Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială

Bărbăcioru Iuliana Carmen

Seminarul 2

Seminarul 2

2

Cuprins

0.1 Spaţii vectoriale

Exerciţiul 0.1.1 *Spaţiul* $\mathbb{R}^m$ *este m-dimensional.*

Soluţie: Într-adevăr, sã considerãm urmãtorii vectori din $\mathbb{R}^m$:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ...,\ e_m = (0, 0, ..., 0, 1)$$

Deoarece: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m = 0_{\mathbb{R}^m} \Longleftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}) = (0, 0, ..., 0) \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ rezultã cã $e_1, e_2, ..., e_m$ sunt liniar independenţi. Pe de altã parte, dacã $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, atunci $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_m e_m$, deci $L_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_2, ..., e_m\}) = \mathbb{R}^m$.Prin urmare, în baza propoziţiei 3, cursul 1, rezultã cã $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m) = m$. ■

Exerciţiul 0.1.2 *Fie* $K[x]$ *mulţimea tuturor polinoamelor,* $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$, *de grad arbitrar, cu coeficienţi în corpul* K. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *polinoamele:* $1, x, x^2, ..., x^n \in K[x]$ *sunt liniar independente.*

Soluţie: Într-adevãr, din egalitatea: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x + ... + \alpha_n x^n = 0$, înlocuind pe x cu valori diferite $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, obţinem sistemul de ecuaţii cu necunoscutele $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + ... + \alpha_n x_0^n = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_1^n = 0 \\ .... \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + ... + \alpha_n x_n^n = 0 \end{cases}$$

al cãrui determinant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & .... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{vmatrix}$ este nenul (determinant Vandermonde în care $x_0, x_1, ..., x_n$ sunt diferite), prin urmare, sistemul admite numai soluţia banalã $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. În consecinţã $K[x]$ este un K-spaţiu vectorial infinit dimensional. ■

0.2 Modificarea coordonatelor unui vector atunci când se schimbă baza.

Exerciţiul 0.2.1 *Fie* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $B' = \{b_1', b_2', b_3'\}$ *unde* $b_1 = (2, 1, 1)$, $b_2 = (1, 2, 1)$, $b_3 = (1, 1, 2)$, $b_1' = (1, -1, 2)$, $b_2' = (3, 4, 1)$, $b_3 = (2, 3, 0)$.

Arătaţi că B şi B'sunt două baze în $\mathbb{R}^3$. Calculaţi coordonatele vectorului $x = (1,1,2)$, în baza $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ şi matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Soluţie: Matricea coordonatelor vectoriilor b_1, b_2, b_3 în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iar a vectorilor b_1', b_2', b_3' este:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece $det(A) = 4 \neq 0, det(C) = -3 \neq 0$, rezultă că $rangA = rangC = 3$ deci vectorii b_1, b_2, b_3 precum şi b_1', b_2', b_3' sunt liniar independenti şi deci constituie două baze în $\mathbb{R}^3$(vezi observaţia 8).
Matricea A constituie totodată şi matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}$, deci:

$$X_{\mathcal{B}} = A^{-1} \cdot x_E \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

obţinem: $X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C	A
$\begin{matrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{7} & 5 \\ 0 & -4 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & \boxed{-8/7} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5/7 & -2/7 & 1/7 \\ 3/7 & 3/7 & 2/7 \\ -9/7 & 5/7 & -6/7 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7/8 & -3/8 & 1/4 \\ -3/8 & -7/8 & -1/4 \\ 9/8 & -5/8 & 3/4 \end{matrix}$
I	$C^{-1}A$

■

Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, $C^{-1}A$, o vom calcula cu metoda eliminării complete şi vom obţine:

$$C^{-1}A = \begin{pmatrix} 7/8 & -3/8 & 1/4 \\ -3/8 & -7/8 & -1/4 \\ 9/8 & -5/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 0.2.2 *Fie*

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

trei vectori din $\mathbb{R}^3$*, coordonatele lor fiind exprimate în raport cu baza canonică* $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

a) *Să se arate că* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *constituie o bază pentru* $\mathbb{R}^3$.

b) *Să se scrie vectorul* $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$ *având coordonatele exprimate în baza canonică, în baza* $\mathcal{B}^* = \{a_1, a_2, a_3\}$.

c) *Care vor fi coordonatele vectorului* x *în baza* $\mathcal{B}_1 = \{a_1, e_2, e_3\}$. *Dar în baza* $\mathcal{B}_2 = \{a_1, a_2, e_3\}$*? Dar coordonatele vectorului* e_1 *al bazei iniţiale în bazele* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *respectiv* $\mathcal{B}^*$*?*

Soluţie: a) Fie A matricea formată din coordonatele vectorilor a_1, a_2, a_3. Se constată că:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$$

deci $\mathcal{B}^* = \{a_1, a_2, a_3\}$ este bază pentru $\mathbb{R}^3$.

b) Organizăm calculele în tabelul următor. În etapa 1 înlocuim pe e_1 cu a_1 (deoarece coordonata lui a_1 în baza $\mathcal{B}_1$ este $a_{11} = 1 \neq 0$) apoi în etapa a II-a pe e_2 cu a_2 şi în fine în etapa a III-a pe e_3 cu a_3.

	Baza	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	x
←	e_1	1	0	0	1	1	1	100
	e_2	0	1	0	0	1	1	150
	e_3	0	0	1	2	0	1	200

	Baza	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	x
	a_1	1	0	0	1	1	1	100
←	e_2	0	1	0	0	1	1	150
	e_3	-2	0	1	0	-2	1	0

	Baza	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	x
	a_1	1	-1	1	1	0	0	-50
	a_2	0	1	0	0	1	1	150
←	e_3	-2	2	0	0	0	1	300

	Baza	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	x
	a_1	1	-1	0	1	0	0	-50
	a_2	2	1	1	0	1	0	-150
	a_3	-2	2	1	0	0	1	300

deci coordonatele vectorului $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$ scris în baza $\mathcal{B}_0$, devin în baza $\mathcal{B}^* = \{a_1, a_2, a_3\} : (x)_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} -50 \\ -150 \\ 300 \end{pmatrix}$

c) În baza $\mathcal{B}_1 \Rightarrow (x)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $(e_1)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

În baza $\mathcal{B}_2 \Rightarrow (x)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}$ şi $(e_2)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. În baza $\mathcal{B}^* \Longrightarrow (e_1)_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. ■

Observaţia 0.2.3 *Se pot verifica aceste rezultate. De exemplu, pentru e_1 scris în baza $\mathcal{B}^*$ avem:*

$$e_1 = 1a_1 + 2a_2 - 2a_3 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau, x scris în baza $\mathcal{B}_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$:

$$\begin{aligned} x &= -50a_1 + 150a_2 + 300a_3 = -50\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 150\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 300\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}100\\150\\200\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, C. Niţă, I. Stănescu, Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[2] C. BĂRBĂCIORU, *Matematici aplicate în economie,* Editura Universitaria, Craiova, 2001.

[3] V.M Ungureanu, Culegere de probleme de algebra liniară, geometrie analitică şi diferenţială - Partea I, Editura Academica Brancusi, Tg-Jiu, 2011, ISBN 978-973-144-477-2.

[4] V. M. Ungureanu, M. R. Buneci, Algebră Liniară: teorie şi aplicaţii, Editura Mirton Timişoara, 2004, ISBN 973-661-479-4