Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 10

Cuprins

Capitolul 3

Unghiuri în spaţiu

În ceea ce priveşte noţiunea de unghi în spaţiu putem vorbi despre unghiul dintre două drepte orientate, unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan orientat şi unghiul dintre două plane orientate.

3.1 Unghiul dintre două drepte orientate

Prin unghiul dintre două drepte orientate d_1 şi d_2 care au vectorii directori $\bar{r}_1\left(l_1, m_1, n_1\right)$ şi $\bar{r}_2\left(l_2, m_2, n_2\right)$ vom înţelege unghiul notat cu $\varphi \in [0, \pi]$ definit prin:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \bar{r}_1, \bar{r}_2 \rangle}{\|\bar{r}_1\| \cdot \|\bar{r}_2\|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \tag{3.1}$$

Este evident din relaţia anterioară că cele două drepte sunt perpendiculare dacă vectorii directori sunt perpendiculari (produsul scalar dintre vectorii directori este 0) şi reciproc şi că sunt paralele dacă vectorii directori sunt coliniari (produsul mixt dintre vectorii directori este 0) şi reciproc.

3.2 Unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan orientat

Să considerăm o dreapta orientată d ce are vectorul director $\bar{r}_1\,(l_1, m_1, n_1)$ şi planul orientat π ce are normala la plan $\bar{n}\,(l_2, m_2, n_2)$:

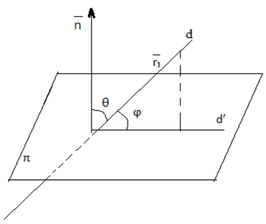

Figura 15

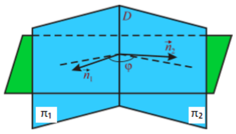

Figura 16 [4]

Să notăm cu θ unghiul dintre $\bar{n}$ şi $\bar{r}_1$ şi cu φ unghiul dintre vectorul director al lui $d^{'}$ şi $\bar{r}_1$. După cum se observă şi în Figura 15, $\theta + \varphi = 90^0$.Unghiul dintre dreapta orientată $(d, \bar{r}_1)$ şi planul orientat $(\pi, \bar{n})$ este unghiul $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definit prin formula:

$$\sin\varphi = \frac{\langle \bar{r}_1, \bar{n}\rangle}{\|\bar{r}_1\|\,\|\bar{n}\|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \tag{3.2}$$

Dreapta d este paralelă cu planul $\pi \Leftrightarrow \langle \bar{r}_1, \bar{n}\rangle = 0$ iar dreapta d este perpendiculară pe planul $\pi \Leftrightarrow \bar{r}_1 \times \bar{n} = 0$.

3.3 Unghiul dintre două plane orientate

Fie planele π_1 şi π_2 de ecuaţii $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Să presupunem că vectorii lor normali sunt $\bar{n}_1\,(a_1, b_1, c_1)$ respectiv $\bar{n}_2\,(a_2, b_2, c_2)$.

Dacă cele două plane sunt paralele sau confundate atunci $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0$.

Considerăm că unghiul diedru determinat de planele orientate π_1 şi π_2 este măsurat prin unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$ (vezi fig. 16). Acest unghi se determină prin formula:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2\rangle}{\|\bar{n}_1\|\,\|\bar{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \tag{3.3}$$

Capitolul 4

Distanţe în spaţiu

În cele ce urmează vom prezenta următoarele distanţe: de la un punct la o dreaptă, de la un punct la un plan, dintre două drepte şi perpendiculara comună a două drepte oarecare din spaţiu.

4.1 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Pentru aceasta vom considera următoarele: dreapta $d \in E_3$, $d(\bar{a}, A), \bar{a}\,(l, m, n)$ şi punctul $A(x_1, y_1, z_1)$.Dreapta d are ecuaţia:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{4.1}$$

Construim paralelogramul $AMNA^{'}$ (vezi figura 17), unde $M^{'}$ reprezintă proiecţia punctului M pe d.

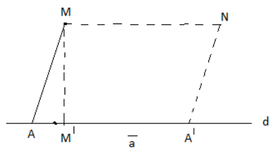

Figura 17

Lungimea segmentului $[MM^{'}]$ este distanţa de la punctul M la dreapta d şi se notează $d(M, d)$. Aria paralelogramului $AMNA^{'}$ este:

$$A_{AMNA^{'}} = \left\| AM \times AA^{'} \right\| \tag{4.2}$$

Pe de altă parte

$$A_{AMNA'} = \left\|AA'\right\| \left\|MM'\right\| \tag{4.3}$$

de unde rezultă că formula distanţei de la un punct la o dreaptă este:

$$\left\|MM'\right\| = \frac{\left\|AM \times AA'\right\|}{\|AA'\|} \tag{4.4}$$

Exerciţiul 4.1.1 *[15] Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,2,2)$ la dreapta:*

$$d : \frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{3}$$

Soluţie: Punctul $A_1(1,-1,-1)$ aparţine dreptei (d) iar $\bar{v}(-5,3,3)$ este vectorul director al dreptei. Rezultă că

$$\overline{AA_1} \times \ \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 15\bar{\jmath} - 15\bar{k}.$$

Prin urmare, distanţa de la punctul A la dreaptă este:

$$d(A,(d)) = \frac{\sqrt{225+225}}{\sqrt{25+9+9}} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{43}} = 5\sqrt{\frac{18}{43}}$$

■

4.2 Distanţa de la un punct la un plan

Pentru aceasta vom considera următoarele: planul $P : ax+by+cz+d = 0$, punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi proiecţia acestuia pe planul P, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.(vezi figura 18)

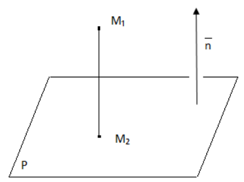

Figura 18

Distanţa de la punctul M_1 la planul P este $\|M_1M_2\|$. O vom nota cu $d(M_1, P)$. Fie $\bar{n}(a,b,c)$ vectorul normal la plan. Deoarece M_1 aparţine planului P el verifică ecuaţia acestuia şi avem: $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ de unde: $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. Produsul scalar dintre vectorul $\overline{M_1M_2}$ şi vectorul normal la plan $\bar{n}$ este:

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2} &= (x_2 - x_1)\,\bar{\imath} + (y_2 - y_1)\,\bar{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\bar{k} && (4.5) \\ \left\langle \overline{M_1M_2}, \bar{n} \right\rangle &= (x_2 - x_1)\,a + (y_2 - y_1)\,b + (z_2 - z_1)\,c && (4.6) \end{aligned}$$

Pe de altă parte $\left\langle \overline{M_1M_2}, \bar{n} \right\rangle = \left\|\overline{M_1M_2}\right\| \cdot \|\bar{n}\| \cdot \cos\varphi =$
$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$\left\|\overline{M_1M_2}\right\| \cdot \|\bar{n}\| = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$\overline{(x_2 - x_1)\,a + (y_2 - y_1)\,b + (z_2 - z_1)\,c \cdot \|\bar{n}\|}$
$= \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$(x_2 - x_1)\,a + (y_2 - y_1)\,b + (z_2 - z_1)\,c = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot d(M_1, P)$

$$\begin{aligned} d(M_1, P) &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} && (4.7) \\ d(M_1, P) &= \inf d(M_1, M_2) \end{aligned}$$

4.3 Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spaţiu

Să considerăm d_1 şi d_2 două drepte oarecare din spaţiu ce au pe $\bar{a}_1$, respectiv $\bar{a}_2$ vectori directori. Ele pot fi: paralele, concurente, oarecare sau confundate. Dacă d_1 şi d_2 sunt concurente sau oarecare, există o dreaptă şi numai una, care se sprijină simultan pe cele două drepte şi care are direcţia $\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$ numită perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2 (vezi figura 19).

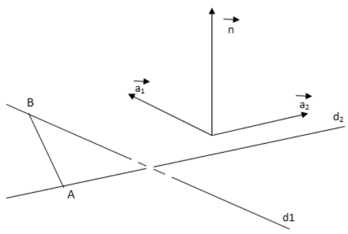

Figura 19

Considerăm planul π_1 determinat de dreapta d_1 şi vectorul $\bar{n}$, şi planul π_2 determinat de dreapta d_2 şi vectorul $\bar{n}$. Intersecţia dintre π_1 şi π_2 reprezintă tocmai perpendiculara comună. Fie $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$, $M \in \pi_1$ şi $N \in \pi_2$. Atunci ecuaţiile perpendicularei comune sunt:

$$d : \begin{cases} \langle \overline{M_1M}, \bar{a}_1 \times \bar{n} \rangle = 0 \\ \langle \overline{M_2N}, \bar{a}_2 \times \bar{n} \rangle = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Exemplul 4.3.1 *Determinaţi perpendiculara comună a dreptelor:*

$$d_1 \ : \ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3/2} \tag{4.9}$$

$$d_2 \ : \ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{1/2} \tag{4.10}$$

Soluţie: Vectorii directori ai lui d_1 şi d_2 sunt $\bar{a}_1(-1, 2, \frac{3}{2})$ respectiv $\bar{a}_2(1, 4, \frac{1}{2})$. Perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2 pe care o vom nota cu d are direcţia $\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 6\bar{k}$. Considerăm planul π_1 determinat de dreapta d_1 şi vectorul $\bar{n}$ şi planul π_2 determinat de dreapta d_2 şi vectorul $\bar{n}$. Intersecţia dintre π_1 şi π_2 reprezintă tocmai perpendiculara comună. Fie $M_1(2, 1, 3) \in d_1$, $M_2(1, -1, 2) \in d_2$, $M \in \pi_1$ şi $N \in \pi_2$. Atunci ecuaţiile perpendicularei comune sunt:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3/2}.$$

■

Exerciţiul 4.3.2 *[15] Să se scrie ecuaţia perpendicularei comune a dreptelor*

$$\begin{aligned} d_1 &: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \\ d_2 &: \frac{x}{-11} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \end{aligned}$$

Exerciţiul 4.3.3 *Perpendiculara comună a lui (d_1) şi (d_2) se găseşte la intersecţia dintre planul determinat de $A_1, \bar{v}_1, \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ şi planul determinat de $A_2, \bar{v}_2, \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Deoarece avem:*

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 5\bar{k}.$$

rezultă că ecuaţiile perpendicularei comune sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - z + 5 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right. .$$

4.4 Distanţa dintre două drepte

Să considerăm d_1 şi d_2 două drepte necoplanare, $A_1 \in d_1$, $A_2 \in d_2$, π planul care trece prin d_1 şi este paralel cu d_2 . Construim paralelipipedul

oblic pe vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ şi $\overline{A_1A_2}$ (vezi figura 20).

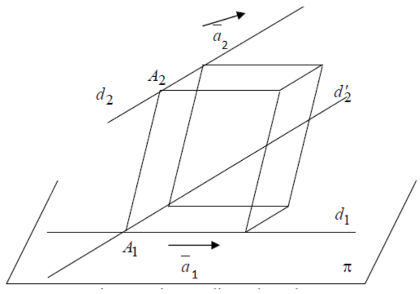

Figura 20

Distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este:

$$d(d_1, d_2) = d(A_1, A_2) = d(A_2, \pi) \tag{4.11}$$

pe care o putem deduce din formula volumului paralelipipedului oblic:

$$V_{paralelipiped} = d(A_2, \pi) \cdot Aria_{bazei} \tag{4.12}$$

$$d(A_2, \pi) = \frac{V_{paralelipiped}}{Aria_{bazei}} = \frac{\left|\left\langle \overline{a_1}, \bar{a}_2, \overline{A_1 A_2} \right\rangle\right|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|} \tag{4.13}$$

Exerciţiul 4.4.1 *[15] Să se calculeze distanţa dintre dreptele*

$$d_1 \ : \ \begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y + z = -5 \end{cases}$$

$$d_2 \ : \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{0}$$

Soluţie: Direcţiile dreptelor (d_1) şi (d_2) sunt $\bar{v}_1(1, -1, -3)$:

$$\bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} - 3\bar{k}$$

şi respectiv, $v_2(1,2,0)$. Produsul lor vectorial este:

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + 3\bar{k}.$$

Punctul $A_1(1,3,0)$ aparţine dreptei (d_1) şi punctul $A_2(2,3,0)$ aparţine dreptei (d2). Produsul mixt al vectorilor $\overline{A_1A_2}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ este:

$$\langle \overline{A_1A_2}, \overline{v_1}, \bar{v}_2 \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

ceea ce implică:

$$d\,(d_1, d_2) = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

■

Exerciţiul 4.4.2 *[15] Fie punctul $M(2,1,0)$ şi planul $(P) : 2x + 2y + z = -3$. Să se determine:*
a) proiecţia lui M pe plan;
b) simetricul lui M faţă de plan;
c) distanţa de la M la planul (P).

Soluţie: **a**) Perpendiculara din punctul M pe planul (P) este

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

Proiecţia M' a punctului M pe planul (P) se obţine din intersecţia acesteia cu (P). Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1} \\ 2x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

găsim $M'(0,-1,-1)$.
b) Coordonatele simetricului M'' al punctului M faţă de plan se obţin din relaţiile

$$x_{M'} = \frac{x_M + x_{M''}}{2}, y_{M'} = \frac{y_M + y_{M''}}{2}, z_{M'} = \frac{z_M + z_{M''}}{2}$$

Prin urmare avem simetricul $M''(-2,-3,-2)$.
c) Distanţa de la punctul M la planul (P) este conform (4.7)

$$d\left(M,P\right)=\frac{|2\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3.$$

■

Exerciţiul 4.4.3 *[15] Să se afle coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(1,1,1)$ pe dreapta (d) :*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+12}{-1}$$

Soluţie: Fie $M'(\alpha,\beta,\gamma)$ proiecţia punctului M pe dreapta (d). Deoarece $M'\in(d)$, obţinem relaţiile:

$$\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\beta+1}{2}=\frac{\gamma+12}{-1}$$

Vectorul $MM'(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1)$ este perpendicular pe vectorul director al dreptei (d). Prin urmare, avem $MM'\perp\bar{v}\Leftrightarrow\langle MM',\bar{v}\rangle=0\Leftrightarrow 2(\alpha-1)+2(\beta-1)-(\gamma-1)=0$. Rezolvând sistemul, găsim $\alpha=-1,\beta=-3,\gamma=-11$. ■

Exerciţiul 4.4.4 *[15] Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin dreapta*

$$(D):\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$$

şi care este perpendicular pe planul $(P):x+y+z=0$.

Soluţie: Planul căutat va conţine vectorul director al dreptei (D) şi normala la (P) şi va trece prin orice punct al dreptei (D), spre exemplu, prin punctul $A(1,1,2)$. Prin urmare, ecuaţia planului căutat este:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-2\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} &= 0\\ -x+2y-z+1 &= 0.\end{aligned}$$

■

Exerciţiul 4.4.5 *[15] Să se determine simetrica dreptei*

$$(d) : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

faţă de planul xOy.

Soluţie: Pentru a determina simetrica dreptei (d) faţă de planul xOy, construim simetricele a două puncte de pe (d) faţă de acest plan. Pentru comoditate, unul dintre puncte îl alegem la intersecţia lui (d) cu xOy, adică $M(5,1,0)$ (deoarece simetricul lui M faţă de plan este tot M). Fie, acum, $N(1,0,2) \in (d)$. Simetricul lui N faţă de xOy este $N'(1,0,-2)$ iar dreapta căutată este:

$$N'M : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$$

■

Bibliografie

[1] Bărbăcioru, I.C., *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Stănescu, I., *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[3] Udrişte, C., Tomuleanu V., *Geometrie analitică, Manual pentru clasa a XI a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[4] Udrişte, C., Bălan, V., Frigioiu, C., Roman, M., *Geometrie Analitică, Geometrie Diferenţială şi elemente de Algebră Tensorială*, vol II, proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768.

[5] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993.

[6] Ungureanu,V.M., *Algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Academica Brancuşi, Tg-Jiu, 2009.

[7] Ungureanu,V.M., Buneci, M. R., *Algebră liniară: teorie şi aplicaţii*, Editura Mirton Timişoara, 2004.

[8] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, ed. ALL, Bucureşti, 1998.

[9] V. Bălan, *Algebră liniară, geometrie analitică*, ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

[10] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Iatan, *Curs de Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială cu aplicaţii*, ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

[12] I. Iatan, "*Advances Lectures on Linear Algebra with Applications*", Lambert Academic Publishing AG& Co. KG, Saarbrücken, Germany 2011.

[13] M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie*, note de curs, 1993.

[14] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.

[15] Stoica, E., Neagu, M., Algebră liniară, *geometrie analitică şi diferenţială*, Culegere de probleme.