

CALCULUL CINETOSTATIC AL MECANISMELOR PLANETARE CILINDRICE

Ovidiu ANTONESCU, Păun ANTONESCU
Universitatea POLITEHNICA din București

Abstract: În lucrare se prezintă o metodă analitică pentru calculul cinetostatic al mecanismului planetar monomobil cu două roți dințate centrale. Se consideră mai întâi cazul general al schemelor cinematice cu două roți dințate solidare tip satelit, în două variante practice (multiplicator și reductor de turație). Este menționat cazul particular al mecanismelor planetare cu o singură roată satelit cu angrenare dublă (exterioară și interioară). Pe baza modelului de analiză cinetostatică a mecanismului planetar monomobil cu două roți dințate centrale, în finalul lucrării se abordează o problemă practică de calcul cinetostatic al unui mecanism planetar cilindric simplu folosit la capul de frezat pentru prelucrarea roților dințate cilindrice cu dinți curbi în hipocicloidă.

Keywords: roți, articulație, ecuație;

1. MECANISMUL PLANETAR CA MULTIPLICATOR DE TURAȚIE

Asupra arborelui roții centrale 1 acționează momentul rezistent M_1 , iar la arborele de intrare al brațului port-satelit p acționează momentul motor M_p (fig. 1a,b)

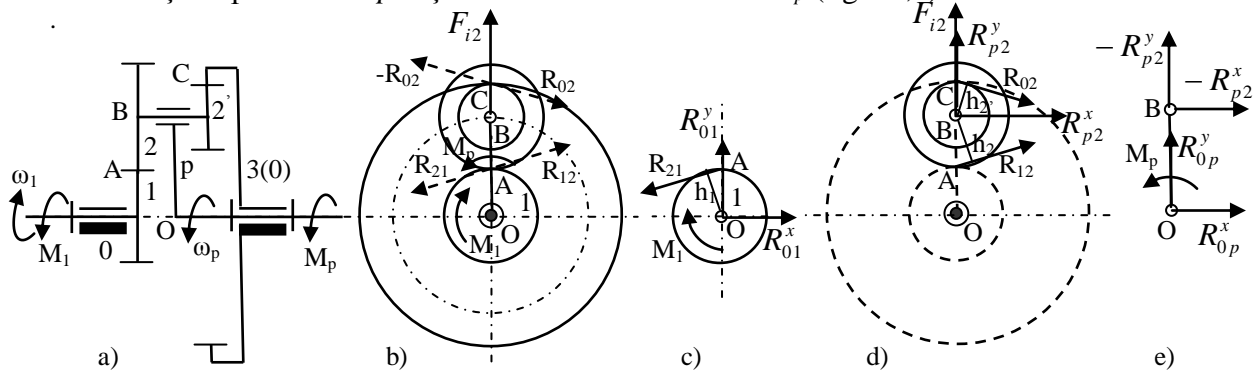


Fig. 1

1.1. Mecanismul general când roțile satelit 2 și 2' sunt distincte

Se consideră ipoteza că se cunoaște cuplul rezistent M_1 , acționând asupra roții centrale 1 și se neglijează forțele de frecare și de greutate. Astfel, pornind de la echilibrul elementului 1 (fig. 1c), se scriu cele trei ecuații de echilibru [1,2]:

$$\begin{cases} \sum M_O^{(1)} = R_{21}h_1 - M_1 = 0 \\ \sum F_x^{(1)} = R_{01}^x - R_{21} \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y^{(1)} = R_{01}^y - R_{21} \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

unde $h_1 = r_1 \cos \alpha$, în care $r_1 = \frac{1}{2}mz_1$ este raza cercului de divizare, m este modulul roților dințate și α este unghiul de angrenare. Din prima ecuație (1.1) se obține mărimea reacțiunii din angrenajul exterior (1,2) cilindric (fig. 1a,b):

$$R_{21} = \frac{2M_1}{mz_1 \cos \alpha} \quad (1.2)$$

Ecuatiile a doua și a treia din (1.1) permit calculul componentelor reacțiunii R_{01} :

$$R_{01}^x = R_{21} \cos \alpha = \frac{2M_1}{mz_1}; \quad R_{01}^y = R_{21} \sin \alpha = \frac{2M_1}{mz_1} \operatorname{tg} \alpha$$

(1.3,4)

Asupra roților satelit 2+2' cu masa m_2^* acționează forța de inerție centrifugală

$$F_{i2} = m_2^*(r_1 + r_2)\omega_p^2 = \frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2)\omega_p^2 \quad (1.5)$$

Se izolează elementul cinematic 2(2') și se introduc reacțiunile R_{12} și $R_{32'} = R_{02}$ în punctele de angrenare A respectiv C (fig. 1.d).

De asemenea, în punctul B se introduc componentele reacțiunii specifice unei articulații plane R_{p2}^x, R_{p2}^y , dintre brațul portsatelit p și roțile satelit 2(2').

Echilibrul cinetostatic [1, 3] al corpului 2(2'), fără considerarea forței de greutate, se exprimă prin cele trei ecuații (una de momente și două de proiecții pe axele x, y):

$$\begin{cases} \sum M_B^{(2)} = R_{12}h_2 - R_{02}h_{2'} = 0 \\ \sum F_x^{(2)} = R_{p2}^x + R_{12} \cos \alpha + R_{02} \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y^{(2)} = R_{p2}^y + F_{i2} + R_{12} \sin \alpha - R_{02} \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Din fiecare din cele trei ecuații (1.6) se deduce în această ordine:

$$R_{02} = R_{12} \frac{h_2}{h_{2'}} = \frac{2M_1}{mz_1} \frac{r_2}{\cos \alpha} = \frac{2M_1}{mz_1} \frac{z_2}{z_{2'}} \quad (1.7)$$

$$R_{p2}^x = -R_{12} \cos \alpha - R_{02} \cos \alpha = -\frac{2M_1}{mz_1} \left(1 + \frac{z_2}{z_{2'}}\right) \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} R_{p2}^y &= -F_{i2} - R_{12} \sin \alpha + R_{02} \sin \alpha = \\ &= -\frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2)\omega_p^2 - \frac{2M_1}{mz_1} \left(1 - \frac{z_2}{z_{2'}}\right) \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \quad (1.9)$$

Calculul cinetostatic al mecanismului planetar monomobil (fig. 1a) se încheie cu scrierea ecuațiilor de echilibru [3, 4] pentru brațul port-satelit p , fără considerarea forței de greutate (fig. 1e):

$$\begin{cases} \sum M_O^{(p)} = R_{p2}^x (r_1 + r_2) - M_p = 0 \\ \sum F_x^{(p)} = R_{0p}^x - R_{p2}^x = 0 \\ \sum F_y^{(p)} = R_{0p}^y - R_{p2}^y = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Din fiecare ecuație (1.10) se deduce câte o necunoscută:

$$M_p = -R_{p2}^x (r_1 + r_2) = M_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_2}{z_{2'}}\right) \quad (1.11)$$

$$R_{0p}^x = R_{p2}^x = -\frac{2M_1}{mz_1} \left(1 + \frac{z_2}{z_{2'}}\right) \quad (1.12)$$

$$R_{0p}^y = R_{p2}^y = -\frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2)\omega_p^2 - \frac{2M_1}{mz_1} \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) \operatorname{tg} \alpha \quad (1.13)$$

1.2. Mecanismul particular cu roțile satelit 2 cu dublă angrenare

Dacă roțile 2 și 2' coincid între numerele de dinți există egalitatea $z_2 = z_{2'}$, astfel că formulele (1.7), (1.8), (1.9), (1.12), (1.13) pentru calculul reacțiunilor deduse mai sus capătă expresiile:

$$R_{02} = \frac{2M_1}{mz_1 \cos \alpha}; R_{p2}^x = -\frac{4M_1}{mz_1}; R_{p2}^y = -\frac{1}{2}m_2^*m(z_1 + z_2)\omega_p^2 \quad (1.7', 8', 9')$$

$$R_{0p}^x = \frac{4M_1}{mz_1}; R_{0p}^y = \frac{1}{2}m_2^*m(z_1 + z_2)\omega_p^2 \quad (1.12', 13')$$

Pentru momentul motor acționând pe brațul portsatelit p , formula de calcul (1.11) capătă forma

$$M_p = 2M_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) = M_1 \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) \quad (1.11')$$

2. MECANISMUL PLANETAR CA REDUCTOR DE TURAȚIE

Asupra arborelui brațului portsatelit p acționează momentul rezistent M_p , iar asupra arborelui roții centrale 1 acționează momentul motor M_1 (fig. 2a,b).

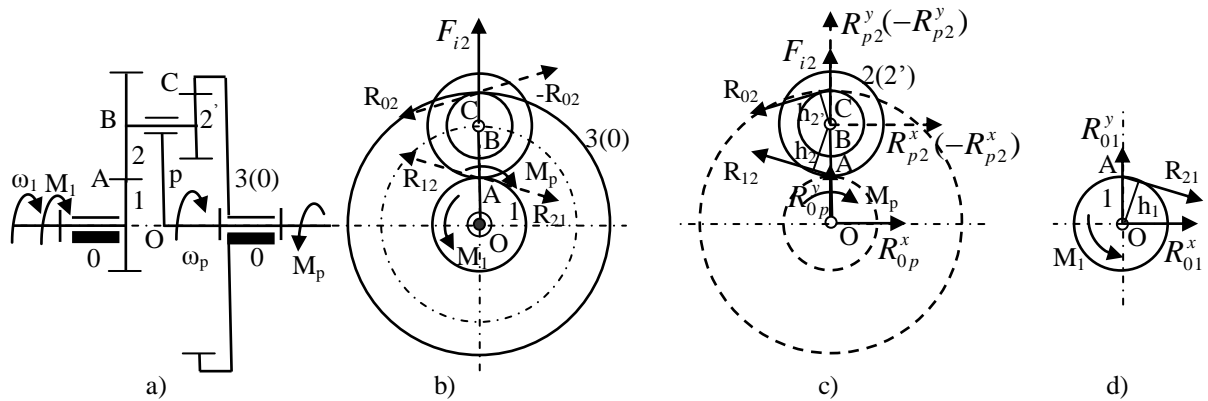


Fig. 2

2.1. Mecanismul general când roțile satelit 2 și 2' distincte

În acest caz se consideră lanțul cinematic format din două corpuri: roțile satelit 2(2'), izolate prin îndepărtarea roților centrale 1 (din punctul A) respectiv 3(0) din punctul C și din brațul portsatelit p , prin desfacerea legăturii din O cu batiul 0 (fig. 2c). Observând că în A și C sunt cuple roto-translante (angrenări cilindrice plane), lanțul cinematic diadic (2+p) este echivalent din punct de vedere structural-topologic cu un lanț cinematic tip triadă [3].

În continuare se scriu ecuațiile de echilibru cinetostatic ale acestui lanț diadic (2+p), fără forțe de frecare și de greutate:

$$\sum F_x^{(2)} = R_{p2}^x - R_{12} \cos \alpha - R_{02} \cos \alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum F_y^{(2)} = R_{p2}^y + R_{12} \cos \alpha - R_{02} \cos \alpha + F_{i2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum M_B^{(2)} = R_{12}h_2 - R_{02}h_2 = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum F_x^{(p)} = R_{0p}^x - R_{p2}^x = 0 \quad (2.4)$$

$$\sum F_y^{(p)} = R_{0p}^y - R_{p2}^y = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum M_B^{(p)} = M_p - R_{0p}^x (r_1 + r_2) \quad (2.6)$$

Din ecuația (2.6) se deduce componenta orizontală

$$R_{0p}^x = \frac{M_p}{r_1 + r_2} = \frac{2M_p}{m(z_1 + z_2)} \quad (2.7)$$

Ecuația (2.1) se scrie ținând seama de ecuațiile (2.3) și (2.4):

$$R_{0p}^x - R_{12}(1 + \frac{h_2}{h_2'}) \cos \alpha = 0 \quad (2.8)$$

din care se deduce reacțiunea din angrenajul exterior (1,2)

$$R_{12} = \frac{R_{0p}^x z_2'}{(z_2' + z_2) \cos \alpha} = \frac{2M_p z_2'}{m(z_1 + z_2)(z_2 + z_2') \cos \alpha} \quad (2.9)$$

Ecuația (2.3) permite calculul reacțiunii din angrenajul interior (2',3)

$$R_{02} = R_{12} \frac{h_2}{h_2'} = \frac{2M_p z_2}{m(z_1 + z_2)(z_2 + z_2') \cos \alpha} \quad (2.10)$$

Din ecuația (2.2) se explicită componenta verticală a reacțiunii din articulația B:

$$R_{p2}^y = R_{02} \sin \alpha - R_{12} \sin \alpha - F_{i2} \quad (2.11)$$

sau, ținând seama de expresiile (2.9), (2.10) și (1.5) rezultă

$$R_{p2}^y = \frac{2M_p (z_2 - z_2')}{m(z_1 + z_2)(z_2 + z_2') \cos \alpha} - \frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2) \omega_p^2 \quad (2.12)$$

Ecuațiile (2.4) și (2.5) evidențiază egalitatea componentelor din articulațiile O și B:

$$R_{p2}^x = R_{0p}^x; \quad R_{0p}^y = R_{p2}^y \quad (2.13)$$

În final se scriu ecuațiile de echilibru cinetostatic pentru roata dințată centrală 1 (fig. 2d):

$$\begin{cases} \sum M_O^{(1)} = R_{21} h_1 - M_1 = 0 \\ \sum F_x^{(1)} = R_{01}^x + R_{21} \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y^{(1)} = R_{01}^y - R_{21} \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Se observă că toate cele trei ecuații sunt decuplate, astfel că din fiecare se deduce câte o necunoscută în ordinea corespunzătoare:

$$M_1 = R_{21} h_1 = M_p \frac{z_1 z_2'}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_2')} \quad (2.15)$$

$$R_{01}^x = -R_{21} \cos \alpha = \frac{-2M_1}{m z_1}; \quad R_{01}^y = R_{21} \sin \alpha = \frac{2M_1}{m z_1} \operatorname{tg} \alpha \quad (2.16,17)$$

2.2. Mecanismul particular cu roțile satelit 2 cu dublă angrenare ($2 \equiv 2'$)

În formulele deduse mai sus se face $z_2 = z_2'$ și rezultă următoarele expresii:

$$R_{0p}^x = R_{p2}^x = \frac{2M_p}{m(z_1 + z_2)}; \quad R_{0p}^y = R_{p2}^y = -\frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2) \omega_p^2 \quad (2.7',12')$$

$$R_{12} = \frac{M_p}{m(z_1 + z_2) \cos \alpha}; \quad R_{02} = \frac{M_p}{m(z_1 + z_2) \cos \alpha} \quad (2.9', 10')$$

$$R_{01}^x = \frac{-2M_1}{mz_1}; \quad R_{01}^y = \frac{2M_1}{mz_1} \operatorname{tg} \alpha; \quad M_1 = \frac{M_p}{2} \frac{z_1}{z_1 + z_2} = M_p \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)^{-1} \quad (2.16', 17', 15')$$

În ultima formulă (2.15') s-a folosit relația dintre numerele de dinți $z_1 + 2z_2 = z_3$. Se verifică acest rezultat cu formula (1.11').

3. CALCULUL CINETOSTATIC AL MECANISMULUI PLANETAR CILINDRIC CU LANȚURI PARALELE

Mecanismele planetare cu roți dințate cilindrice sunt realizate de obicei cu două sau mai multe roți satelit montate în paralel (fig. 3), prin acest montaj realizându-se atât echilibrarea maselor rotative cât și micșorarea efortului dintr-un angrenaj. Din punct de vedere structural-topologic și cinematic, roțile dințate montate în paralel sunt elemente cinematice pasive, mișcarea acestor roți satelit fiind teoretic identică.

Practic însă, datorită elasticității și abaterilor tehnologice, roțile dințate montate în paralel nu se comportă ca elemente pasive, ceea ce determină o tendință de blocare a mecanismului.

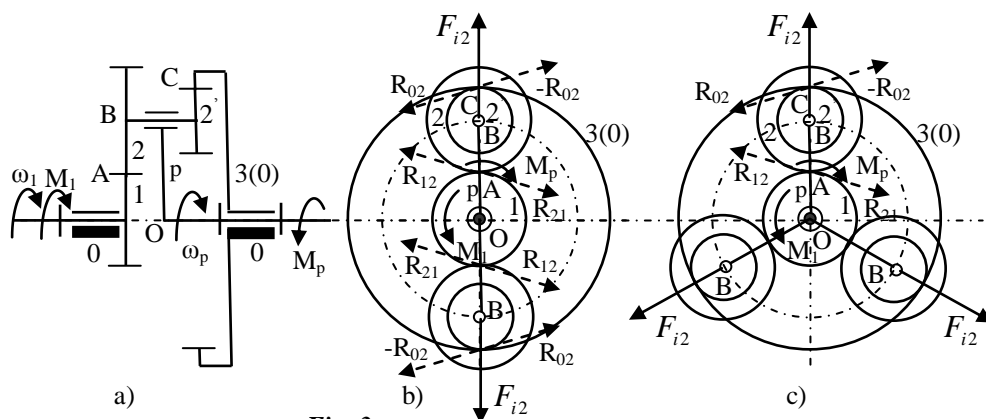


Fig. 3

Jocurile dintre dinți poate compensa nedeterminarea structural-topologică și cinematică, datorită abaterilor de montaj, dar nu elimină încărcarea dinamică neuniformă a roților satelit legate în paralel.

S-au propus și încercat diferite procedee pentru distribuția uniformă a sarcinilor statice și dinamice pe roțile dințate montate în paralel, dar aceste metode nu s-au generalizat.

De obicei, în calculul cinetostatic al mecanismelor cu roți dințate legate în paralel se consideră o distribuție uniformă pe toate roțile montate în paralel (fig. 3), compensându-se erorile introduse prin această ipoteză prin impunerea unor coeficienți de siguranță mai mari.

3.1. Mecanismul ca multiplicator de turație

În varianta mecanismului multiplicator de turație (reductor de cuplu) $M_p = M_m$, $M_1 = M_r$, astfel că reacțiunile se calculează conform algoritmului folosit anterior cu ajutorul ecuațiilor implicite (1.1.1), (1.1.6) și (1.1.10) deduse din echilibrul cinetostatic.

Pentru mecanismul planetar cu n_s sateliți, de exemplu $n_s = 2$ (fig. 3b) și $n_s = 3$ (fig. 3c), reacțiunile se calculează cu formulele:

$$R_{21} = \frac{2M_1}{n_s m z_1 \cos \alpha}; R_{01}^x = 0; R_{01}^y = 0; R_{02} = \frac{2M_1}{n_s m z_1 \cos \alpha} \frac{z_2}{z_2'} \quad (3.1-4)$$

$$R_{p2}^x = -\frac{2M_1}{n_s m z_1} \left(1 + \frac{z_2}{z_2'}\right); R_{p2}^y = -\frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2) \omega_p^2 - \frac{2M_1}{n_s m z_1} \left(1 - \frac{z_2}{z_2'}\right) \operatorname{tg} \alpha \quad (3.5,6)$$

$$M_p = -n_s R_{p2}^x (r_1 + r_2) = \frac{1}{n_s} M_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_2}{z_2'}\right); R_{0p}^x = 0; R_{0p}^y = 0 \quad (3.7-9)$$

3.2. Mecanismul ca reductor de turație

În varianta mecanismului reductor de turație (multiplicator de cuplu) roata dințată 1 este element motor ($M_1 = M_m$), iar brațul portsatelit este element condus ($M_p = M_r$), situație în care reacțiunile se calculează cu ajutorul ecuațiilor implicite de echilibru cinetostatic (2.1-6) și (2.14).

$$R_{0p}^x = \frac{2M_p}{n_s m (z_1 + z_2)}; R_{12} = \frac{2M_p z_2'}{n_s m (z_1 + z_2)(z_2 + z_2') \cos \alpha}; R_{02} = \frac{2M_p z_2}{n_s m (z_1 + z_2)(z_2 + z_2') \cos \alpha} \quad (3.10-12)$$

$$R_{p2}^y = \frac{2M_p (z_2 - z_2')}{n_s m (z_1 + z_2)(z_2 + z_2') \cos \alpha} - \frac{1}{2} m_2^* m (z_1 + z_2) \omega_p^2; R_{p2}^x = R_{0p}^x; R_{0p}^y = R_{p2}^y \quad (3.13-15)$$

$$M_1 = \frac{M_p}{n_s} \frac{z_1 z_2'}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_2')}; R_{01}^x = \frac{-2M_1}{n_s m z_1}; R_{01}^y = \frac{2M_1}{n_s m z_1} \operatorname{tg} \alpha \quad (3.16-18)$$

4. CINETOSTATICA MECANISMULUI PLANETAR SIMPLU CU O SINGURĂ ROATĂ CENTRALĂ FIXĂ

Se consideră mecanismul planetar cu angrenajul interior, la care brațul portsatelit p este conducător și roata satelit 2 este element condus (fig. 4).

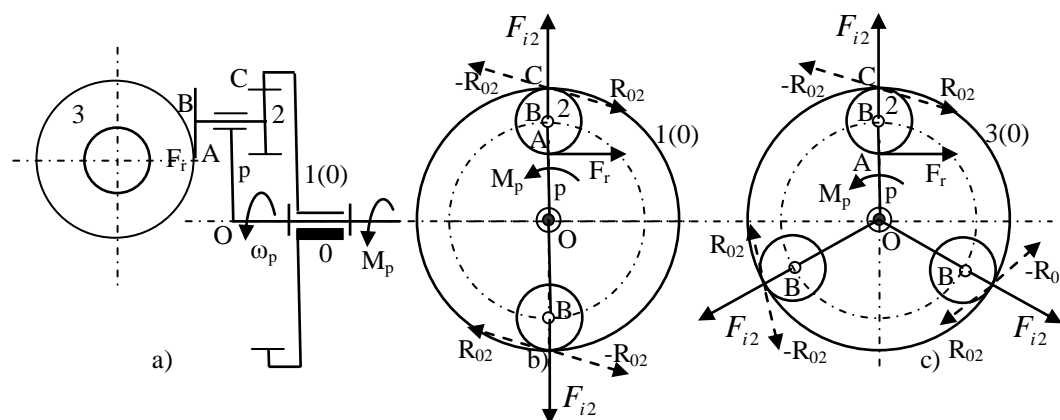


Fig. 4

Roata dințată centrală 1 este fixată de batiul 0 (fig. 4a). Cuplul motor M_p acționează brațul portsatelit p , iar asupra roții dințate satelit 2 acționează forța rezistentă F_r perpendiculară pe brațul portsatelit OB (fig. 4b).

Forța F_r este de rezistență tehnologică, ea se manifestă dinspre roata prelucrată 3 și care apasă asupra cuțitelor montate în punctul A la distanța $AB = r_2 = \frac{1}{2}mz_2$ de axa arborelui roții satelit 2.

Valoarea forței rezistente F_r depinde atât de duritatea materialului din care se prelucurează roata cu dantură hipocicloidă [5], cât și de grosimea așchii care este evaluată prin avansul piesei brute fixată pe platoul din fața capului de frezat. Roata brută (3) execută două mișcări de avans, una de rotație (φ_{rb}) și alta de translație (s_{rb}), putând fi așezată în poziția verticală (fig. 4) sau mai eficient într-o poziție orizontală, când fixarea se realizează cu dispozitive adecvate (fig. 5).

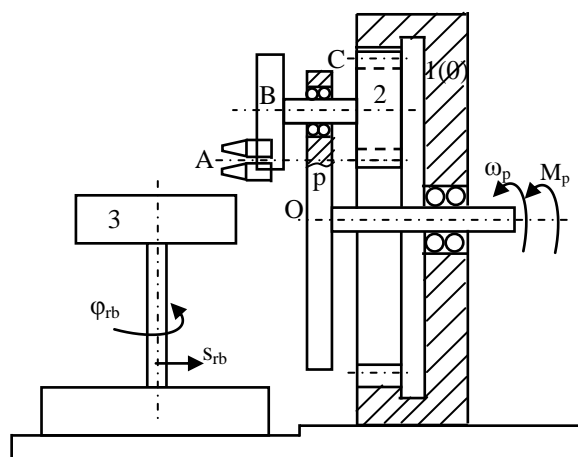


Fig. 5

Pornind de la forța rezistentă F_r , cunoscută și aplicată în punctul A, se calculează, din echilibrul cinetostatic al roții dințate 2 (fig. 4b,c), reacțiunea din angrenajul interior (2,1), considerând ecuația de momente față de punctul B:

$$R_{02} = \frac{F_r}{n_s \cos \alpha} \quad (4.1)$$

unde n_s este numărul roților satelit montate în paralel.

Componenta orizontală din articulația B se deduce din ecuația de momente, în raport cu punctul C, a forțelor care acționează pe roata satelit 2 (fig. 4b,c):

$$R_{p2}^x = 2F_r \quad (4.2)$$

Componenta verticală din articulația B se calculează din ecuația de proiecție pe axa y:

$$R_{p2}^y = F_r \operatorname{tg} \alpha - m_2^* m (z_1 - z_2) \omega_p^2 \quad (4.3)$$

Din echilibrul barei portsatelit p se calculează componentele reacțiunii din lagărul O, reprezentând articulația (O,p) și în mod deosebit valoarea cuplului motor M_p :

$$M_p = R_{p2}^x (r_1 - r_2) = m F_r (z_1 - z_2) \quad (4.4)$$

Acest cuplu motor permite calculul puterii necesare pentru capul de frezat [5] și implicit alegerea motorului electric de acționare a dispozitivului.

Bibliografie

1. Antonescu, P., Cinetostatica și dinamica mecanismelor, Lito UPB, București, 1980.
2. Handra-Luca, V., Introducere în teoria mecanismelor, vol. II, Editura Dacia Cluj Napoca, 1983.
3. Antonescu, P., Antonescu, O., Mecanisme și dinamica mașinilor, Editura Printech București, 2005.
4. Margine, A., Contribuții la sinteza geometro-cinematică și dinamică a mecanismelor planetare cu roți dințate cilindrice, teză de doctorat, UPB, 1999.
5. Ghionea, A., Contribuții la cercetarea teoretică și experimentală a prelucrării roților dințate cilindrice cu dinți curbi, teză de doctorat, UPB, 1980.
6. Antonescu, O., Antonescu, P., Ghionea, A., Cinetostatica mecanismelor planetare cilindrice, rev. Mecanisme și Manipulatoare, Vol. 6, nr. 1, 2007, p. 13-18.