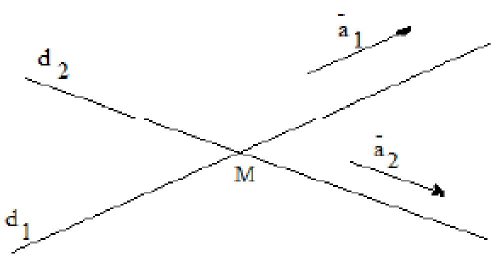

Figura 11

Vrem să determinăm ecuaţia planului determinat de d_1 şi d_2. Fie π acest plan. El coincide cu planul determinat de punctul M şi vectorii directori ai lui d_1 şi d_2 şi anume $\bar{a}_1 = l_1\bar{\imath} + m_1\bar{\jmath} + n_1\bar{k}$ şi $\bar{a}_2 = l_2\bar{\imath} + m_2\bar{\jmath} + n_2\bar{k}$. Fie $P\left(x_P, y_P, z_P\right) \in \pi$.

Ecuaţia carteziană va fi:

$$\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

iar ecuaţia vectorială va fi:

$$(\bar{r} - \bar{r}_M)(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = 0 \tag{3.4}$$

Exemplul 3.5.1 *Să se verifice că următoarele drepte sunt concurente*

$$d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2} \tag{3.5}$$

$$d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3} \tag{3.6}$$

şi apoi să se scrie ecuaţia planului determinat de acestea.

Soluţie: Observăm că vectorii directori ai celor două drepte sunt $\bar{a}_1 = \bar{\imath} + \bar{j} + 2\bar{k}$ şi $\bar{a}_2 = 2\bar{\imath} - 2\bar{j} + \bar{k}$. Deoarece

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\bar{\imath} + \bar{j} - 3\bar{k} \neq 0 \tag{3.7}$$

Rezultă că vectorii $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ nu sunt coliniari, adică $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$. Fie $\{M(x_M, y_M, z_M)\} = d_1 \cap d_2$. Deoarece

$$M \in d_1 \Rightarrow x_M - 2 = y_M - 3 \tag{3.8}$$

$$M \in d_2 \Rightarrow -x_M + 1 = 2y_M + 2 \tag{3.9}$$

Obţinem $x_M = -1$, $y_M = 0$, $z_M = -2$. Planul π determinat de dreptele d_1 şi d_2 va avea ecuaţia: $5(x+1) + 1(y-0) - 3(z+2) = 0$, adică:

$$\pi : 5x + y - 3z - 1 = 0 \tag{3.10}$$

■

Exerciţiul 3.5.2 *[15] Se dau punctele A(3, 1, 0) , B (2, 1,-1) , C (3, 2, 1). Să se scrie ecuaţia unui plan:*
a) care trece prin A, B, C;
b) care trece prin B şi este paralel cu xOy;
c) care trece prin C şi conţine axa Oz;
d) care trece prin B, C şi este paralel cu Oy.

Soluţie: a) Ecuaţia planului care trece prin A, B, C este:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

adică:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 4 = 0.$$

b) Planul căutat are drept normală vectorul $\bar{k}(0, 0, 1)$. Prin urmare, ecuaţia planului căutat este $z + 1 = 0$.
c) Planul conţine orice două puncte de pe axa Oz. Alegem, pentru comoditate, punctele $O(0, 0, 0)$ şi $M(0, 0, 1)$. Atunci ecuaţia planului cerut este:

$$\begin{vmatrix} x - x_O & y - y_O & z - z_O \\ x_M - x_O & y_M - y_O & z_M - z_O \\ x_C - x_O & y_C - y_O & z_C - z_O \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = 0.$$

d) Planul căutat este determinat de punctul B şi direcţiile $\overline{BC}(1, 1, 2)$ şi $\bar{j}(0, 1, 0)$. Prin urmare, ecuaţia planului căutat este:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 5 = 0.$$

■

Exerciţiul 3.5.3 *[15] Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $M(2,0,1)$ şi care este perpendicular pe planele $\pi_1 : x+y+z=0$ şi $\pi_2 : x-2y+3z=1$.*

Soluţie: *Fie π planul căutat. Deoarece planul π este perpendicular pe π_1 şi π_2, rezultă că el este paralel cu normalele la acestea, şi anume, $\bar{n}_1(1,1,1)$ şi $\bar{n}_2(1,-2,3)$. Astfel, planul π este planul determinat de punctul M şi direcţiile $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$, adică π :*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x-2y-3z-7=0.$$

■

Exerciţiul 3.5.4 *[15] Să se scrie ecuaţia unui plan paralel cu planul $(P) : x+y+z=3$ şi care trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele $M_1(1,3,2)$ şi $M_2(-1,3,4)$.*

Soluţie: Mijlocul segmentului $\overline{M_1M_2}$ este punctul $M(0,3,3)$. Planul căutat va avea aceeaşi normală cu (P) , deci ecuaţia sa este $1\cdot(x-0)+1\cdot(y-3)+1\cdot(z-3)=0 \Leftrightarrow x+y+z-6=0$. ■

Exerciţiul 3.5.5 *[15] Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin $M(1,-1,1)$ şi este paralelă cu dreapta de intersecţie a planelor $(P_1) : x+y=3$ şi $(P_2) : x-z=1$.*

Soluţie: Dreapta de intersecţie a planelor (P_1) şi (P_2) are drept vector director produsul vectorial $\bar{v}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2$ al normalelor la cele două plane (deoarece este perpendiculară pe ambele). Avem:

$$\bar{v}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}.$$

■

3.6 Planul determinat de două drepte paralele

Să considerăm d_1 şi d_2 două drepte paralele (vezi figura 12), $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1, M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$ şi $\bar{a} = l\bar{\imath} + m\bar{\jmath} + n\bar{k}$ vectorul lor director.

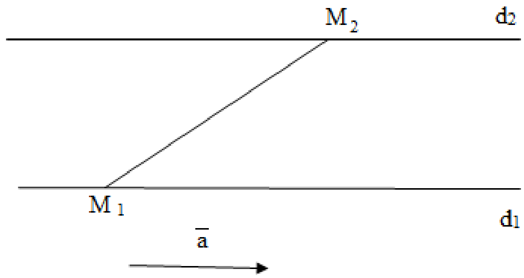

Figura 12

Putem considera că planul determinat de d_1 şi d_2 este planul care trece prin M_1 şi are vectori directori pe $\bar{a}$ şi $\overline{M_1M_2}$. Dacă punctul $M(x, y, z)$ aparţine planului π atunci *ecuaţia carteziană* va fi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.11}$$

iar *ecuaţia vectorială* a planului π este:

$$(\bar{r} - \bar{r}_{M_1}) \left(\bar{a} \times \overline{M_1M_2}\right) = 0 \tag{3.12}$$

3.7 Plan orientat

Prin alegerea unui sens de rotaţie în plan vom înţelege alegerea unui sens pe normala la plan. Un astfel de plan se va numi *plan orientat*. În mod natural alegem acel sens pe normală care să ducă la o orientare a planului în concordanţă cu orientarea spaţiului. În continuare vom subînţelege o asemenea orientare (regula mâinii drepte). Planele de coordonate xOy, yOz şi zOx sunt orientate. Faţa planului ce corespunde sensului ales pe normală o vom nota cu (+) iar faţa opusă cu (-).

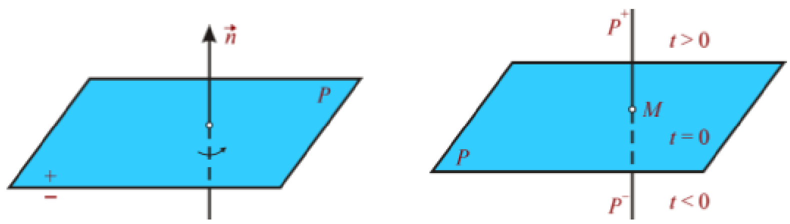

Figura 13 [4]

3.8 Reuniunea şi intersecţia a două plane

În spaţiu, două plane se pot intersecta după o dreaptă (vezi fig. 14), pot fi paralele sau se confundă.

Reuniunea a două plane $P_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$, $P_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ este mulţimea (*cuadrică degenerată*):

$$M = \{M\,(x, y, z) \mid (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0\} \tag{3.13}$$

Pentru a vedea cum se poziţionează un plan faţă de altul se formează sistemul din ecuaţiile lor:

$$d : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Se discută şi se rezolvă acest sistem: Matricea sa este $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$. Cum $rang\,(A)$ este maxim 2, sistemul este compatibil nedeterminat şi admite o infinitate de soluţii.

Se interpretează geometric rezultatul: Dacă P_1 şi P_2 nu sunt paralele sau confundate, intersecţia lor este o dreaptă $P_1 \cap P_2 = d$. Un punct M_1 al dreptei d se obţine fixând valoarea uneia dintre variabile şi calculându-le pe celelalte două.

Să considerăm vectorii normali la P_1 şi P_2: $\bar{n}_1\left(l_1, m_1, n_1\right)$ respectiv $\bar{n}_2\left(l_2, m_2, n_2\right)$
.

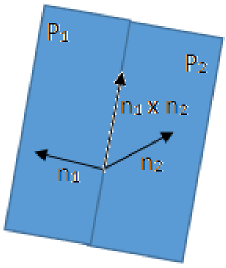

Figura 14

Direcţia dreptei d este dată de vectorul: $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$

$l = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, m = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ şi $n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ sunt parametrii directori ai dreptei d .

Ecuaţiile canonice ale dreptei d de intersecţie a planelor neparalele, ce trece printr-un punct $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ vor fi:

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{3.15}$$

3.9 Fascicule de plane

Definiţia 3.9.1 *Se numeşte fascicul de plane mulţimea tuturor planelor care conţin o dreaptă dată. Această dreaptă se numeşte axa fasciculului.*

Considerăm P_1 şi P_2 două plane de ecuaţii $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, respectiv $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$. Intersecţia $P_1 \cap P_2 = d$, este dreapta de ecuaţii:

$$d : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Prin orice dreaptă trece o infinitate de plane. Considerăm vectorul nenul $\bar{n}\,(n_1, n_2)$ normal pe dreapta d. Deoarece orice vector nenul $\bar{n}$, perpendicular pe d, se scrie de forma: $\bar{n} = an_1 + bn_2$, rezultă că:

Teorema 3.9.2 *Ecuaţia oricărui plan din fasciculul determinat de drepta (3.16) este:*

$$\mathcal{F} : a\,(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + b\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \tag{3.17}$$

unde $a^2 + b^2 \neq 0$.

Deoarece $a^2 + b^2 \neq 0$, a şi b nu sunt simultan nuli. Considerăm $a \neq 0$ şi împărţim (3.17) prin a. Notăm $\dfrac{b}{a} = \lambda \in \mathbb{R}$. Ecuaţia (3.17) devine:

$$\mathcal{F} : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \tag{3.18}$$

Atunci când P_1 şi P_2 sunt plane paralele obţinem:

$$\mathcal{F}_{\|} : a_1x + b_1y + c_1z + \lambda = 0 \tag{3.19}$$

Exerciţiul 3.9.3 *[15] Să se scrie planul care trece prin punctul $A(3, 1, -2)$ şi care conţine dreapta d:*

$$d : \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$$

Soluţie: Dreapta d este intersecţia planelor

$$d : \begin{cases} x - 5z - 4 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Fascicolul de plane care trece prin dreapta d este

$$\pi_\lambda : x - 5z - 4 + \lambda(y - 2z + 3) = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Condiţia $A \in \pi_\lambda$ implică $\lambda = -\frac{9}{8}$. Ecuaţia planului căutat este

$$\pi_\lambda : 8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

■

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

[15] Stoica, E., Neagu, M., Algebră liniară, *geometrie analitică şi diferenţială*, Culegere de probleme.

Index