

Se poate demonstra destul de ușor următorul rezultat: dacă funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă într-un punct  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \in A$  (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci  $f$  este continuă în punctul  $a$  în raport cu fiecare variabilă în parte.

De asemenea, se poate arăta că, funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă parțial în punctul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \in A$ , în raport cu variabila  $x_k$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , dacă și numai dacă, există

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \text{ și}$$

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

În schimb, o funcție  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  poate să fie continuă într-un punct  $a \in A$ , în raport cu fiecare variabilă în parte, fără ca  $f$  să fie continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

De exemplu, pentru funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2x+3y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

Deci,  $f$  nu este continuă parțial în punctul  $a = (0, 0)^T$  în raport cu nici o variabilă. Prin urmare,  $f$  nu poate fi continuă în punctul  $a = (0, 0)^T$ .

Pentru funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases},$$

avem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$ . Deci  $f$  este continuă în punctul  $a = (0, 0)^T$  în raport cu fiecare variabilă în parte. În schimb,  $f$  nu este continuă în punctul  $a = (0, 0)^T$  (vezi exemplul 2 de la 2.7.3.)

### 2.7.8. Continuitatea după o direcție

Vom spune că funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *continuă în punctul*  $a \in A$  *după direcția vectorului*  $v \in \mathbf{R}^m \setminus \{\theta\}$  dacă există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Se poate demonstra cu ușurință următorul rezultat: *dacă funcția*  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  *este continuă în punctul*  $a \in A$ , *atunci*  $f$  *este continuă în punctul*  $a$  *după direcția oricărui vector*  $v \in \mathbf{R} \setminus \{\theta\}$ .

Să considerăm funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2x+3y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ \frac{3}{8}, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

Pentru vectorul  $v = (1, 2)^T \in \mathbf{R}^2$  avem

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{3}{8} = f(0, 0), \text{ ceea ce înseamnă că } f \text{ este}$$

continuă în punctul  $(0, 0)^T$  după direcția vectorului  $v \in \mathbf{R}^2$ .

Pentru vectorul  $w = (-1, 2)^T \in \mathbf{R}^2$  avem

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{1}{4} \neq f(0, 0), \text{ ceea ce înseamnă că } f \text{ nu este}$$

continuă în punctul  $(0, 0)^T$  după direcția vectorului  $w \in \mathbf{R}^2$ .

În consecință,  $f$  nu poate fi continuă în punctul  $(0, 0)^T$ .

### 2.7.9. Exerciții.

1. Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  o funcție continuă în punctul  $a \in A$ . Dacă  $f(a) \neq \theta$ , atunci să se arate că există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  astfel încât  $f(x) \neq \theta$ , pentru orice  $x \in V \cap A$ .

2. Considerăm funcțiile  $f, g : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  continue în punctul  $a \in A$ . Dacă  $f(a) < g(a)$ , atunci să se arate că există o vecinătate  $V$  a punctului  $a$  astfel încât  $f(x) < g(x)$  pentru orice  $x \in V \cap A$ .

3. Dacă  $f, g : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  sunt funcții continue pe  $I$ , atunci să se arate că funcția  $h : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ , este continuă pe mulțimea  $I$ .

### 2.7.10. Test de autoevaluare

1. Să se studieze continuitate următoarelor funcții în punctul  $a$  indicat în fiecare caz în parte.

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x+y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, \quad a = (0, 0)^T;$$

$$\text{b) } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}, & (x, y, z)^T \neq (0, 0, 0)^T \\ 1, & (x, y, z)^T = (0, 0, 0)^T \end{cases}, \\ a = (0, 0, 0)^T;$$

$$\text{c) } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, \quad a = (0, 0)^T;$$

$$d) \quad f(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{e^{xy} - 1}{2xy}, \frac{\sqrt[3]{1+x+y-1}}{x+y} \right)^T, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)^T, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases},$$

$$a = (0, 0)^T;$$

$$e) \quad f(x) = \begin{cases} \left( \frac{\sin 2x}{3x}, \frac{e^{3x} - 1}{2x}, 2x \right)^T, & x \neq 0 \\ \left( \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0 \right)^T, & x = 0 \end{cases}, \quad a = 0;$$

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} (3x - 4, x - 3)^T, & x < 2 \\ (x + 1, x)^T, & x \geq 2 \end{cases}, \quad a = 2.$$

**R.** a) continuă; b) continuă; c) nu este continuă; d) continuă; e) continuă; f) nu este continuă.

**2.** Să se calculeze continuitatea laterală a următoarelor funcții în punctul a indicat în fiecare caz în parte.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} \left( \frac{x}{|x|}, \frac{e^x - 1}{x} \right)^T, & x < 0 \\ \left( \frac{|x|}{x}, \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^T, & x > 0, \quad a = 0; \\ (1, 1), & x = 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \left( 3x - 1, \frac{e^x - 1}{2x} \right)^T, & x < 0 \\ \left( -1, \frac{1}{2} \right)^T, & x = 0, a=0 \\ \left( 2x - 1, \frac{1}{2} + x \right)^T, & x > 0 \end{cases}$$

R. a) nu este continuă; b) este continuă.

**3.** Să se studieze continuitate parțială a următoarelor funcții în punctul a indicat în fiecare caz în parte.

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + 3y}{4x + y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 3, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, a=(0, 0)^T;$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + y}{3x + 2y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ \frac{3}{2}, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, a=(0, 0)^T;$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin \frac{1}{x + y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 1, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, a=(0, 0)^T$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{\sin(x + y)}{x + y}, \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right), & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ (1, 1)^T, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

R. a) continuă în raport cu y; b) continuă în raport cu x; c) nu este continuă nici în raport cu x și nici în raport cu y; d) continuă în raport cu ambele variabile.

**4.** Să se studieze continuitatea următoarelor funcții în punctul a după direcția vectorului v.

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^3 + y^3}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ \frac{1}{2}, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, \quad a = (0, 0)^T, v = (1, 1)^T;$$

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x + y^2}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ \frac{2}{3}, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, \quad a = (0, 0)^T, v = (2, 1)^T;$$

c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ \frac{1}{2}, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}, \quad a = (0, 0)^T, v = (1, 1)^T;$$

d)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x-1)(y-1)}, & (x, y)^T \neq (1, 1)^T \\ 3, & (x, y)^T = (1, 1)^T \end{cases}, \quad a = (1, 1)^T, v = (1, 2)^T;$$

$$e) \quad f(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 + y^2 - 5}{(x-1)(y-2)}, \frac{y^2 - 4}{x-1} \right)^T, & (x, y)^T \neq (1, 2)^T \\ \left( -\frac{5}{2}, -2 \right)^T, & (x, y)^T = (1, 2) \end{cases},$$

$$a = (1, 2)^T, v = (2, -1)^T;$$

**R.** a) continuă; b) nu este continuă; c) continuă; d) continuă; e) continuă.

## 2.8. Funcții continue pe mulțimi compacte.

### Funcții uniform continue

În cele ce urmează, vom pune în evidență câteva proprietăți ale funcțiilor continue pe mulțimi compacte.

**2.8.1. Teoremă.** *Dacă funcția  $f : K \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă pe mulțimea compactă  $K$ , atunci funcția  $f$  este mărginită pe mulțimea  $K$ .*

**Demonstrație.** Să presupunem, prin absurd, că  $f$  nu este mărginită pe mulțimea  $K$ . Atunci, pentru orice  $M > 0$ , există  $x_M \in K$  astfel încât  $\|f(x_M)\| > M$ . Dacă luăm  $M = n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , atunci, pentru fiecare  $n \in \mathbf{N}$ , găsim un punct  $x_n \in K$  astfel încât  $\|f(x_n)\| > n$ .

Pe de altă parte,  $K$  fiind mulțime compactă, este mărginită, deci șirul  $(x_n)_n$  este mărginit. Conform lemei lui Cesàro (vezi Teorema 2.2.11 și Exercițiul 2.3.8), șirul  $(x_n)_n$  conține un subșir convergent  $(x_{n_k})_k$ . Fie  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Deoarece  $K$  este mulțime compactă, ea este și închisă, deci  $a \in K$  (vezi corolarul 2 al Teoremei 2.4.19). Deoarece  $f$  este continuă pe mulțimea  $K$ , atunci  $f$  este continuă în punctul  $a$ .

Deoarece  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , rezultă că  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$  (vezi punctul 2 al observației 2.7.2.) și deci  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x_{n_k})\| = \|f(a)\|$  (vezi exercițiul 3 de la 2.7.5). Dar din inegalitățile  $\|f(x_{n_k})\| \geq n_k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , deducem că  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x_{n_k})\| = +\infty$ , ceea ce constituie o contradicție deoarece  $\|f(a)\|$  este finit. ■

**2.8.2. Teoremă.** *Dacă funcția  $f : K \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă pe mulțimea compactă  $K$ , atunci  $f(K)$  este compactă.*

**Demonstrație.** Din Teorema 2.8.1 rezultă că  $f$  este mărginită pe  $K$ , deci mulțimea  $K$  este mărginită. Mai trebuie să arătăm că  $f(K)$  este o mulțime închisă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că, oricare ar fi șirul convergent de puncte din  $f(K)$ , limita sa aparține lui  $f(K)$ .

Fie  $(y_n)_n$  un șir de puncte din  $f(K)$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .  
 Deoarece  $y_n \in f(k)$ ,  $(\forall)n \in \mathbf{N}$ , atunci, pentru fiecare  $n \in \mathbf{N}$ , există  $x_n \in k$  astfel încât  $f(x_n) = y_n$ . Analog ca și în Teorema 2.8.1, se arată că șirul  $(x_n)_n$  conține un subșir convergent  $(x_{n_k})_k$ . Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Deoarece  $f$  este continuă în punctul  $a$ , rezultă că  $\lim_{K \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a) \in f(K)$ .

Pe de altă parte, deoarece  $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ ,  $(\forall)k \in \mathbf{N}$ , rezultă că  $\lim_{K \rightarrow \infty} y_{n_k} = f(a) \in f(K)$ . Prin urmare, deoarece  $\lim_{K \rightarrow \infty} y_n = b$  și deoarece  $(y_{n_k})_k$  este un subșir al șirului  $(y_n)_n$ , rezultă că  $\lim_{K \rightarrow \infty} y_{n_k} = b$ . În consecință, cum limita unui șir este unică, din  $\lim_{K \rightarrow \infty} y_{n_k} = b$  și  $\lim_{K \rightarrow \infty} y_{n_k} = f(a)$ , deducem că  $b = f(a) \in K$ . ■

**2.8.3. Definiție.** Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție mărginită pe  $A$ . Numerele reale  $m, M \in \mathbf{R}$ , definite prin

$$m = \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A),$$

$$M = \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A),$$

se numesc **marginile funcției  $f$  pe mulțimea  $A$** . Numărul  $m$  se numește **marginea inferioară**, iar numărul  $M$  se numește **marginea superioară** a funcției  $f$  pe mulțimea  $A$ .

Vom spune că funcția mărginită  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  își atinge marginea inferioară (respectiv, marginea superioară) pe mulțimea  $A$ , dacă există un punct  $x_m \in A$  (respectiv,  $x_M \in A$ ) astfel încât  $m = \inf_{x \in A} f(x)$  (respectiv,  $M = \sup_{x \in A} f(x)$ ).

**2.8.4. Teoremă.** Dacă funcția  $f : K \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este continuă pe mulțimea compactă  $K$ , atunci  $f$  își atinge marginile pe mulțimea  $K$ .

**Demonstrație.** Mulțimea  $K$  fiind compactă iar  $f$  continuă pe  $K$ , atunci, în baza teoremei 2.8.2, mulțimea  $f(K)$  este compactă, adică mărginită și închisă. Deoarece  $f(K) \subset \mathbf{R}$  este mărginită atunci, conform axiomei lui Cantor, există  $M = \sup f(K)$  și  $m = \inf f(K)$ . Pe de altă parte,  $f(K)$  fiind închisă, în baza corolarului 3 al Teoremei 2.4.19, rezultă că  $m, M \in f(K)$ . Prin urmare, există  $x_m \in K$  și  $x_M \in K$  astfel încât  $f(x_m) = m$  și  $f(x_M) = M$ . ■

**2.8.5. Observație.** A spune că funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă pe mulțimea  $A$  înseamnă că pentru orice  $x \in A$ ,  $f$  este continuă în punctul  $x$ , adică

*Oricare ar fi  $x \in A$  și oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  astfel încât, pentru orice  $x' \in A$  cu  $\|x - x'\| < \delta$ , să avem  $\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$ .*

În cazul în care numărul  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  nu depinde de alegerea punctului  $x \in A$ , adică, dacă pentru orice  $x \in A$  putem alege același  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , cu proprietatea din enunțul precedent, atunci spunem că funcția  $f$  este **uniform continuă pe mulțimea  $A$** . Prin urmare, avem următoarea definiție.

**2.8.6. Definiție.** Vom spune că funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este **uniform continuă pe mulțimea  $A$**  dacă, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât, pentru orice  $x', x'' \in A$  cu  $\|x' - x''\| < \delta$ , să avem  $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ .

Este evident că, dacă  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este uniform continuă pe  $A$ , atunci  $f$  este continuă pe  $A$ .

**2.8.7. Exemple. 1.** Funcția  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \|x\|$ , este uniform continuă pe  $\mathbf{R}^m$ . Într-adevăr, fie  $\varepsilon > 0$ . Atunci, alegând  $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , pentru orice  $x', x'' \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|x' - x''\| < \delta$ , avem

$|f(x') - f(x'')| = \|x'\| - \|x''\| \leq \|x' - x''\| < \varepsilon$  și deci uniform continuă pe  $\mathbf{R}^m$ .

**2.** Funcția  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \|x\|^2$ , nu este uniform continuă pe  $\mathbf{R}^m$ . Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că  $f$  ar fi uniform continuă pe  $\mathbf{R}^m$ . Atunci, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât, pentru orice  $x', x'' \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|x' - x''\| < \delta$ , să avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ . Putem alege punctele  $x', x'' \in \mathbf{R}^m$  astfel încât să avem  $\|x' - x''\| = \frac{\delta}{2}$ . Mai mult, putem

alege punctele  $x', x'' \in \mathbf{R}^m$  astfel încât să avem  $\|x'\| > \frac{2\varepsilon}{\delta}$  și

$\|x''\| > \frac{2\varepsilon}{\delta}$  (de exemplu, putem lua

$$x' = \frac{4\varepsilon + 2\delta^2}{2\delta} a, \quad x'' = \frac{4\varepsilon + 2\delta^2}{2\delta} a, \quad \text{unde } a \in \mathbf{R}^m \text{ cu } \|a\| = 1).$$

În aceste condiții avem:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= \left| \|x'\|^2 - \|x''\|^2 \right| = (\|x'\| - \|x''\|)(\|x'\| + \|x''\|) = \\ &= \frac{\delta}{2} (\|x'\| + \|x''\|) > \frac{\delta}{2} \left( \frac{2\delta}{\delta} + \frac{2\varepsilon}{\delta} \right) = 2\varepsilon \end{aligned}$$

deci  $|f(x') - f(x'')| > 2\varepsilon$ , ceea ce contrazice inegalitatea  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  obținută mai sus. În consecință,  $f(x) = \|x\|^2$ ,  $x \in \mathbf{R}^m$ , nu este uniform continuă pe  $\mathbf{R}^m$ .

**2.8.9. Teoremă.** Dacă funcția  $f : K \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă pe mulțimea compactă  $K$ , atunci ea este uniform continuă pe  $K$ .

**Demonstrație .** Să presupunem, prin absurd, că funcția  $f$  nu este uniform continuă pe mulțimea  $K$ . Atunci, există  $\varepsilon_0 = 0$  astfel încât, oricare ar fi  $\delta > 0$ , există  $x'_\delta, x''_\delta \in K$  cu

$$\|x'_\delta - x''_\delta\| < \delta \text{ și } \|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)\| > \varepsilon_0.$$

Luând  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , atunci, pentru fiecare  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , există

$$x'_n, x''_n \in K \text{ astfel încât să avem } \|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n} \text{ și } \|f(x'_n) - f(x''_n)\| > \varepsilon_0.$$

Deoarece șirurile  $(x'_n)_n$ ,  $(x''_n)_n$  sunt mărginite ( $K$  fiind compactă, deci mărginită), atunci în baza lemei lui Cesàro (vezi Teorema 2.2.11 și Exercițiul 2.3.8), fiecare șir conține câte un subșir convergent,  $(x'_{n_k})_K, (x''_{n_k})_K$ . Mai mult, dacă  $\lim_{K \rightarrow \infty} x'_{n_k} = a$ , atunci din inegalitatea

$$\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} \text{ și din faptul că } \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = 0, \text{ deducem că}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (x'_{n_k} - x''_{n_k}) = \theta, \text{ deci: } \lim_{K \rightarrow \infty} x''_{n_k} = \lim_{K \rightarrow \infty} [x'_{n_k} - (x'_{n_k} - x''_{n_k})] = a.$$

Prin urmare, deoarece  $\lim_{K \rightarrow \infty} x'_{n_k} = a$ ,  $\lim_{K \rightarrow \infty} x''_{n_k} = a$  și deoarece  $f$  este continuă în punctul  $a$  (fiind continuă pe  $K$ ), rezultă că  $\lim_{K \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(a)$ ,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f(a) \text{ și deci } \lim_{K \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})] = \theta.$$

Dar din inegalitățile  $\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\| > \varepsilon_0$ ,  $K \in \mathbf{N}$ , deducem că șirul  $(f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}))_K$  nu

poate avea limita  $\theta$ . Am ajuns astfel la o contradicție. ■

O altă clasă de funcții uniform continue o reprezintă clasa funcțiilor lipschitziene.

**2.8.10 Definiție.** Vom spune că o funcție  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este **funcție lipschitziană** dacă există un număr  $L > 0$  astfel încât, pentru orice  $x', x'' \in A$  să avem

$$\|f(x') - f(x'')\| \leq L \|x' - x''\|$$

Inegalitatea precedentă se numește **condiția lui Lipschitz**, iar numărul  $L > 0$  se numește **constantă Lipschitz** a funcției  $f$ .

**2.8.11. Teoremă.** Dacă  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este funcție lipschitziană, atunci  $f$  este uniform continuă pe  $A$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$  și să luăm  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ , unde  $L$  este constanta

Lipschitz a funcției  $f$ . Dacă  $x', x'' \in A$  sunt astfel încât  $\|x' - x''\| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ,

atunci  $\|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$  și deci  $f$  este uniform continuă pe mulțimea  $A$ . ■

### 2.8.12. Exerciții.

1. Să se arate că o funcție  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este uniform continuă pe  $A$  dacă și numai dacă toate componentele sale  $f_k : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , sunt uniform continue pe  $A$ .

2. Să se arate că, dacă o funcție  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este uniform continuă pe mulțimea  $A$ , atunci  $f$  este uniform în raport cu fiecare variabilă (pentru valori fixate ale celorlalte).

### 2.8.13. Test de autoevaluare.

1. Să se arate că funcția  $f : \left(0, \frac{2}{\pi}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , nu este uniform continuă pe  $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ .

2. Să se arate că funcția  $f : \left[-\frac{1}{2\pi}, 0\right] \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in \left[-\frac{1}{2\pi}, 0\right), \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este uniform continuă pe  $\left[-\frac{1}{2\pi}, 0\right]$ .

3. Să se arate că funcția  $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & x \in (0, \frac{1}{2}], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este unioform continuă pe  $[0, \frac{1}{2}]$ , dar nu este lipschitziană pe acest interval.

**4.** Fie  $A \subset \mathbf{R}^m$  o mulțime neviață și fie funcția  $d_A : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $d_A(x) = \lim_{a \in A} f \|x - a\|$ .

Să se arate că funcția  $d_A$  este lipschitziană pe  $\mathbf{R}^m$ .

**5.** Să se arate că funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x + y}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases},$$

unde  $A = \{(x, y)^T \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , este unioform continuă pe mulțimea  $A$ .

**6.** Dacă  $f : K \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este continuă pe mulțimea compactă  $K$ , atunci să se arate că graficul lui  $f$ ,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in K\} \subset \mathbf{R}^{m+1},$$

este o mulțime compactă în  $\mathbf{R}^{m+1}$ .

## 2.9. Derivarea funcțiilor vectoriale de variabilă reală

Fie  $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$  un interval deschis și  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  o funcție vectorială având componentele

$$f_k : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{N}_p.$$

Ca și în cazul funcțiilor reale de variabilă reală, putem introduce noțiunea de derivată și pentru funcțiile vectoriale de variabilă reală.

**2.9.1. Definiție.** Vom spune că funcția  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *derivabilă în punctul*  $t_0 \in I$  dacă există limita

$$(1) \quad f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Elementul  $f'(t_0) \in \mathbf{R}^p$  se numește *derivata funcției*  $f$  în punctul  $t_0$ .

Vom spune că funcția  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *derivabilă pe*  $I$  dacă este derivabilă în fiecare punct din  $I$ .

Dacă  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este derivabilă pe  $I$ , atunci pentru orice  $t \in I$ , există

$$(2) \quad f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad t+h \in I$$

Funcția  $f' : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , definită prin relația (2), se numește *funcția derivată* a funcției  $f$ .

În mod asemănător cu cazul funcțiilor reale de variabilă reală, se pot defini derivatele de ordin superior ale funcțiilor  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$ :

$$f^{(k)}(t) = (f^{(k-1)}(t)), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

**2.9.2. Propoziție.** *Funcția*  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  *este derivabilă în punctul*  $t_0 \in I$  *dacă și numai dacă toate componentele sale,*  $f_k : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{N}_p,$  *sunt derivabile în*  $t_0$ . *În acest caz avem*

$$(3) \quad f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_p(t_0))^T.$$

**Demonstrație.** Într-adevăr, avem

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left( \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_p(t) - f_p(t_0)}{t - t_0} \right)^T.$$

Trecând la limită când  $t \rightarrow t_0$  și ținând cont de Exercițiul 2.6.7, din relația precedentă obținem că  $f'(t_0)$  există dacă și numai dacă  $f'_k(t_0)$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , există. Relația (3) este evidentă. ■

**Corolar.** Funcția  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este derivabilă pe  $I$  dacă și numai dacă componentele sale,  $f_k : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , sunt derivabile pe  $I$ . În acest caz avem

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_p(t))^T, \quad (\forall)t \in I.$$

### 2.9.3. Exerciții.

1. Dacă  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este derivabilă în punctul  $t_0 \in I$ , atunci  $f$  este continuă în punctul  $t_0$ .

2. Dacă  $f, g : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  sunt funcții derivabile pe  $I$ , atunci să se arate că funcțiile  $f + g, \alpha f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p, \alpha \in \mathbf{R}$ , sunt derivabile pe  $I$  și au loc relațiile:

$$(f + g)' = f' + g',$$

$$(\alpha f)' = \alpha f', \alpha \in \mathbf{R}.$$

3. Dacă  $f, g : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  sunt derivabile pe  $I$ , atunci să se arate că funcția  $h : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , definită prin

$$h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle, \quad t \in I, \text{ este derivabilă pe } I \text{ și are loc relația } h'(t) = \langle f'(t), g'(t) \rangle, \quad (\forall)t \in I.$$

**2.9.4. Teoremă.** Fie  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  o funcție și  $\alpha < \beta$  două puncte din  $I$ . Dacă:

1)  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[\alpha, \beta]$ ;

2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(\alpha, \beta)$ , atunci

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f'(t)\|(\beta - \alpha).$$

**Demonstrație.** Dacă  $f'$  este nemărginită pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci  $\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f'(t)\| = +\infty$  și inegalitatea este satisfăcută. Să presupunem că  $f'$  este

mărginită și să alegem un număr oarecare  $M > \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f'(t)\|$ . Fie  $\xi$  un punct astfel încât  $\alpha < \xi < \beta$ . Deoarece  $f$  este derivabilă în  $\xi$ , avem

$$\lim_{t \rightarrow \xi} \frac{\|f(t) - f(\xi)\|}{|t - \xi|} = \|f'(\xi)\| < M.$$

Există deci o vecinătate  $V \subset (\alpha, \beta)$  a lui  $\xi$ , astfel încât (vezi exercițiul 2 de la 2.6.10)

$$\frac{\|f(t) - f(\xi)\|}{|t - \xi|} < M \text{ pentru orice } t \in V \text{ cu } t \neq \xi,$$

deci

$$\|f(t) - f(\xi)\| < M|t - \xi|, \text{ pentru orice } t \in V.$$

Notăm cu  $A$  mulțimea punctelor  $t \in [\alpha, \beta]$  care verifică inegalitatea precedentă. Mulțimea  $A$  nu este vidă deoarece  $V \subset A$ . Mai mult, mulțimea  $A$  este mărginită. Fie  $\alpha' = \inf A$  și  $\beta' = \sup A$ . Evident,  $\alpha', \beta' \in [\alpha, \beta]$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci  $f$  este continuă în  $\alpha'$ . Dacă luăm un șir  $(\alpha_n)_n$  de puncte din  $A$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha'$ , atunci avem

$$\|f(\alpha_n) - f(\xi)\| < M|\alpha_n - \xi|,$$

de unde, trecând la limită când  $n \rightarrow \infty$ , obținem

$$\|f(\alpha') - f(\xi)\| \leq M|\alpha' - \xi|$$

Analog se arată că

$$\|f(\beta') - f(\xi)\| \leq M|\beta' - \xi|$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \|f(\beta') - f(\alpha')\| &= \|(f(\beta') - f(\xi)) - (f(\alpha') - f(\xi))\| \leq \\ &\leq \|f(\beta') - f(\xi)\| + \|f(\alpha') - f(\xi)\| \leq M|\beta' - \xi| + M|\alpha' - \xi| = \\ &= M(\beta' - \xi) + M(\xi - \alpha') \end{aligned}$$

și deci

$$(4) \quad \|f(\beta') - f(\alpha')\| \leq M(\beta' - \alpha').$$

Arătăm că  $\alpha' = \alpha$  și  $\beta' = \beta$ .

Dacă, prin absurd, am presupune  $\alpha < \alpha'$ , raționând ca mai sus cu  $\alpha'$  în loc de  $\xi$ , putem găsi o vecinătate  $V' \subset (\alpha, \beta)$  a lui  $\alpha'$  astfel încât să avem

$$\|f(t) - f(\alpha')\| \leq M|t - \alpha'|, \text{ pentru orice } t \in V'.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Atunci, pentru orice } t \in V' \text{ cu } t < \alpha', \text{ avem} \\
&\|f(t) - f(\xi)\| = \|(f(t) - f(\alpha')) + (f(\alpha') - f(\xi))\| \leq \\
&\leq \|f(t) - f(\alpha')\| + \|f(\alpha') - f(\xi)\| \leq M|t - \alpha'| + M|\alpha' - \xi| = \\
&= M(\alpha' - t) + M(\xi - \alpha') = M(\xi - t),
\end{aligned}$$

deci orice  $t \in V'$  cu  $t < \alpha'$  aparține mulțimii  $A$ . Prin urmare,  $\alpha' = \alpha$ . Analog se arată că  $\beta' = \beta$ . Atunci inegalitatea (4) se scrie  $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$ .

Deoarece  $M > \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f'(t)\|$  a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f'(t)\|(\beta - \alpha). \blacksquare$$

### 2.9.5. Observație.

Considerăm o funcție  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , unde  $I$  este un interval din  $\mathbf{R}$ . Dacă funcția  $f$  nu este derivabilă într-un punct  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  ( $\overset{\circ}{I}$  este interiorul mulțimii  $I$ ) atunci limita raportului

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ nu există atunci când } t \rightarrow t_0. \text{ Totuși, în anumite}$$

cazuri, pot să existe limitele laterale în punctul  $t_0$  ale raportului precedent. Obținem atunci noțiunile de derivate laterale ale unei funcții într-un punct.

Astfel, vom spune că funcția  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *derivabilă la stânga în punctul*  $t_0 \in I$  dacă există

$$f'_s(t_0) := \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Elementul  $f'_s(t_0) \in \mathbf{R}^p$  se numește *derivata la stânga în punctul*  $t_0$  a funcției  $f$ .

Analog, vom spune că funcția  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *derivabilă la dreapta în punctul*  $t_0 \in I$  dacă există

$$f'_d(t_0) := \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Elementul  $f'_d(t_0) \in \mathbf{R}^p$  se numește *derivata la dreapta în punctul*  $t_0 \in I$  a funcției  $f$ .

Elementele  $f'_s(t_0), f'_d(t_0) \in \mathbf{R}^p$  se numesc *derivatele laterale ale funcției  $f$  în punctul*  $t_0$ .

În cazul când  $I$  este intervalul  $[\alpha, \beta]$ , atunci în punctul  $t_0 = \alpha$  are sens numai derivata la dreapta, iar în punctul  $t_0 = \beta$  are sens numai derivata la stânga.

### 2.9.6. Exerciții.

1. Să se arate că o funcție  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este derivabilă într-un punct interior  $t_0$  al intervalului  $I$ , dacă și numai dacă, este derivabilă la stânga și la dreapta în punctul  $t_0$  și derivatele laterale în punctul  $t_0$  sunt egale.

2. Să se arate că, dacă o funcție  $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  este derivabilă la stânga (respectiv, la dreapta) într-un punct  $t_0 \in I$ , atunci  $f$  este continuă la stânga (respectiv, la dreapta) în punctul  $t_0$ .

### 2.9.7. Exemple.

1. Considerăm funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definită prin  $f(t) = (|t|, t^2)^T \in \mathbf{R}^2$ . Atunci

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \left( \frac{|t|}{t}, \frac{t^2}{t} \right)^T = (-1, 0)^T,$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left( \frac{|t|}{t}, \frac{t^2}{t} \right)^T = (1, 0)^T.$$

Prin urmare,  $f'_s(0) = (-1, 0)^T$ ,  $f'_d(0) = (1, 0)^T$ . Cum  $f'_s(0) \neq f'_d(0)$ , deducem că funcția  $f$  nu este derivabilă în punctul  $t_0 = 0$ .

Cu toate acestea, funcția  $f$  este continuă în punctul  $t_0 = 0$ .

**2.** Considerăm funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \left( t \sin \frac{1}{t}, |t| \right)^T, & t \neq 0 \\ (0, 0)^T, & t = 0 \end{cases}$$

Funcția  $f$  este continuă în punctul  $t_0 = 0$ , dar nu are derivate laterale în acest punct, deoarece componenta

$$f_1(x) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

a funcției  $f$ , nu are limite laterale în acest punct.

### 2.9.8. Test de autoevaluare.

**1.** Să se calculeze derivatele următoarelor funcții în punctele indicate în fiecare caz în parte

a)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $f(t) = (t^2 - 1, 3t^2)$ ,  $t_0 = 1$ ;

b)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $f(t) = (t^3 + t, 2t^2 + t - 1)$ ,  $t_0 = -1$ ;

**R.** a)  $f'(1) = (2, 6)^T$ ; b)  $f'(-1) = (4, -3)^T$ .

**2.** Să se calculeze derivatele următoarelor funcții

a)  $f(t) = \left( \frac{t}{t^2 + 1}, 3t^2 + 2 \right)^T$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ;

b)  $f(t) = (\sin t, \arctg t)^T$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ;

c)  $f(t) = \left( \sqrt{1 + t^2}, \ln(1 + t^2) \right)^T$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

$$\mathbf{R. a) } f'(t) = \left( \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}, 6t \right)^T ; \mathbf{b) } f(t) = \left( \cos t, \frac{1}{1+t^2} \right)^T ;$$

$$\mathbf{c) } f(t) = \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

**3.** Să se calculeze derivatele laterale, în punctele indicate, ale următoarelor funcții:

$$\mathbf{a) } f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} (2t^2 - 1, t^2)^T, & t \leq 1 \\ (t^2 + 1, 3t^2)^T, & t > 1 \end{cases}, \quad t_0 = 1;$$

$$\mathbf{b) } f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} (1-t, 3t), & t < 1 \\ (t+1, 2t+1), & t \geq 1 \end{cases}, \quad t_0 = 0.$$

$$\mathbf{R. a) } f'_s(1) = (4, 2)^T, \quad f'_d(1) = (2, 6)^T ;$$

$$\mathbf{b) } f'_s(0) = (-1, 3)^T, \quad f'_d(0) = (1, 2)^T .$$

## 2.10. Integrarea funcțiilor vectoriale de variabilă reală

Considerăm o funcție  $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$  și

$f_k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , componentele sale. Dacă fiecare din componentele funcției  $f$  este integrabilă pe intervalul  $[\alpha, \beta]$ , atunci putem defini integrala funcției  $f$  pe  $[\alpha, \beta]$  prin

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt := \left( \int_{\alpha}^{\beta} f_1(t) dt, \int_{\alpha}^{\beta} f_2(t) dt, \dots, \int_{\alpha}^{\beta} f_p(t) dt \right)^T \in \mathbf{R}^p .$$

Folosind această definiție, rezultă că o serie întreagă de proprietăți ale integralei funcțiilor reale de variabilă reală rămân valabile pentru funcțiile vectoriale de variabilă reală.

În cele ce urmează, punem în evidență unele din aceste proprietăți.

1. Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci  $f$  este mărginită pe  $[\alpha, \beta]$ .

2. Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci pentru orice  $\xi \in (\alpha, \beta)$  avem:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\xi} f(t) dt + \int_{\xi}^{\beta} f(t) dt$$

3. Dacă  $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  sunt integrabile pe  $[\alpha, \beta]$  și  $\xi \in \mathbf{R}$ , atunci funcțiile  $f+g$ ,  $\xi f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$ , definite prin  $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ ,  $(\xi f)(t) = \xi f(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , sunt integrabile pe  $[\alpha, \beta]$  și, în plus,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f+g)(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\xi f)(t) dt = \xi \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

4. Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci funcția  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$ , definită prin

$$(2) \quad F(t) = \int_{\alpha}^t f(s) ds, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

este continuă pe  $[\alpha, \beta]$ .

5. Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este continuă într-un punct  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ , atunci funcția  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$ , definită în relația (2), este derivabilă în punctul  $t_0$  și  $F'(t_0) = f(t_0)$ .

### 2.10.1. Propoziție.

*Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci și funcția  $\|f\| : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\|f\|(t) = \|f(t)\|$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$  și*

$$(3) \quad \left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f(t)\| dt$$

**Demonstrație.** Fie  $f_k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , componentele funcției  $f$ .

Ținând cont de relația (1) și de definiția normei în  $\mathbf{R}^p$ , avem

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right\|^2 = \left( \int_{\alpha}^{\beta} f_1(t) dt \right)^2 + \dots + \left( \int_{\alpha}^{\beta} f_p(t) dt \right)^2$$

Fie

$$I_k := \int_{\alpha}^{\beta} f_k(t) dt, \quad \xi_k := \frac{I_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^p I_k^2}}, \quad k \in \mathbf{N}_p.$$

Mai întâi, observăm că  $\sum_{k=1}^p \xi_k^2 = 1$  și că

$$\sum_{k=1}^p \xi_k I_k = \sqrt{\sum_{k=1}^p I_k^2} = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right\|.$$

P de altă parte, în baza inegalității lui Schwarz, avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \xi_k I_k &= \sum_{k=1}^p \xi_k \int_{\alpha}^{\beta} f_k(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{k=1}^p \xi_k f_k(t) \right) dt \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sqrt{\sum_{k=1}^p \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^p f_k^2(t)} \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sqrt{\sum_{k=1}^p f_k^2(t)} \right) dt \end{aligned}$$

și deci

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f(t)\| dt. \quad \blacksquare$$

**Corolar.** Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$  și dacă există  $M > 0$  astfel încât  $\|f(t)\| \leq M$ ,  $(\forall) t \in [\alpha, \beta]$ , atunci

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right\| \leq M(\beta - \alpha). \quad \blacksquare$$

**2.10.2. Observație.** Proprietatea 5 sugerează introducerea noțiunii de primitivă pentru funcții  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$ . Astfel, vom spune că, funcția  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este o primitivă a funcției

$f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  dacă  $F$  este derivabilă pe  $[\alpha, \beta]$  și  $F'(t) = f(t)$ ,  $(\forall) t \in [\alpha, \beta]$ .

De asemenea, este evident faptul că studiul primitivelor funcțiilor  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  se reduce la studiul primitivelor componentelor sale,  $f_k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ .

De aici deducem că, orice funcție continuă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  admite primitive.

Mai mult, are loc și formula lui Leibniz – Newton: Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  este integrabilă și admite primitive pe  $[\alpha, \beta]$ , atunci

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\beta) - F(\alpha),$$

pentru orice primitivă  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^p$  a funcției  $f$ .

### 2.10.3. Test de autoevaluare.

1. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

a)  $f(t) = \left( t^2, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \right)^T$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ; b)  $f(t) = \left( \frac{1}{t}, e^t \right)^T$ ,  $t > 0$ ;

c)  $f(t) = \left( \ln t, -\frac{1}{t^2} \right)^T$ ,  $t > 0$ ;

d)  $f(t) = \left( \frac{1}{t^2-1}, \frac{1}{t^2+3} \right)^T$ ,  $t > 1$ .

**R.** a)  $\int f(t) dt = \left( \frac{t^3}{3}, \sqrt{t^2+1} \right)^T$ ; b)  $\int f(t) dt = (\ln t, e^t)^T$ ;

c)  $\int f(t) dt = \left( t \ln t - t, \frac{1}{t} \right)^T$ ;

d)  $\int f(t) dt = \left( \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}, \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \right)^T$ .

2. Să se calculeze următoarele integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 \left( t, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \right)^T dt; \quad \text{b) } \int_0^1 \left( \sqrt{t}, \frac{t}{t^2+1} \right)^T dt;$$

$$\text{c) } \int_0^1 \left( \sqrt{1-t^2}, \frac{t}{t^4+1} \right)^T dt; \quad \text{d) } \int_0^1 \left( te^t, \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} \right)^T dt.$$

$$\mathbf{R.} \quad \text{a) } \left( \frac{1}{2}, \sqrt{2}-1 \right)^T; \quad \text{b) } \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \ln 2 \right)^T; \quad \text{c) } \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)^T;$$

$$\text{d) } \left( e, \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \right)^T.$$

## 2.11. Derivata după o direcție. Derivate parțiale. Matrici Jacobiene

Peste tot în cele ce urmează  $A \subset \mathbf{R}^m$  va fi o mulțime deschisă.

Considerăm o funcție  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ . De asemenea, fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \in A$  și  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T \in \mathbf{R}^m$  un versor din  $\mathbf{R}^m$ , adică  $\|v\| = 1$ .

Deoarece  $A$  este mulțime deschisă, atunci există  $r > 0$  astfel încât  $B_r(a) \subset A$ . Pe de altă parte, pentru orice  $t \in (-r, r)$  avem  $d(a, a+tv) = \|a+tv-a\| = \|tv\| = |t|\|v\| = |t| < r$ ,

deci  $a+tv \in B(a, r) \subset A$ .

Prin urmare, pentru orice  $a \in \mathbf{R}^m$  și pentru orice versor  $v \in \mathbf{R}^m$ , există  $r > 0$  astfel încât  $a+tv \in A$  pentru orice  $t \in (-r, r)$ , adică astfel încât funcția  $f$  să fie definită în punctele  $a+tv, t \in (-r, r)$ .

**2.11.1. Definiție.** Vom spune că funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este *derivabilă în punctul  $a$  după direcția versorului  $v$*  dacă există

$$\frac{dt}{dv}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

$\frac{dt}{dv}(a)$  se numește *derivata lui  $f$  după versorul  $v$  în punctul  $a$* .

**2.11.2. Exemplu.** Considerăm funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x_1, x_2)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

Fie  $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbf{R}^m$  un versor. Atunci, dacă luăm  $\theta = (0, 0)^T$ , avem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}$$

de unde rezultă că

$$\frac{df}{dv}(\theta) = \begin{cases} \frac{v_1^2}{v_2}, & v_2 \neq 0 \\ 0, & v_2 = 0 \end{cases}$$

Prin urmare,  $\frac{df}{dv}(\theta)$  există pentru orice versor  $v \in \mathbf{R}^m$ .

Cu toate acestea, funcția  $f$  nu este continuă în punctul  $a = \theta = (0, 0)^T$ . În schimb, se poate arăta că  $f$  este continuă în  $\theta$  după direcția oricărui versor  $v \in \mathbf{R}^m$ .

**2.11.2. Exercițiu. 1.** Se arată că, dacă funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este derivabilă în punctul  $a$  după direcția

versorului  $v \in \mathbf{R}^m$ , atunci  $f$  este continuă în punctul  $a$  după direcția versorului  $v$ .

2. Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție definită pe mulțimea deschisă  $A$  și fie  $v \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|v\|=1$ . Să se arate că, dacă

$$\frac{df}{dv}(a), a \in A, \text{ există, atunci există și } \frac{df}{d(-v)}(a) \text{ și}$$

$$\frac{df}{d(-v)}(a) = -\frac{df}{dv}(a). \text{ În cele ce urmează, notăm cu } e_1, e_2, \dots, e_m$$

elementele bazei canonice din  $\mathbf{R}^m$ , adică

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_m = (0, 0, \dots, 0, 1)^T.$$

**2.11.4. Definiție.** Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție definită pe mulțimea deschisă  $A$  și fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \in A$ . Vom spune că funcția  $f$  este **derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_k$  în punctul  $a$**  dacă există  $\frac{df}{de_k}(a), k \in \mathbf{N}_p$ . Numărul real  $\frac{df}{de_k}(a)$  se

numește **derivata parțială a funcției  $f$  în raport cu variabila  $x_k$  în punctul  $a$**  și se notează cu  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ . Uneori se folosesc și

notațiile  $f'_{x_k}(a)$  sau  $D_k f(a)$ .

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &:= \frac{df}{de_k}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)}{t} \end{aligned}$$

Vom spune că funcția  $f$  este **derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_k$  pe mulțimea  $A$**  dacă  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  există pentru oricare

$a \in A$ .

**2.11.5. Observație.** Pentru funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , vom nota variabilele cu  $x$  și  $y$  în loc de  $x_1$  și  $x_2$ , iar pentru funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  vom nota variabilele cu  $x$ ,  $y$  și  $z$  în loc de  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$ .

În acest caz, funcția  $f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  este derivabilă în raport cu  $x$  și respectiv  $y$  în punctul  $a = (a_1, a_2)^T \in A$  dacă există:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

și respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Analog se procedează pentru funcțiile de trei variabile  $f : A \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, a_3 + t) - f(a_1, a_2, a_3)}{t}$$

unde  $a = (a_1, a_2, a_3)^T \in A \subset \mathbf{R}^3$ .

### 2.11.6. Exemplu.

Să considerăm funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x + y$ . Dorim să vedem dacă există  $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$  și

$\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ , unde  $a = (-1, 2)^T \in \mathbf{R}^2$ . Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-1+t, 2) - f(-1, 2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 + t}{t} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-1, 2+t) - f(-1, 2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 2t}{t} = -2$$

Deci  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2)$  există și  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = 1$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = -2.$$

**2.11.7. Definiție.** Vom spune că o funcție  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , definită pe mulțimea deschisă  $A$ , *este derivabilă parțial în punctul*  $a \in A$  dacă  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  există pentru orice  $k \in \mathbf{N}_p$ . Vom

spune că funcția  $f$  *este derivabilă parțial pe mulțimea*  $A$  dacă este derivabilă parțial în fiecare punct de mulțime  $A$ .

Dacă  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este derivabilă parțial pe mulțimea deschisă  $A$ , atunci putem defini *funcțiile derivate parțial a lui*

$f$  pe  $A$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , prin

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\mathbf{k}) - f(x)}{t} = \quad k \in \mathbf{N}_p, \in A$$

adică:  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{t}$$

$k \in \mathbf{N}_p, \in A$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in A$ .

Vom spune că funcția  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este *de clasa*  $C^1$  pe mulțimea  $A$  și notăm  $f \in C^1(A)$  dacă  $f$  este derivabilă parțial pe

A iar funcțiile  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$  sunt continue pe mulțimea  $A$ .

**2.11.8. Exemflu.** Să considerăm din nou funcția din exemplul 1.11.6.  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x,y) = x^2y + xy^2 + x + y$ , și să calculăm funcțiile derivate parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  ale lui  $f$ . Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(2xy + ty^2 + y^2 + 1)}{t} = 2xy + y^2 + 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(x^2 + 2xy + tx + 1)}{t} = x^2 + 2xy + 1 \end{aligned}$$

Observăm că  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 1$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -2$ , obținând

astfel rezultatele de la exemplul 2.11.6.

**2.11.9. Definiție.** Dacă  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $A$ , atunci funcția  $\nabla f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin:

$$(\nabla f)(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right)^T \in \mathbf{R}^m, \text{ se}$$

numește **gradientul funcției**  $f$ . Uneori vom folosi și notația  $\nabla_x f$  pentru gradientul funcției  $f$ .

**2.11.10. Observație.**

Fie  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție definită pe mulțimea deschisă  $A$ . Regula de calcul a funcțiilor directe parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ,

$\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$  este următoarea:  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  se obține *derivând*

*funcția f în raport cu variabilele  $x_k$  și considerând constante variabilele  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$ .*

Astfel, pentru o funcție de două variabile,  $f: A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  se obține derivând funcția f în raport cu x și considerând

y constant, iar  $\frac{\partial f}{\partial y}$  se obține derivând funcția f în raport cu y și

considerând x constant.

Bazându-ne pe această regulă, putem deduce cu ușurință faptul că, pentru funcțiile de clasa  $C^1$  pe A,  $f, g: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , sunt adevărate următoarele formule:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f + g) = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial g}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha f) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_k}, \alpha \in \mathbf{R},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k} g - f \frac{\partial g}{\partial x_k}}{g^2};$$

pentru orice  $k \in \mathbf{N}_m$ .

Considerăm două exemple. Pentru funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} + \ln(1 + x^2 + y^2), \text{ avem}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{2x}{1 + x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

Pentru funcțiile  $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$  avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^3 x_3 x_4^2 + x_2 + x_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1^2 x_2^2 x_3 x_4^2 + x_1 + x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2 x_2^3 x_4^2 + x_1 + x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 2x_1^2 x_2^3 x_3 x_4 + x_2 + x_3.$$

### 2.11.11. Matrici Jacobiene.

Considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , definită pe mulțimea deschisă  $A$ , și fie  $f_k: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , componentele funcției  $f$ .

Cu ajutorul componentelor funcției  $f$ , putem introduce noțiunea de derivată parțială într-un punct și pentru funcțiile vectoriale.

Astfel vom spune că funcția  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , definită pe mulțimea deschisă  $A$ , este **derivabile parțial într-un punct**  $a \in A$  dacă fiecare din funcțiile componente  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sunt derivabile parțial în punctul  $a$ .

Prin urmare,  $f$  este derivabilă parțial în punctul  $a \in A$  dacă  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$  există pentru orice  $i \in \mathbf{N}_p$  și orice  $j \in \mathbf{N}_m$ .

În acest caz putem pune în evidență matricea

$$(1) J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \in M_{pm}(\mathbf{R}),$$

care se numește **matrice Jacobiană a funcției  $f$  în punctul  $a$** .

Dacă  $p = m$ , atunci  $J_f(a) \in M_{pm}(\mathbf{R})$  este o matrice pătratică de ordinul  $m$  iar determinantul ei se numește **jacobianul funcției  $f$  în punctul  $a$  sau determinantul funcțiilor al funcției  $f_1, f_2, \dots, f_m$  în punctul  $a$** .

Notăm

$$(2) \left| \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)} \right| (a) = \det(J_f(a)).$$

Să considerăm un exemplu. Pentru funcția  $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , definește prin  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 + x_3 - x_4, 4x_3 x_4, + x_1 x_2, x_1^2 x_3 + x_2 x_4^2)^T \in \mathbf{R}^3$ , într-un punct oarecare  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ , avem:

$$J_{f(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & x_1 & 4x_4 & 4x_3 \\ 2x_1 x_3 & x_4^2 & x_1^2 & x_2 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbf{R}).$$

De exemplu, pentru  $x = (-1, 1, 2, 3)^T \in \mathbf{R}^4$  avem:

$$J_f(-1,1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 8 & 12 \\ -4 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.11.12. Test de autoevaluare

1. Pentru funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $f(x,y) = xy + x + y + 2$ , să se calculeze  $\frac{df}{dv}(a)$ ,  $a = (1,-1)^T$  și  $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$ .

**R.**  $\frac{df}{dv}(1,-1) = 2/\sqrt{5}$ .

2. Să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x_2 + y_2}, & (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0, & (x,y)^T = (0,0)^T. \end{cases}$$

a) Să se arate că  $f$  nu este continuă în punctul  $(0,0)^T$ .

b) Să se arate că  $\frac{df}{dv}(0,0)$  există pentru  $v = (1,0)^T$ .

c) Să se arate că  $\frac{df}{dv}(0,0)$  nu există pentru  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ .

d) Să se arate că  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  există.

3. Să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x+y-3}, & x+y-3 \neq 0 \\ xy, & x+y-3 = 0 \end{cases}$$

Fie  $a = (1,2)^T$  și  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ ,  $w = (1,0)^T$ .

a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $a$ .

b) Să se studieze existența derivatelor  $\frac{df}{dv}(a)$ ,  $\frac{df}{dw}(a)$ .

c) Să se studieze existența derivatelor parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

4. Să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții:

a)  $f(x,y) = x^2y^2 + x^3y + xy^3 + xy + x + y + 3, (x,y)^T \in \mathbf{R}^2$ ;

b)  $f(x,y) = e^{x^2-y^2}, (x,y)^T \in \mathbf{R}^2$ ;

c)  $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), (x,y)^T \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ ;

d)  $f(x,y) = x^y, (x,y)^T \in \mathbf{A} := \{(x,y)^T \mid x > 0, y > 0\}$ ;

e)  $f(x,y,z) = x^2y^2z^2 + xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1$

R. a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 3x^2y + y^3 + y + 1,$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + x^3 + 3xy^2 + 1;$$

b)  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{x^2-y^2}, \frac{\partial f}{\partial x} = -2ye^{x^2-y^2}, \quad c) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}};$$

d)  $\frac{\partial f}{\partial y} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x; \quad e) \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2z^2 + yz + y + z + 1;$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2yz^2 + xz + x + z + 1; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2y^2z + xy + x + y + 1.$$

5. Să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $f(x,y,z) = (x^2 - xy + 2, xyz, y^2 = yz + x)$ .

a) Să se calculeze  $J_f(1,-1,2)$ .

b) să se calculeze  $\left| \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)} \right| (1,-1,2)$

$$\mathbf{R}: \text{a) } J_f(1, -1, 2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } -1$$

**6.** Să considerăm funcția  $f: A \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ .

a) Să se determine domeniul de definiție al funcției  $f$ .

b) Să se arate ca  $f$  satisface egalitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}.$$

## 2.12. Derivate parțiale de ordin superior

Fie  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , o funcție având derivate parțiale continue pe mulțimea deschisă,  $A$  adică  $f$  este de clasă  $C^1$  pe mulțimea  $A$ .

**2.12.1. Definiție.** Vom spune că funcția  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , de clasa  $C^1$  pe mulțimea  $A$ , *are derivate parțiale de ordinul al doilea în raport cu variantele*  $x_i, x_j$ , (în această ordine) în punctul  $a$ , dacă funcția derivată parțial  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ;  $A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  are

derivată parțială în raport cu variabila  $x_i$  în punctul  $a$ , adică dacă există

$$(1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{t}.$$

Numărul  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  se numește *derivată parțială de*

*ordinul al doilea a funcției  $f$  în punctul  $a$ .*

Vom spune că funcția  $f$  *derivabilă parțială de ordinul al doilea pe mulțimea  $A$*  dacă  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  există pentru orice  $a \in A$

și pentru orice  $i, j \in \mathbf{N}_m$ .

În acest caz, putem defini *funcțiile derivației parțiale de ordinul al doilea ale lui f* prin:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right), \quad x \in A, \quad i, j \in \mathbf{N}_m.$$

Dacă  $j = i$ , atunci  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$  se notează cu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Vom spune că funcțiile  $f$  este *de clasa*  $C^2$  pe mulțimea  $A$  și notăm  $f \in C^2(A)$ , dacă  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  există și sunt continue pe mulțimea  $A$ , pentru orice  $i, j \in \mathbf{N}_m$ .

Dacă  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  există pentru orice  $x \in A$  și pentru orice  $i, j \in \mathbf{N}_m$ , atunci putem pune în evidență matricea

$$(3) \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x) \end{pmatrix},$$

care se numește *matrice hessiană a funcției f în punctul x*.

**2.12.2. Exemple.1.** Considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin:

$$f(x, y) = x^3 y^3 + x^2 y^2 + xy + x + y + 1$$

și ne propunem să calculăm derivatele parțiale de ordinul al doilea al funcției  $f$ .

Mai întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^3 + 2xy^2 + y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3 y^2 + 2x^2 y + x + 1.$$

Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^3 + 2xy^2 + y + 1) = 6xy^3 + 2y^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^3y^2 + 2x^2y + x + 1) = \\ &= 9x^2y^2 + 4xy + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^3 + 2xy^2 + y + 1) = \\ &= 9x^2y^2 + 4xy + 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^3y^2 + 2x^2y + x + 1) = 6x^3y + 2x^2.$$

Matricea hessiană a funcției  $f$  este

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^3 + 2y^2 & 9x^2y^2 + 4xy + 1 \\ 9x^2y^2 + 4xy + 1 & 6xy^3 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

2. Să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y)^T \neq 0 \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

Pentru  $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$  avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^4 - y^4) + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^4 - y^4) - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{iar } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

În schimb, avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 1.,$$

Prin urmare,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ , care arată că

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  *depind de ordinea în care sunt luate*

*variabilele*  $x$  și  $y$ .

**2.12.3. Teoremă (Criteriul lui Schwarz)** Dacă  $f: A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de clasă  $C^2$  pe mulțimea deschisă  $A$  atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b), \quad (\forall) (a,b)^T \in A.$$

**Demonstrație.** Fie  $(x,y)^T \in A$  un punct oarecare astfel încât  $x \neq a$  și  $y \neq b$ . Considerăm raportul  $g(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x,b) - f(a,y) + f(a,b)}{(x-a)(y-b)}$

și funcția  $\varphi(t) = \frac{f(t,y) - f(t,b)}{y-b}$ , unde  $t \in [a,x]$  sau  $t \in [x,a]$ , după cum

$a < x$  sau  $x < a$ .

Funcția  $\varphi$  este derivabilă pe acest interval și

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,b)}{y-b}.$$

$$\text{Deoarece } \varphi(x) = \frac{f(x,y) - f(x,b)}{y-b}, \quad \varphi(a) = \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b},$$

deducem că  $g(x,y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a}$ . Aplicând teorema lui Lagrange funcției

$\varphi$ , rezultă că există  $\xi$ , cuprins între  $a$  și  $x$  astfel încât să avem:  $g(x,y) =$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(\xi), \text{ adică :}$$

$$g(x,y) = \varphi'(\xi) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)}{y - b}.$$

Funcția  $\varphi_1(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, s)$ , definită pe  $[b, y]$  sau  $[y, b]$ , după cum

$b < y$  sau  $y < b$ , este derivabilă pe acest interval (deoarece  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  există pe  $A$ )

$$\text{și } \varphi_1'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, s).$$

Aplicând teorema lui Lagrange funcția  $\varphi_1$ , rezultă că există  $\eta$ , cuprins între  $b$  și  $y$ , astfel încât

$$\frac{\varphi_1(y) - \varphi_1(b)}{y - b} = \varphi_1'(\eta),$$

$$\text{adică } \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)}{y - b} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta),$$

$$\text{de unde } g(x, g) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$

Urmând un raționament analog pentru funcția  $\psi(t) = \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a}$

deducem că există  $\eta'$ , cuprins între  $b$  și  $y$ , astfel încât

$$g(x, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta') - \frac{\partial f}{\partial y}(a, \eta')}{x - a}.$$

Folosind acum funcția  $\psi_1(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, \eta')$ , deducem că există  $\xi'$ , cuprins între  $a$  și  $x$ , astfel încât

$$g(x, g) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta'),$$

Prin urmare,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi', \eta')$ .

Fie acum  $(x_n, y_n)_n^T$  un șir cu și de elemente din  $A$  cu  $x_n \neq a$ ,  $y_n \neq b$  și astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)^T = (a, b)^T$ . Din cele mai arătate mai sus, rezultă că pentru fiecare  $n \in \mathbf{N}$ , există punctele  $\xi_n, \xi'_n$  cuprinse între  $a$  și  $x_n$ , și punctele  $\eta_n, \eta'_n$  cuprinse între  $b$  și  $y_n$ , astfel încât:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_n, \eta_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi'_n, \eta'_n).$$

Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n = a$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta'_n = b$ ,

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n, \eta_n)^T = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi'_n, \eta'_n)^T = (a, b)^T$ . Cum funcția  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  sunt continuă, deducem că.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_n, \eta_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi'_n, \eta'_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b).$$

Prin urmare trecând la limită în egalitate (4), obținem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b). \blacksquare$$

**2.13.4. Observație.** Este evident că pentru o funcție  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  putem defini, dacă este posibil, derivatele parțiale de ordinul trei, patru etc.

Astfel, derivata de ordinul trei a funcției  $f$ , în raport cu variabilele  $x_i, x_j, x_k$  (în această ordine) se definește prin:

$$(5) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right).$$

În general derivata parțială de ordinul  $p \in \mathbf{N}$  a funcției  $f$ , în raport cu variabilele  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$  are forma

$$(6) \quad \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p} f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}}, \quad \alpha_j \in \mathbf{N}, \quad j \in \mathbf{N}_p,$$

iar  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = p$ .

De exemplu pentru funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1} y^\beta, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \beta x^\alpha y^{\beta-1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} y^\beta, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}. \end{aligned}$$

Derivatele parțiale de ordinul al treilea sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-2} y^\beta, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \alpha\beta(-1)x^{\alpha-1} y^{\beta-2}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \alpha(\beta-1)x^{\alpha-1} y^{\beta-2} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \alpha(\beta-1)x^{\alpha-2} y^{\beta-1} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Facem observația că, dacă toate derivatele parțiale de ordinul  $p$ , ale unei funcții  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , **sunt continue pe mulțimea deschisă  $A$ , atunci expresia (6) nu depinde de de ordinea indicilor  $i_1, i_2, \dots, i_p$ .**

### 2.13.5. Test de evaluare.

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor:

a)  $f(x,y) = x^3 + xy^2, \quad (x,y)^T \in \mathbf{R}^2.$

b)  $f(x,y,z) = x^3z + xy^3 + xyz^3, \quad (x,y,z)^T \in \mathbf{R}^3.$

**R.** a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x. \quad \text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2z + y^3 + yz^3,$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^3 + yz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^3 + 3xyz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xz,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2 + z^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 3x^2 + 3yz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 3y^2 + z^3,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 3xz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 3x^2 + 3yz^2,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 3yz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 3xz^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 3x^2 + 3yz^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6xyz.$

**2.** Să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}^T \rightarrow \mathbf{R},$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Să se arate că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

**3.** Să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R},$

$$f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2.$$

Să se calculeze  $H_f(2,-8,-4)$

**R.**  $H_f(2,-8,-4) = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. Fie  $a, b > 0$  constatați și  $f(x, y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{(y-b)^2}{4a^2x}}$ ,  $x > 0$ .

Să se arate că  $\frac{\partial f}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

## 2.14. Funcții diferențiabile.

Fie o funcție  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  definită pe mulțimea deschisă  $A$ .

**2.14.1 Definiție.** Vom spune că funcția  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *diferențiabilă în punctul*  $a$  dacă există o aplicație liniară  $T: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$ , astfel încât:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = \theta.$$

Aplicația liniară  $T: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$ , satisfăcând relația (1), se notează cu  $df(a)$  și se *numește diferențiala funcției  $f$  în punctul*  $a \in A$ .

Vom spune că funcția  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *diferențiabilă pe mulțimea*  $A$  dacă  $df(a)$  există pentru orice  $a \in A$ .

**2.14.2. Observație.** Considerând funcția  $\psi: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , definită prin

$$(2) \psi(x) = \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|}, \text{ atunci relația (1) se}$$

poate scrie sub formă echivalentă:

$$(3) f(x) = f(a) + T(x - a) + \|x - a\| \psi(x), \quad (\forall) x \in A,$$

unde  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$ .

**2.14.3. Exercițiu.** Să se arate că dacă,  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este *diferențiabilă în punctul*  $a \in A$ , atunci aplicația liniară  $T = df(a)$  este *unic determinată de relația* (3).

**2.14.4. Exemplu.** Orice aplicație liniară  $T: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este

diferențabilă pe  $\mathbf{R}^m$  și  $dT(a) = T$ , pentru orice  $a \in \mathbf{R}^m$ .

Într-adevăr, deoarece  $T(x) - T(a) - T(a-x) = T(x) - T(a) - T(x) + T(a) = \theta$ ,  $(\forall) x \in \mathbf{R}^m$ , rezultă că relația (1) este în mod evident satisfăcută.

**2.14.5. Observație.** Fie  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  a funcției definite pe mulțimea deschisă  $A$  și fie  $a \in A$ . Se poate arăta că funcția  $f$  este diferențabilă în punctul  $a$ , dacă și numai dacă componentele sale,  $f_k: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , sunt diferențabile în punctul  $a$ . În acest caz, diferențiala  $df(a): \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  are drept componente aplicațiile liniare  $df_k(a): \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_p$ , adică  $df(a) = (df_1(a), df_2(a), \dots, df_p(a))^T$ .

**2.14.6. Teoremă.** Fie  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  o funcție definită pe mulțimea deschisă  $A$ . Sunt adevărate următoarele a funcției:

(a) Dacă  $f$  este diferențabilă în punctul  $a \in A$ , atunci  $f$  este continuă în punctul  $a$ .

(b) Dacă  $f$  este diferențabilă în punctul  $a \in A$ , atunci  $\frac{df}{dv}(a)$  există orice versor  $v \in A$  și

$$(4) \frac{df}{dv}(a) = df(a)(v).$$

În particular,  $f$  este derivabilă parțial în punctul  $a \in A$  și

$$(5) \frac{df}{dv}(a) = df(a)(e_k), \quad (\forall) k \in \mathbf{N}_p.$$

(c) Dacă  $f$  este de clasă  $C^1$  pe  $A$ , atunci  $f$  este diferențabilă pe  $A$  și

$$(6) df(a)(h) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k, \quad (\forall) h \in \mathbf{R}^m.$$

**Demonstrație.** (a) Fie  $(x_n)_n$  un șir de elemente din  $A$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Atunci din relația (2) rezultă

$f(x_n) = f(a) + df(a)(x_n - a) + \|x_n - a\| + \psi(x_n)$ ,  $(\forall) n \in \mathbf{N}$ , de unde, ținând cont de faptul că  $df(a): \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este aplicație liniară și de exercițiul

6 de la 2.7.5, rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  și deci  $f$  este continuă în punctul  $a$ .

(b) Deoarece  $A$  este mulțimea deschisă, există  $r > 0$  astfel încât  $B_r(a) \subset A$ . Atunci pentru orice  $t \in (-r, r)$  avem  $a + tv \in A$ , unde  $v \in \mathbf{R}^m$  și  $\|v\| = 1$ . Prin urmare ținând cont de relația (2), avem

$$\begin{aligned} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} &= \frac{df(a)(tv) + \|tv\| \psi(a+tv)}{t} = \\ &= df(a)(v) + \frac{\|t\|}{t} \psi(a+tv), \end{aligned}$$

de unde rezultă că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df(a)(v)$ ,

adică  $\frac{df}{dv}(a) = df(a)(v)$ . În particular, pentru  $v = e_k$  ( $e_k$  vectorul baze

canonice) se obține  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = df(a)(e_k)$ ,  $k \in \mathbf{N}_m$ .

(c) Fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \in A$  și  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in A$ .

Pentru fiecare  $k \in \mathbf{N}_p$ , considerăm funcția

$\varphi_k(t) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_m)$ , definită pe intervalul  $[a_k, x_k]$  sau  $[x_k, a_k]$ , după cum  $a_k < x_k$  sau  $x_k < a_k$ .

Aplicând teorema lui Lagrange pentru funcția  $\varphi_k$ , deducem că există

$\xi_k$  situat între  $a_k$  și  $x_k$  astfel încât

$$\varphi_k(x_k) - \varphi_k(a_k) = \varphi'_k(\xi_k)(x_k - a_k),$$

adică  $f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_m) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_m)(x_k - a_k).$$

Prin urmare,  $f(x) - f(a) = [f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, x_2, \dots, x_m)] +$

$[f(a_1, x_2, x_3, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_m)] + \dots + [f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) -$

$f(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m)] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_m)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_2, \xi_2, x_2, \dots, x_m)(x_2 -$

$a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, \xi_m)(x_m - a_m)$ .

Considerăm aplicația liniară  $T: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k \quad \text{Atunci } T(x-a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) (x_k - a_k) \text{ și deci}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}$$

$$\frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right] (x_1 - a_1)}{\|x-a\|} +$$

$$\frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right] (x_2 - a_2)}{\|x-a\|} + \dots +$$

$$\frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a_1, \dots, a_{m-1}, \xi_m) - \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right] (x_m - a_m)}{\|x-a\|} \text{ și fiecare din}$$

aceste limite este zero, deoarece rapoartele

$$\frac{x_1 - a_1}{\|x-a\|}, \frac{x_2 - a_2}{\|x-a\|}, \dots, \frac{x_m - a_m}{\|x-a\|}$$

sunt mărginite  $\left( \left| \frac{x_k - a_k}{\|x-a\|} \right| = \frac{|x_k - a_k|}{\|x-a\|} = \frac{\|x_k - a_k\|}{\|x-a\|} = 1, (\forall) k \in \mathbf{N}_m \right)$ , iar  $f$

fiind de clasă  $C^1$  pe  $A$ , expresiile din parantezele drepte au limitele zero când  $x \rightarrow a$ . Prin urmare,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

și deci  $f$  este diferențiabilă în orice punct pe  $a \in A$ .

Mai mult, deoarece  $df(a) = T$  și din modul cum am definit aplicația  $T$ , rezultă că

$$df(a)(h) = T(h) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k.$$

**1.14.7. Observație.** Dacă  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $A$ , Atunci conform teoremei precedente și observației 1.14.5. componentele funcției  $f$ ,  $f_k: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$   $k \in \mathbf{N}_p$ , sunt diferențiabile pe  $A$ . Mai mult, pentru orice  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T \in \mathbf{R}^m$  avem

$$\begin{aligned}
df(a)(h) &= (df_1(a)(h), df_2(a)(h), \dots, df_p(a)(h))^T = \\
&= \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) h_k, \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) h_k, \dots, \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a) h_k \right)^T = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, în raport cu bazele canonice din  $\mathbf{R}^m$  și  $\mathbf{R}^p$ , aplicația liniară  $df(a): \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  admite reprezentarea matriceală

$$(7) \quad df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \in M_{pm}(\mathbf{R}).$$

Matricea  $df(a)$  este chiar matricea Jacobiană a funcției  $f$  în punctul  $a$  (vezi 2.11.11).

**2.14.8. Observație.** Fie  $f: A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție definită pe mulțimea deschisă  $A$ . Pentru orice  $k \in \mathbf{N}_m$ , definim aplicațiile  $pr_k: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $pr_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_k$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbf{R}^m$ ,  $k \in \mathbf{N}_m$ . Aplicațiile  $pr_k$ ,  $k \in \mathbf{N}_m$ , sunt evident liniare și se numesc *aplicațiile de proiecție*.

Deoarece  $pr_k: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{N}_m$ , sunt liniare, atunci pentru orice  $a \in \mathbf{R}^m$ . (vezi exemplul 2.14.4)  $d(pr_k)(a) = pr_k$ ,  $(\forall) k \in \mathbf{N}_m$ , adică  $dx_k = pr_k$ ,  $k \in \mathbf{N}_m$  și deci  $dx_k(a)(h) = h_k$ ,  $(\forall) k \in \mathbf{N}_m$ ,  $(\forall) h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T \in \mathbf{R}^m$ . Prin urmare, formula

(6) devine

$$(8) \quad df(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k(a).$$

Dacă  $f$  este diferențabilă în orice punct  $a \in A$  atunci putem scrie

$$(9) \quad df = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

De asemenea, să mai observăm că formula (6) se poate scrie și sub forma

$$(10) \quad df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

sau (11)  $df(a)(h) = (\nabla f(a))^T h$ ,

unde  $\nabla f(a)$  este gradientul în punctul  $a \in A$  al funcției  $f$  (vezi Definiția 2.11.9). Ținând cont de relația (10), relația (4) se poate scrie sub forma

$$(12) \quad \frac{df}{dv}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle, \quad v \in \mathbf{R}^m, \quad \|v\| = 1.$$

**2.14.9. Exemple. 1.** Considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$ . Fie  $a = (1,1)^T$ . și  $v = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$(-1,2)^T$  Atunci  $\nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)^T = (-4x, -2y)^T$ , iar

$$df(1,1)(h_1, h_2) = (\nabla f(1,1))^T \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-4, -2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 4h_1 - 2h_2 \text{ deci}$$

$$df(1,1)(h) = -4h_1 - 2h_2, \quad (\forall) h = (h_1, h_2)^T \in \mathbf{R}^m.$$

De asemenea

$$\frac{df}{dv}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), v \rangle = \langle (-4, -2)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T \rangle = 0.$$

**2.** Considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definită prin

$$f(x,y,z) = (xyz, 3x - 2yz)^T,$$

Atunci

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix},$$

unde  $f_1: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_1(x,y,z) = xyz$  și  $f_2: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_2(x,y,z) = 3x - 2yz$ , sunt componentele funcției  $f$ . Deci:

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 3 & -2z & -2y \end{pmatrix}.$$

De exemplu,

$$df(1,2,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

**2.14.10. Teorema.** Fie  $f: B_r(a) \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  pe bila deschisă  $B_r(a)$ ,  $a \in \mathbf{R}^m$ . Dacă  $v \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|v\| = 1$ , atunci  $\frac{df}{dv}(a)$  are valoarea maximă  $\|\nabla f(a)\|$  când  $v$  și  $\nabla f(a)$  au aceeași direcție și valoare minimă  $-\|\nabla f(a)\|$  când  $v$  și  $-\nabla f(a)$  au aceeași direcție.

**Demonstrație.** Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Schwarz și ținând cont de relația (12) avem

$$\left| \frac{df}{dv}(a) \right| = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \|\nabla f(a)\| \|v\| = \|\nabla f(a)\|,$$

adică  $-\|\nabla f(a)\| \leq \frac{df}{dv}(a) \leq \|\nabla f(a)\|$ .

Dacă presupunem  $\nabla f(a) \neq \mathbf{0}$ , atunci pentru  $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$  avem

$$\begin{aligned} \frac{df}{d(-v)}(a) &= \langle f(a), -v \rangle = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \rangle = \\ &= \frac{\|\nabla f(a)\|^2}{\|\nabla f(a)\|} = \|\nabla f(a)\| \text{ și } \frac{df}{d(-v)}(a) = -\|\nabla f(a)\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**2.14.11. Observație.** Cu alte cuvinte, teorema

precedentă, exprimă faptul că  $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$  reprezintă **direcția creșterii cele mai rapide a lui  $f$**  (iar  $-v$  reprezintă **direcția descreșterii cele mai rapide a lui  $f$** ) **relativ la punctul  $a$** .

De exemplu, să considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y$ .

$$\text{Atunci } \nabla f(x,y) = (-4x, -2y)^T.$$

Prin urmare,  $\nabla f(1,1) = (-4, -2)^T$  și direcția creșterii celei mai rapide a lui  $f$  relativ la punctul  $a = (1,1)^T$  este

$$v = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T, \text{ iar direcția descreșterii}$$

cele mai rapide a lui  $f$  relativ la punctul  $a = (1,1)^T$  este

$$v = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T.$$

$$\text{Mai mult } \frac{df}{dv}(1,1) = \|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{20},$$

$$\frac{df}{d(-v)}(1,1) = \|\nabla f(1,1)\| = -\sqrt{20}.$$

### 2.14.12. Test de evaluare

1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$ . Să se determine  $\frac{df}{dv}(1,1)$ , pentru  $v = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ .

$$\mathbf{R.} \quad \frac{df}{dv}(1,1) = 3\sqrt{2}.$$

2. Să se calculeze  $df(1,2)$  pentru următoarele funcții  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ .

a)  $f(x,y) = x^2y - 3xy^2 + x + y + 1$ ;

b)  $f(x,y) = x^2y^2 + xy - 2x - y + 3$ .

$\mathbf{R.}$  a)  $df(1,2)(h_1, h_2) = -7h_1 - 10h_2$ ;

b)  $df(1,2)(h_1, h_2) = 8h_1 + 4h_2$ .

3. Să se calculeze  $df(1,2,-1)$  și  $\frac{df}{dv}(1,2,-1)$  pentru funcția  $f$ :

$$\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, f(x,y,z) = xyz \text{ și } v = (-1,1,1)^T.$$

$$\mathbf{R}. df(1,2,-1)(h_1,h_2,h_3) = -2h_1 - h_2 + 2h_3;$$

$$\frac{df}{dv}(1,2,-1) = df(1,2,-1)(-1,1,1) = 2.$$

4. Să se determine matricea Jacobiană în punctul  $a$  și  $df(a)(h)$  pentru

$$a) f(x,y) = (xy^2, x^2y)^T, \quad a = (-1,1)^T;$$

$$b) f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z, xyz)^T, \quad a = (-1,1,-1)^T.$$

$$\mathbf{R}. a) J_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad df(-1,1)(h_1,h_2) = (h_1 - 2h_2, -2h_1 + h_2)^T.$$

$$b) J_f(-1,1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad df(-1,1,-1)(h_1,h_2,h_3) = (-2h_1 + 2h_2 - 2h_3,$$

$$h_1 + h_2 + h_3, -h_1 + h_2 - h_3)^T$$

5. Să se determine direcția creșterii (respectiv, descreșterii) cele mai rapide a funcției

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x,y) = 80 - 20xe^{-\frac{1}{20}(x^2+y^2)}, \text{ relativ la punctul } a = (0,0)^T.$$

$$\mathbf{R}. v = (-1,0)^T$$

6. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0, & (x,y)^T = (0,0)^T. \end{cases}$$

a) Să se arate că  $f$  este continuă în  $(0,0)^T$ ;

b) Să se arate că  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  există;

c)  $f$  nu este diferențiabilă în  $(0,0)^T$ .

7. Să se arate că funcția  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & (x, y)^T = (0, 0)^T. \end{cases}$$

este derivabilă în  $(0, 0)^T$  după orice direcție, dar nu este diferențiabilă în  $(0, 0)^T$ .

## 2.15. Diferențiala funcțiilor compuse. Derivatele parțiale ale funcțiilor compuse

**2.15.1 Teoremă.** Fie  $A \subset \mathbf{R}^m, B \subset \mathbf{R}^p$  mulțimi deschise,

$f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow B \subset \mathbf{R}^p$  diferențiabilă în punctul  $a \in A$  și  $g : B \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$  diferențiabilă în punctul  $b = f(a) \in B$ .

Atunci  $g \circ f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^q$  este diferențială în punctul  $a$  și

$$(1) \quad d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a).$$

**Demonstrație.** Deoarece  $f$  este diferențiabilă în  $a$ , iar  $g$  este diferențiabilă în  $b=f(a)$ , atunci, ținând seama de relația (3) de la 2.14, avem

$$(2) \quad f(x) = b + df(a)(x - a) + \|x - a\| \psi_1(x), \quad (\forall)x \in A \text{ cu } \lim_{x \rightarrow a} \psi_1 = 0 \text{ și}$$

$$(3) \quad g(y) = g(b) + dg(b)(y - b) + \|y - b\| \psi_2(y), \quad (\forall)y \in B$$

cu  $\lim_{y \rightarrow b} \psi_2(y) = 0$ . Înlocuind pe  $y$  cu  $f(x)$ ,  $x \in A$ , din (3) obținem

$$g(f(x)) = g(b) + dg(b)(f(x) - b) + \|f(x) - b\| \psi_2(f(x)), \text{ de unde, ținând seama de (2), rezultă că } g(f(x)) = g(f(a) + dg(b)(df(a)(x - a) + \|x - a\| \psi_1(x)) + \|df(a)(x - a) + \|x - a\| \psi_1(x)\| \psi_2(f(x))$$

Ținând seama de faptul că  $dg(b) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$  este o aplicație liniară, ultima egalitate devine:

$$(4) \quad g(f(x)) = g(f(a)) + dg(b)(df(a)(x-a) + \|x-a\| \psi_1(x) + \|df(a)(x-a) + \|x-a\| \psi_1(x)\| \psi_2(f(x))).$$

Dacă notăm

$$\psi(x) = \|x-a\| dg(b)(\psi_1(x)) + \|df(a)(x-a) + \|x-a\| \psi_1(x)\| \psi_2(f(x))$$

atunci  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$  și egalitate (4) se poate pune sub forma

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (dg(b) \circ df(a)(x-a) + \|x-a\| \psi(x)), \quad x \in A,$$

ceea ce arată că  $g \circ f$  este diferențiabilă în punctul  $a \in A$  și că

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a). \quad \blacksquare$$

### 2.15.2 Derivatele parțiale ale funcțiilor compuse

Dacă ținem cont de faptul că, în raport cu bazele canonice, matricea asociată diferențialei unei funcții într-un punct, coincide cu matricea jacobiană a funcției în acel punct (vezi 2.14.7), atunci, în condițiile teoremei precedente, avem

$$(5) \quad J_{g \circ f}(a) = J_g(b) J_f(a).$$

Dacă notăm cu  $f_1, f_2, \dots, f_p$  corespunde funcției  $f$ , cu  $g_1, g_2, \dots, g_q$  componentele funcției  $g$ , iar cu  $h_1, h_2, \dots, h_q$  componentele funcției  $h = g \circ f$ , atunci ținând cont de relația 2 de la 2.11.11, relația (5) se poate scrie sub forma:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(b) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_p}(b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_q}{\partial y_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial y_p}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial q_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Din relația (6) obținem formulele de calcul a derivatelor parțiale ale funcției  $h = g \circ f$  :

$$(7) \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \quad i \in \mathbf{N}_g, j \in \mathbf{N}_m.$$

În cazul în care  $q=1$ , adică în cazul în care  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow B \subset \mathbf{R}^p$  și  $g : C \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ , atunci

$h = g \circ f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  și relația (7) devine

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \frac{\partial g}{\partial y_2}(b), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_p}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial q_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(b) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

de unde obținem formulele:

$$(8) \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a), \quad i \in \mathbf{N}_m, \text{ unde}$$

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k \in \mathbf{N}_p.$$

De exemplu, să considerăm cazul particular când  $m=p=2$  adică  $f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbf{R}^2$ ,  $g : B \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  și

$$g \circ f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}.$$

Dacă notăm cu  $f_1$  și  $f_2$  componentele lui  $f$ , atunci

$u=f_1(x,y)$  și  $v=f_2(x,y)$ ,  $(x,y)^T \in A$ , sunt variabilele lui  $g$  și

formulele (8) devin: 
$$\begin{cases} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a) = \frac{\partial g}{\partial u}(b) \frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b) \frac{\partial v}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(a) = \frac{\partial g}{\partial u}(b) \frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b) \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{cases}$$

În cazul particular când  $m=2, p=1$ , adică

$$f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbf{R}, \quad g : B \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ și}$$

$g \circ f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , atunci notând  $u=f(x,y)$  variabila funcției  $g$ , din formulele precedente obținem:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a) = \frac{\partial g}{\partial u}(b) \frac{\partial u}{\partial x}(a),$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(a) = \frac{\partial g}{\partial u}(b) \frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

Cum  $g$  este funcție de o variabilă, atunci notăm  $\frac{dg}{du}$  în

loc de  $\frac{\partial g}{\partial u}$  și obținem

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a) = \frac{dg}{du}(b) \frac{\partial u}{\partial x}(a),$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(a) = \frac{dg}{du}(b) \frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

În cazul când  $f$  și  $g$  sunt diferențiabile pe  $A$ , respectiv  $B$ , atunci în formulele precedente se poate renunța la a mai scrie punctele  $a$  și  $b$ , obținând astfel formulele de calcul pentru funcțiile derivate parțiale ale funcțiilor compuse.

**2.15.3. Exemple. 1.** De exemplu, să calculăm derivatele parțiale ale funcției  $z = \ln(u^2 + v)$ , unde  $u = e^{x+y^2}$  și  $v = x^2 + y$ .

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial[\ln(u^2 + v)]}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial[\ln(u^2 + v)]}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} \cdot 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial[\ln(u^2 + v)]}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial[\ln(u^2 + v)]}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= \frac{2u}{u^2 + v} \cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (4uye^{x+y^2} + 1) \end{aligned}$$

**2.** Să arătăm că funcția  $z = xy\varphi(x^2 - y^2)$  verifică egalitatea

$$xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2).$$

Notând  $u = x^2 - y^2$ , avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y\varphi(u) + xy \frac{d\varphi}{du} = y\varphi(u) + xy \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \\ &= y\varphi(u) + xy \frac{d\varphi}{du} \cdot 2x = y\varphi(u) + 2x^2 y \frac{d\varphi}{du}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= x\varphi(a) + xy \frac{d\varphi}{dy} = x\varphi(u) + xy \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= x\varphi(u) + xy \frac{d\varphi}{du} (-2y) = x\varphi(u) - 2xy^2 \cdot \frac{d\varphi}{du}.\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2y \frac{\partial z}{\partial y} &= xy^2 \left[ y\varphi(u) + 2x^2y \frac{d\varphi}{du} \right] + \\ &+ x^2y \left[ x\varphi(u) - 2xy^2 \frac{d\varphi}{du} \right] = \\ &= xy^3\varphi(u) + 2x^3y^3 \frac{d\varphi}{du} + x^3y\varphi(u) - 2x^3y^3 \frac{d\varphi}{du} = \\ &= xy(x^2 + y^2)\varphi(u) = xy\varphi(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = \\ &= z(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

#### 2.15.4 Teoremă (teorema de medie)

Fie  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă pe mulțimea deschisă  $A$  și  $a, b \in A$  astfel încât

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R}^m \mid x = (1-t)a + tb, t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Atunci există  $x_0 \in [a, b]$  astfel încât

$$(9) \quad f(b) - f(a) = df(x_0)(b - a).$$

**Demonstrație.** Considerăm funcția  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, g(t) = f((1-t)a + tb)$ .

Atunci  $g(0) = a$  și  $g(1) = b$ . Cum  $g$  este derivabilă pe  $[0, 1]$ , conform teoremei lui Lagrange, există  $t_0 \in (0, 1)$  astfel încât  $g(1) - g(0) = g'(t_0)$ .

Deoarece  $g'(t) = df((1-t)a + tb)(b - a)$ , deducem că

$$g(1) - g(0) = df(x_0)(b - a), \text{ unde } x_0 := (1 - t_0)a + t_0b. \text{ Deci, } f(b) - f(a) = df(x_0)(b - a). \blacksquare$$

#### 2.15.5 Observație

În anumite ipoteze suplimentare se pot obține diferite consecințe ale teoremei de medie.

Mai întâi, o mulțime  $A \subset \mathbf{R}^m$  se numește **mulține convexă** dacă, pentru orice  $a, b \in A, a \neq b$ , segmentul  $[a, b] := \{x \in \mathbf{R}^m \mid x = (1-t)a + tb, t \in [0,1]\}$  este conținut în  $A$ .

Prin urmare, dacă  $A$  este o mulțime deschisă și convexă, iar  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție diferențiabilă pe  $A$ , atunci pentru orice  $a, b \in A, a \neq b$ , există  $x_0 \in [a, b]$  astfel încât să aibă loc relația (9).

Mai mult, dacă există  $M > 0$  astfel încât  $\|df(u)\| \leq M, (\forall) u \in A$ , atunci din (9) obținem că pentru orice  $a, b \in A, a \neq b$  are loc inegalitatea  $|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|$ .

### 2.15.6 Test de autoevaluare

1. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției  $z=f(u,v)$ , unde  $u=x+y, v = x^2+y^2$ .

$$\mathbf{R.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v}$$

2. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și de ordinul al doilea ale funcțiilor:

$$\text{a) } z = f(x, y); \text{ b) } z = f\left(\frac{y}{x}\right); \text{ c) } z = f(x^2+y^2).$$

$$\mathbf{R.} \text{ a) } \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{d^2 f}{du^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial f}{du} + xy \frac{\partial^2 f}{du^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{d^2 f}{du^2}, \text{ u} = xy; \text{ b) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{df}{du},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} \frac{d^2 f}{du^2} - \frac{1}{x^2} \frac{df}{du},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 f}{du^2}, \text{ u} = \frac{y}{x};$$

$$c) \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{d^2 f}{du^2} + 2 \frac{df}{du},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{d^2 f}{du^2} + 2 \frac{df}{du}, \quad u = x^2 + y^2$$

3. Să se arate că funcția  $z = f(bx - ay)$  verifică relația

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Să se arate că funcția  $z = \frac{x}{y} \left[ f(y) + g\left(\frac{y}{x}\right) \right]$  verifică relația

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

5. Să se arate că funcția  $\omega = f(xy, x^2 + y^2 - z^2)$  verifică relația

$$xz \frac{\partial \omega}{\partial x} - yz \frac{\partial \omega}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

6. Să se calculeze  $\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , pentru funcția  $z = f(x^2 + y^2)$ .

$$R. \Delta = 4u \frac{d^2 f}{du^2} + 4 \frac{df}{du}, \quad u = x^2 + y^2.$$

## 2.16. Diferențiale de ordin superior. Formula lui Taylor

**2.16.1 Definiție.** Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de clasă  $C^2$  pe mulțimea deschisă  $A$ . Forma pătratică  $d^2 f(a) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin

$$(1) d^2f(a)(h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j, h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T \in \mathbf{R}^m$$

se numește *diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în punctul a*  $a \in A$ .

Matricea asociată acestei forme pătratice,  $H_f(a)$ , este chiar hessiana funcției  $f$  în punctul  $a$ , definită în relația (3) de la 2.12. Prin urmare, relația (1) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$(2) \quad d^2f(a)(h) = h^T H_f(a) h, \quad h \in \mathbf{R}^m.$$

**2.16.2 Teoremă.** Fie  $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de  $C^2$  pe  $\mathbf{R}$ .

Atunci există  $s \in (0,1)$  astfel încât

$$(3) \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(s).$$

**Demonstrație.** Determinăm  $\lambda \in \mathbf{R}$  astfel încât să avem

$$(4) \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \lambda.$$

Pentru aceasta, considerăm funcția  $g: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $g(t) = \varphi(t) + (1-t)\varphi'(t) + \lambda(1-t)^2$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Observăm că

$g(0) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \lambda = \varphi(1)$ , iar  $g(1) = \varphi(1)$ , deci  $g(0) = g(1)$ . Prin urmare, aplicând teorema lui Rolle funcției  $g$  pe intervalul  $[0,1]$ , deducem că există  $s \in (0,1)$  astfel încât  $g'(s) = 0$ .

Deoarece  $g'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(t) + (1-t)\varphi''(t) - 2\lambda(1-t)$ , atunci din  $g'(s) = 0$  rezultă că  $\lambda = \frac{1}{2} \varphi''(s)$ .

Cu  $\lambda = \frac{1}{2} \varphi''(s)$ , din relația (4) rezultă relația (1). ■

### 2.16.3 Teoremă (Formula lui Taylor)

Fie  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de clasă  $C^2$  pe bila deschisă  $B_r(a) \subset \mathbf{R}^m$  și fie  $h \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|h\| < r$ . Atunci există  $s \in (0,1)$  astfel încât

$$(5) f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} H_f(a+sh)h.$$

**Demonstrație.** Considerăm funcția  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\varphi(a) = f(a+th)$ ,  $h \in \mathbf{R}^m$ . Evident  $\varphi(0) = f(a)$  și  $\varphi(1) = f(a+h)$ . Pe de altă parte, din teorema 2.16.2 rezultă că există  $s \in (0,1)$  astfel încât are loc relația (3).

Cum (vezi relația (11) de la 2.14),  $\varphi'(t) = (\nabla f(a+th))^T h$  și  $\varphi''(t) = h^T H_f(a+th)h$ , atunci din relația (3) obținem formula (5). ■

**2.16.4. Observație.** Este evident că relația (5) se poate scrie sub forma:

$$(6) f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + d^2f(a+sh)(h), \quad s \in (0,1), h \in \mathbf{R}^m.$$

Dacă  $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  este de clasă  $C^2$  pe bila deschisă  $B_r(a)$ , atunci polinomul

$$T_2(x) = f(a) + (\nabla f(a))^T (x-a) + \frac{1}{2} (x-a)^T H_f(a)(x-a), \quad x \in B_r(a)$$

se numește *polinomul Taylor de ordinul al doilea al funcției f în punctul a*.

De exemplu, pentru funcția  $f(x,y) = e^{-2x+y}$ , să calculăm  $T_2(0,0)$ .

Avem

$$\nabla f(x,y) = (-2e^{-2x+y}, e^{-2x+y})^T,$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4e^{-2x+y} & -2e^{-2x+y} \\ -2e^{-2x+y} & e^{-2x+y} \end{pmatrix},$$

$$\text{deci } \nabla f(0,0) = (-2,1)^T, H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= f(0,0) + (\nabla f(0,0))^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y)H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
&= 1 + (-2, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
&= 1 - 2x + y + 2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

### 2.16.5 Test de autoevaluare

1. Să se determine diferențiala de ordinul al doilea a funcțiilor:

a)  $f(x, y) = 3x^2y - 4xy^3$ ;

b)  $f(x, y) = 4xy^3z^3$ .

**R.** a)  $df(x, y)(h_1, h_2) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 6x & 6x - 12y^2 \\ 6x - 12y^2 & -24x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ ;

b)  $df(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) =$

$$= (h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} 0 & 12y^2z^3 & 12y^3z^2 \\ 12y^2z^3 & 24xyz^3 & 36xy^2z^2 \\ 12y^3z^2 & 36xy^2z^2 & 24xy^3z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

2. Să se calculeze polinomul Taylor de ordinul al doilea în punctul  $(0,0)^T$  al funcției  $f(x, y) = xe^{-y}$ ,  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

**R.**  $T_2(x, y) = x - 2xy$ .

3. Să se calculeze polinomul Taylor de ordinul al doilea în punctul  $(0,0,0)^T$  al funcției  $f(x, y, z) = e^{x-2y+3z}$ .

**R.**  $T_2(x, y, z) = 1 + x - 2y + 3z - 4xy + 6xz - 12yz + x^2 + 4y^2 + 9z^2$ .

## 2.17. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Fie  $A \subset \mathbf{R}^m$  și o funcție  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ .

**2.17.1. Definiție.** Vom spune că un punct  $x \in A$  se numește *punct de extrem local al funcției*  $f$ , dacă există  $r > 0$  astfel încât diferența  $f(x) - f(a)$  păstrează semn constant pentru orice  $x \in A \cap B_r(a)$ .

Dacă  $f(x) - f(a) \geq 0$  (adică  $f(x) \geq f(a)$ ) pentru orice  $x \in A \cap B_r(a)$ , atunci vom spune că  $a$  este *punct de minim local al funcției*  $f$ .

Dacă  $f(x) - f(a) \leq 0$  (adică  $f(x) \leq f(a)$ ) pentru orice  $x \in A \cap B_r(a)$ , atunci vom spune că  $a$  este *punct de maxim local al funcției*  $f$ .

**2.17.2 Definiție.** Un punct  $a \in A$  se numește *punct critic al funcției*  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , dacă  $f$  este diferențiabilă în punctul

$a$  și dacă  $\nabla f(a) = \theta$ , adică  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ , pentru orice  $k \in \mathbf{N}_m$ .

### 2.17.3. Teoremă (teorema lui Fermat).

Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , o funcție diferențiabilă pe mulțime deschisă  $A$ . Dacă  $a \in A$  este punct extrem local al funcției  $f$ , atunci  $a$  este punct critic al funcției  $f$ .

**Demonstrație.** Pentru a face o alegere, să presupunem că  $a \in A$  este punct de maxim local al funcției  $f$ . Atunci există  $r > 0$  astfel încât  $f(x) \leq f(a)$  pentru orice  $x \in A \cap B_r(a)$ . Deoarece  $A \cap B_r(a)$  este mulțime deschisă, există  $r_1 < r$  astfel încât  $B_{r_1}(a) \subset A \cap B_r(a)$ .

Fie  $h \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|h\| = 1$ . Atunci  $a + th \in B_{r_1}(a)$  pentru orice  $t \in (-r_1, r_1)$ . Prin urmare, putem defini funcția

$$g : (-r_1, r_1) \rightarrow \mathbf{R}, g(t) = f(a + th).$$

Deoarece, pentru orice  $t \in (-r_1, r_1)$  avem

$g(t) - g(0) = f(a + th) - f(a) \leq 0$ , rezultă că  $t=0$  este punct de maxim al funcției  $g$  și deci, conform teoremei lui Fermat pentru funcții reale de variabilă reală, avem  $g'(0) = 0$ . Pe de altă parte,

$$0 = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = \frac{df}{dh}(a),$$

adică  $\frac{df}{dh}(a) = 0$  pentru orice  $h \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|h\|=1$ .

În particular, dacă  $e_k, k \in \mathbf{N}_m$ , sunt vectorii bazei canonice din  $\mathbf{R}^m$ , atunci  $\frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = 0, (\forall) \mathbf{R} \in \mathbf{N}_m$ ,

adică  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0, k \in \mathbf{N}_m$ . ■

**2.17.4 Teoremă.** Fie  $\subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de clasă  $C^2$  pe mulțimea deschisă  $A$  și fie  $a \in A$  un punct critic al funcției  $f$ .

1) Dacă  $d^2f(a)$  este pozitiv definită, atunci  $a$  este punct de minim local al funcției  $f$ .

2) Dacă  $d^2f(a)$  este negativ definită, atunci  $a$  este punct de maxim local al funcției  $f$ .

**Demonstrație.** Fie  $a \in A$  un punct critic al funcției  $f$ , deci  $\nabla f(a) = 0$ . Deoarece  $A$  este mulțimea deschisă, atunci există  $r > 0$  astfel încât  $B_r(a) \subset A$ . Fie  $h \in \mathbf{R}^m$  cu  $\|h\| < r$ .

Atunci, conform Teoremei 2.16.3, există  $s \in (0,1)$  astfel încât

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h.$$

Cum  $\nabla f(a) = 0$ , obținem

$$(1) \quad f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h.$$

1) Dacă  $df(a)$  este pozitiv definită, atunci  $d^2f(a)(h) = h^T H_f(a) h > 0$ , pentru orice  $h \in \mathbf{R}^m$ . Prin urmare, din relația (1) obținem

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H_f(a) h > 0, (\forall) h \in \mathbf{R}^m, \|h\| < r,$$

ceea ce înseamnă că  $a$  este punct de minim local al funcției  $f$ .

2) Dacă  $df(a)$  este negativ definită, atunci  $d^2f(a)(h) = h^T H_f(a) h < 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}^m$ . Prin urmare, din relația (1) obținem

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H_f(a) h < 0, (\forall) h \in \mathbf{R}^m, \|h\| < r,$$

ceea ce arată că  $a$  este punct de maxim local al funcției  $f$ . ■

**2.17.5 Observație.** În cazul în care  $d^2f(a)$  nu este pozitiv definită sau negativ definită, atunci  $a$  nu este punct de extrem al funcției  $f$ . Mai mult, din teoremele precedente deducem regula practică de a determina punctele de extrem ale funcției  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  care sunt de clasă  $C^2$  pe mulțimea deschisă  $A$ : 1) Se determină punctele critice  $a \in A$  ale funcției  $f$ . Acestea sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Conform teoremei 2.17.3 punctele de extrem real ale funcției  $f$  se găsesc printre punctele critice ale funcției  $f$ .

2) Pentru fiecare punct critic  $a \in A$  se stabilește dacă funcționala pătratică  $d^2f(a)$  este pozitiv definită sau negativ definită.

Pentru a stabili dacă  $d^2f(a)$  este pozitiv definită sau negativ definită calculăm

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a) \end{pmatrix}$$

adică matricea (hesiană) funcției  $f$  în punctul  $a$ ) asociată

funcționale pătratice  $d^2f(a)$  în raport cu baza canonică din  $\mathbf{R}^m$ .

Deoarece  $d^2f(a)(h)=h^T H_f(a)h$ ,  $(\forall)h \in \mathbf{R}^m$ , deducem că  $d^2f(a)$  este pozitiv definită, dacă și numai dacă

$$h^T H_f(a)h > 0, \quad (\forall)h \in \mathbf{R}^m$$

și este negativ definită, dacă și numai dacă

$$h^T H_f(a)h < 0, \quad (\forall)h \in \mathbf{R}^m.$$

**2.17.6 Exemflu.** Să determinăm extremele locale ale funcției  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $F(x,y)=xye^{-(x^2+y^2)}$ ,  $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ .

Mai întâi determinăm punctele critice ale funcției  $f$ . Acestea sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Deoarece } \frac{\partial f}{\partial x} = (y - 2x^2y)e^{-(x^2+y^2)}, \frac{\partial f}{\partial y} = (x - 2xy^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

și  $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ ,  $(\forall)(x,y)^T \in \mathbf{R}^2$ , atunci  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  dacă

$$\text{și numai dacă } \begin{cases} y - 2x^2y = 0 \\ x - 2xy^2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem soluțiile:

$$a_1=(0,0)^T,$$

$$a_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, a_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, a_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

$$a_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

Acestea sunt punctele critice ale funcției  $f$ .

Calculăm hessiana funcției  $f$ . Avem

$$H_f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 4x^3y - 6xy & 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \\ 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 & 4xy^2 - 6xy \end{pmatrix}.$$

Mai departe, pentru fiecare punct critic  $a_k, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , vom studia dacă  $df(a_k)$  este pozitiv definită sau negativ definită. Pentru  $a_1 = (0, 0)^T$  avem

$$H_f(a_1) = H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Atunci pentru orice } h = (h_1, h_2)^T \in \mathbf{R}^2,$$

$$\text{avem } df(a_1)(h) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1h_2 \text{ și nu putem decide}$$

dacă  $d^2f(a_1)(h)$  este pozitivă sau negativă pentru orice  $h \in \mathbf{R}^2$ .

În consecință  $a_1 = (0, 0)^T$  nu este punct de extrem al funcției  $f$ .

$$\text{Pentru } a_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \text{ și } a_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \text{ obținem}$$

$$H_f(a_2) = H_f(a_5) = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci, pentru orice  $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbf{R}^2$ , avem

$$\begin{aligned} d^2f(a_2)(h) &= df(a_5)(h) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{2}{e}(h_1^2 + h_2^2) < 0, \end{aligned}$$

deci  $d^2f(a_2), d^2f(a_5)$  sunt negativ definite și deci  $a_2$  și  $a_5$  sunt puncte de maxim local ale funcției  $f$ .

$$\text{Pentru } a_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \text{ și } a_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \text{ avem}$$

$$H_f(a_3)=H_f(a_4)=e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Atunci, pentru orice  $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbf{R}^2$  avem

$$d^2f(a_3)(h) = d^2f(a_4) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{e}(h_1^2 + h_2^2) > 0,$$

deci  $d^2f(a_3)$ ,  $d^2f(a_4)$  sunt pozitiv definite și deci punctele  $a_3$  și  $a_4$  sunt puncte de maxim local ale funcției  $f$ .

### 2.17.7. Test de autoevaluare

1. Să se determine punctele de extrem local precum și valorile extreme corespunzătoare ale funcțiilor următoare:

a)  $f(x,y)=xy(a-x-y)$ ,  $a>0$ ;

b)  $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ,  $x > 0, y > 0$ ;

c)  $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ ;

d)  $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2$ ;

e)  $f(x,y)=(x,y) e^{-(x^2+y^2)}$ ;

f)  $f(x,y)=xy^2e^{x-y}$ .

**R.** a)  $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)^T$  este punct de maxim local;  $\max f(x,y) = \frac{a^3}{27}$ ; b)  $(5,2)^T$

este punct de maxim local,  $\min f(x,y)=30$ ; c)  $(1,1)^T$  este punct de minim

local;  $\min f(x,y)=-1$ ; d)  $(0,0)^T$  este punct de maxim local;  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$  și

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$  sunt puncte de minim local; e)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$  este punct de

maxim local;  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$  este punct de minim local; f)  $(-1, 2)^T$  este punct de minim local.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor următoare:

a)  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ ;

b)  $f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$ ,  $xyz \neq 0$ .

R. a)  $(24, -144, -1)^T$  punct de minim local; b)  $(1, 1, 1)^T$  este punct de maxim local.

## 2.18. Extreme condiționate

Fie  $f : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  și  $E \subset A$ .

**2.18.1 Definiție.** Vom spune că punctul  $a \in E$  este *punct de extrem local relativ la mulțimea E* al funcției  $f$  dacă  $a$  este punct de extrem local al restricției funcției  $f$  la mulțimea  $E$ .

Punctele extreme locale relativ la mulțimea  $E \subset A$  ale funcției  $f$  se numesc *puncte de extrem local condiționate de mulțimea E*.

**2.18.2. Definiție.** Vom spune că un punct  $a \in E$  este *punct de maxim local condiționat* (respectiv, *de minim local condiționat*) *de mulțimea E* dacă există  $r > 0$  astfel încât  $f(x) \leq f(a)$  (respectiv,  $f(x) \geq f(a)$ ) pentru orice  $x \in E \cap B_r(a)$ .

În cele ce urmează, considerăm funcțiile

$g_k : A \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq k \leq p \leq m - 1$ , iar mulțimea  $E$  definită prin

$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbf{R}^m \mid g_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, 1 \leq k \leq p\}$ ,  
adică mulțimea  $E$  este mulțimea soluțiilor sistemului



$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_m} = 0 \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0. \end{array} \right.$$

Dacă  $(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \in \mathbf{R}^{m+p}$  este o soluție a acestui sistem, atunci  $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in E$  este *punct critic condiționat de sistemul (1) al funcției f*.

Printre punctele critice condiționate se află și punctele de extrem local condiționate ale lui f.

3) Pentru fiecare soluție,  $a = (a_1, \dots, a_m, \lambda_1, \dots, \lambda_p)^T$  a sistemului (2), determinăm funcționala pătratică  $d^2\phi(a)$ , definită prin  $d^2\phi(a)(h) = h^T H_\phi(a)h$ ,  $h \in \mathbf{R}^m$ , unde

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_m) := F(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in E.$$

4) Studiem semnul funcționalei pătratice

$$d^2\phi(a)(h) = h^T H_\phi(a)h$$

în condițiile în care  $h \in \mathbf{R}^m$  satisface relațiile

$$(3) \quad (\nabla g_k(a))^T h = 0, (\forall)k \in \mathbf{N}_p.$$

Dacă  $d^2\phi(a)(h) > 0$ , pentru orice  $h \in \mathbf{R}^m$  care satisface

relațiile (3), atunci a este punct de minim local condițional al funcției f.

Dacă  $d^2\phi(a)(h) > 0$ , pentru orice  $h \in \mathbf{R}^m$  care satisface relațiile (3), atunci a este punct de maxim local condiționat al funcției f.

**2.18.3 Exemplu.** Să determinăm extremele funcției  $f(x, y, z) = xy + zx + yz$ , condiționate de ecuațiile  $xyz=32$ ,  $x+y+z=4$ . Restricțiile problemei sunt

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

unde  $g_1(x, y, z) = xyz - 32$  și  $g_2(x, y, z) = x + y + z - 4$ .

Funcția Lagrange este:

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z),$$

adică

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + zx + yz + \lambda_1(xyz - 32) + \lambda_2(x + y + z - 4).$$

Determinăm punctele critice ale funcției f. Pentru acesta, considerăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} y + z + \lambda_1 yz + \lambda_2 = 0 \\ x + z + \lambda_1 xz + \lambda_2 = 0 \\ y + y + \lambda_1 xy + \lambda_2 = 0 \\ xyz - 32 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

Condiția de compatibilitate a sistemului format din primele trei ecuații ale sistemului precedent, considerat în necunoscutele  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ , este

$$\begin{vmatrix} y+z & yz & 1 \\ x+z & xz & 1 \\ x+y & xy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde obținem  $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ .

Prin urmare, avem de rezolvat sistemele:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ xyz-32=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y-z=0 \\ xyz-32=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} z-x=0 \\ xyz-32=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}.$$

Primul sistem are soluți  $a_1=(-2,-2,8)^T$ , sistemul al doilea are soluția  $a_2=(8,-2,-2)^T$ , iar sistemul al treilea are soluția  $a_3=(-2,8,-2)^T$ .

Pentru ca sistemul inițial să admită soluția  $a_1=(-2,-2,8)^T$  trebuie să avem

$$\lambda_1 = \frac{5}{9} \text{ și } \lambda_2 = \frac{26}{9}. \text{ Pentru aceste valori, obținem}$$

$$\phi(x, y, z) := F\left(x, y, z, \frac{5}{9}, \frac{26}{9}\right) = xy + zx + yz + \frac{5}{9}(xyz - 32) +$$

$$+ \frac{26}{9}(x + y + z - 4).$$

Deoarece

$$H_\phi(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{41}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{41}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix},$$

deducem că

$$d^2\phi(a_1) = h^T H_\phi(a_1) h = \frac{2}{9}(4h_1h_2 - h_1h_3 - h_2h_3), h = (h_1, h_2, h_3)^T \in \mathbf{R}^3$$

Deoarece  $\nabla g_1(x, y, z) = (yz, xz, yz)^T$ ,  $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1)^T$ ,  
Atunci condițiile

$$(\nabla g_1(a_1))^T h = 0, (\nabla g_2(a_1))^T h = 0, h = (h_1, h_2, h_3)^T \in \mathbf{R}^m$$

sunt echivalente cu sistemul

$$\begin{cases} 4h_1 + 4h_2 - h_3 = 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 = 0, \end{cases}$$

de unde obținem  $h_2 = h_1$  și  $h_3 = 0$ . Cu acestea, obținem

$$d^2\phi(a_1)(h) = -\frac{82}{9}h_1^2 < 0,$$

adică  $d^2\phi(a_1)$  este negativ definită și deci  $a_1$  este punct de maxim local.

Analog se procedează și pentru punctele  $a_2$  și  $a_3$ .

### 2.18.4 Test de autoevaluare

1. Să se determine extremele locale condiționate ale următoarelor funcții:

- a)  $f(x, y) = xy$ ,  $x + y = 1$ ;
- b)  $f(x, y) = x + 2y$ ,  $x^2 + y^2 = 5$ ;
- c)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $3x + 2y = 6$ ;
- d)  $f(x, y) = 6 - 4x - 4y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .

**R.** a)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$  punct de maxim; b)  $(1, 2)^T$  punct de maxim;

c)  $\left(\frac{18}{3}, \frac{12}{3}\right)^T$  punct de minim; d)  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$  punct de minim, iar

$\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)^T$  punct de maxim.

2. Să se determine extremele locale condiționate ale

următoarelor funcții:

a)  $f(x,y,z) = xy+xz+yz$ ,  $xyz = 1$ ,  $x>0$ ,  $y>0$ ,  $z>0$

b)  $f(x,y,z) = x-2y+2z$ ,  $x^2+y^2+z^2=9$ ;

c)  $f(x,y,z) = xy^2z^3$ ,  $x+y+z = 12$ ,  $x>0$ ,  $y>0$ ,  $z>0$ ;

d)  $f(x,y,z) = xyz$ ,  $x+y+z = 5$ ,  $xy+yz+zx = 8$ .

**R.** a)  $(1,1,1)^T$  punct de minim;

b)  $(-1, 2, -2)^T$  punct de minim iar  $(1, -2, 2)^T$  punct de maxim;

c)  $(2, 4, 6)^T$  punct de maxim;

d)  $(2, 2, 1)^T$ ,  $(2, 1, 2)^T$ ,  $(1, 2, 2)^T$  puncte de minim,

iar  $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)^T$ ,  $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)^T$ ,  $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)^T$  puncte de maxim.