Seminarul 11

Problema 5.2.5 *Utilizând metoda lui Jacobi, să se găsească forma canonică şi signatura formelor pătratice de mai jos. Care dintre aceste forme pătratice sunt pozitiv definite şi care sunt negativ definite? Să se precizeze baza spaţiului în care se obţine forma canonică respectivă.*

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3.$

Rezolvare

Metoda lui Jacobi

Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică şi $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ matricea lui Q într-o bază $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a spaţiului vectorial V. Fie determinanţii

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ ...,\ \Delta_n = \det A.$$

Dacă $\Delta_i \neq 0,\ \forall\ i = \overline{1,n}$, atunci în baza

$$B' = \{e_1' = c_{11}e_1, e_2' = c_{21}e_1 + c_{22}e_2, ..., e_n' = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + .. + c_{nn}e_n\}$$

forma pătratică Q are forma canonică

$$Q(x') = \frac{1}{\Delta_1}x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}x_3'^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n'^2,$$

unde x_i', $i = \overline{1,n}$, sunt coordonatele vectorului x în baza B', iar scalarii c_{ij}, $i \geq j$, se determină din condiţiile

$$\mathcal{A}(e_i', e_j) = 0,\ \forall\ j < i \leq n,\ \text{şi}\ \mathcal{A}(e_i', e_i) = 1,\ \forall\ i = \overline{1,n},$$

forma biliniară şi simetrică $\mathcal{A}$ fiind polara formei pătratice Q.

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x) = 1x_1^2 + 8x_2^2 + 1x_3^2 + \underset{2}{\underline{16}}x_1x_2 + \underset{2}{\underline{4}}x_1x_3 + \underset{2}{\underline{4}}x_2x_3.$

Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

coef. lui $x_1 x_2 / 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

coef lui $x_1 x_3 / 2$

coef lui $x_2 x_3 / 2$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = 1 \neq 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -56 \neq 0,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Prin urmare, forma canonică este

$$Q(x') = x_1'^2 - \frac{1}{56} x_2'^2 + 2x_3'^2.$$

Criteriul lui Sylvester *Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Dacă condiţiile din metoda lui Jacobi sunt îndeplinite, atunci:*

(1) *forma pătratică Q este pozitiv definită* $\Leftrightarrow \Delta_i > 0,\ \forall\ i = \overline{1,n}$;

(2) *forma pătratică Q este negativ definită* $\Leftrightarrow (-1)^i \Delta_i > 0,\ \forall\ i = \overline{1,n}$.

Tripletul de numere naturale $\sigma(Q) = (p, q, d) \in \mathbb{N}^3$, asociat unei forme canonice

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2,$$

unde $p =$ numărul de coeficienţi λ_i strict pozitivi, $q =$ numărul de coeficienţi λ_i strict negativi şi $d =$ numărul de coeficienţi λ_i egali cu zero, se numeşte ***signatura*** *formei pătratice Q.*

Legea de inerţie *Signatura unei forme pătratice Q este aceeaşi pentru orice formă canonică a lui Q.*

$$\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

Pentru a găsi baza în care se obţine această formă canonică, luăm vectorul $e_1' = c_{11} e_1$ şi determinăm scalarul $c_{11} \in \mathbb{R}$ din condiţia

$$\mathcal{A}(e_1', e_1) = 1 \Rightarrow c_{11} = 1,$$

adică avem

$$e'_1 = e_1 = (1, 0, 0).$$

Considerăm apoi $e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$ şi determinăm scalarii $c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e'_2, e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e'_2, e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{21} + 8c_{22} = 0 \\ 8c_{21} + 8c_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_{21} = \frac{1}{7},\ c_{22} = -\frac{1}{56},$$

adică avem

$$e'_2 = \frac{1}{7}e_1 - \frac{1}{56}e_2 = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{56}, 0\right).$$

În final, considerăm $e'_3 = c_{31}e_1 + c_{32}e_2 + c_{33}e_3$ şi determinăm scalarii $c_{31}, c_{32}, c_{33} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e'_3, e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e'_3, e_2) = 0 \\ \mathcal{A}(e'_3, e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{31} + 8c_{32} + 2c_{33} = 0 \\ 8c_{31} + 8c_{32} + 2c_{33} = 0 \\ 2c_{31} + 2c_{32} + c_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_{31} = 0,\ c_{32} = -\frac{1}{2},\ c_{33} = 2,$$

adică avem

$$e'_3 = -\frac{1}{2}e_2 + 2e_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, 2\right).$$

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

b) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -9,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -729.$$

Prin urmare, forma canonică este

$$Q(x') = x_1'^2 - \frac{1}{9}x_2'^2 + \frac{1}{81}x_3'^2.$$

Signatura formei pătratice Q este $\sigma(Q) = (2, 1, 0)$, adică forma pătratică nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită.

Luăm vectorul $e_1' = c_{11}e_1$ şi determinăm scalarul $c_{11} \in \mathbb{R}$ din condiţia

$$\mathcal{A}(e_1', e_1) = 1 \Rightarrow c_{11} = 1,$$

adică avem

$$e_1' = e_1 = (1, 0, 0).$$

Considerăm acum $e_2' = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$ şi determinăm scalarii $c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_2', e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_2', e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{21} - 4c_{22} = 0 \\ -4c_{21} + 7c_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_{21} = -\frac{4}{9},\ c_{22} = -\frac{1}{9},$$

adică avem

$$e_2' = -\frac{4}{9}e_1 - \frac{1}{9}e_2 = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right).$$

În final, considerăm $e_3' = c_{31}e_1 + c_{32}e_2 + c_{33}e_3$ şi determinăm scalarii $c_{31}, c_{32}, c_{33} \in \mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_3', e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_3', e_2) = 0 \\ \mathcal{A}(e_3', e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{31} - 4c_{32} - 8c_{33} = 0 \\ -4c_{31} + 7c_{32} - 4c_{33} = 0 \\ -8c_{31} - 4c_{32} + c_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_{31} = -\frac{8}{81},\ c_{32} = -\frac{4}{81},\ c_{33} = \frac{1}{81},$$

adică avem

$$e_3' = -\frac{8}{81}e_1 - \frac{4}{81}e_2 + \frac{1}{81}e_3 = \left(-\frac{8}{81}, -\frac{4}{81}, \frac{1}{81}\right).$$

Problema 5.2.6 *Să se determine valorile parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care formele pătratice de mai jos sunt pozitiv definite sau negativ definite.*

a) $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \lambda x_1^2 + (\lambda + 3)x_2^2 - 4x_1x_2$.

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Rezolvare. a) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4.$$

Conform Criteriului lui Sylvester, forma pătratică Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda^2 + 3\lambda - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (0, \infty) \\ \lambda \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \in (1, \infty).$$

Forma pătratică Q este negativ definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda^2 + 3\lambda - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-\infty, 0) \\ \lambda \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \in (-\infty, -4).$$

b) Matricea în baza canonică a formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

iar determinanţii corespunzători sunt

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 8(\lambda - 8),\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(\lambda - 8).$$

Conform Criteriului lui Sylvester, forma pătratică Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda - 8 > 0 \\ \lambda - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in (8, \infty).$$

Forma pătratică Q este negativ definită dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda - 8 > 0 \\ \lambda - 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \emptyset.$$