

# UNIVERSITATEA CONSTANTIN BRÂNCUȘI DIN TÂRGU-JIU

**Clasa a XI-a**

**Concursul "MATE -UCB"- editia a IV-a**

**14 mai 2018**

1. Se dau punctele  $A(-2; 1)$  și  $B(3; 2)$  într-un reper cartezian rectangular  $XOY$ . Să se determine ordonata punctului  $C$  situat pe dreapta  $x = 2$  astfel încât suma distanțelor de la  $C$  la  $A$  și de la  $C$  la  $B$  să fie minimă.

a)  $y = 2$ ; b)  $y = 1, 8$ ; c)  $y = \frac{3}{2}$ ; d)  $y = -2$ ; e) nu există un astfel de punct  $C$ .

2. Să se determine matricea  $X$  care verifică ecuația

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2, 5 & 1 \\ -2/3 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

a)  $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; b)  $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ; c)  $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; d)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ;

e)  $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Să se rezolve inecuația  $\log_5(x^4 + 2x^2 + 1) \leq \log_2 \frac{1}{5|x-1|}$ .

a)  $x \in \emptyset$ ; b)  $x \in (-\infty, -2)$ ; c)  $x \in (5, \infty)$ ; d)  $x \in (2, 5)$ ; e)  $x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$ .

4. Dacă aria triunghiului  $ABC$  este de  $5 \text{ cm}^2$  iar  $AB = 5 \text{ cm}$  și  $AC = 4 \text{ cm}$ , atunci

a)  $\cos A = \sin A$ ; b)  $\cos A \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $\cos A = \frac{1}{2}$ ; d)  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$  sau  $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; e)  $\operatorname{tg}(A) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

5. Dacă  $x^2 - 6x + 3 = 0$ , atunci  $x + \frac{3}{x}$  este egal cu

a)  $-6$ ; b)  $-3$ ; c)  $0$ ; d)  $3$ ; e)  $6$ .

6. Între funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , există relația  $f(x) = [x + 1]g(x)$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ . Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue în  $x = 3$ , atunci  $f(3) - 5g(3) + 3$  este egal cu:

a)  $3$ ; b)  $2$ ; c)  $4$ ; d)  $5$ ; e)  $0$ .

7. Fie  $a_1, a_2, \dots, a_{100} \in (0, \infty)$  primii 100 de termeni ai unei progresii aritmetice cu rația  $r \neq 0$  și fie

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_4}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{97}} + \sqrt{a_{100}}}.$$

Atunci pentru orice  $r > 0$

a)  $S = \frac{\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_1}}{3r}$ ; b)  $S = \frac{100}{\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_1}}$ ; c)  $S = 3r(\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_1})$ ; d)  $S = \frac{100}{\sqrt{a_{100}} + \sqrt{a_1}}$ ;

e)  $S = \frac{3r}{\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_1}}$ .

8) Considerăm matricele  $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Câte din elementele mulțimii  $M$  comută la înmulțire cu matricele  $A$  și  $B$ ?

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) toate.

9. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \begin{cases} bx, & x \leq 0 \\ \ln(b^2x + a^2), & x > 0 \end{cases}$$

este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă

a)  $b = a$ ; b)  $(a, b) \in \{(1, 0), (1, 1)\}$ ; c)  $(a, b) \in \{(-1, 0), (-1, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ ;  
d)  $(a, b) \in \{(-1, 0), (1, 0)\}$ ; e)  $a^2 = b$ .

10. Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea că  $(f \circ f)(x) = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , atunci

a)  $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ; b)  $f(1) \neq f(2)$ ; c)  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ; d)  $f(0) = f(1)$ ;  
e)  $f(f(f(1))) = f(f(f(-1)))$ .

11. Într-o clasă sunt 32 de elevi. În câte moduri se pot repartiza elevii în 8 echipe (de câte 4 elevi fiecare) pentru a participa la un concurs? Se consideră identice repartizările ce conțin echipe identice, eventual renumerotate.

a)  $8C_{32}^4$ ; b)  $\frac{32!}{(4!)^8 8!}$ ; c)  $\frac{32!}{(4!)^8}$ ; d)  $\frac{32!}{(8!)^4 4!}$ ; e)  $\frac{(C_{32}^4)^8}{8!}$ ;

12. Să se determine valoarea numărului  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , a.î. unghiul dintre vectorii

$$a \ln(a) \vec{i} + \sqrt{1 - a^2 \ln^2(a)} \vec{j} \quad \text{și} \quad a \vec{i}$$

să fie maxim.

a)  $a \in (0, \frac{1}{e^2})$ ; b)  $a = \frac{1}{e^2}$ ; c)  $a = e$ ; d)  $a \in \emptyset$ ; e)  $a = \frac{1}{e}$ ;

13. Fie  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c < d$  și  $I = (c, d)$ . Orice funcție continuă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietatea

a)  $f$  este derivabilă;  
b)  $\forall a, b \in I$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$  a.î.  $(f(a) - \lambda)(f(b) - \lambda) < 0 \exists c$  a.î.  $(c - a)(c - b) < 0$  și  $f(c) = \lambda$ ;  
c)  $\forall a, b \in I \exists \lambda \in \mathbb{R}$  a.î.  $(f(a) - \lambda)(f(b) - \lambda) < 0$  și  $\forall c \in I \quad f(c) \neq \lambda$ ;  
d)  $\exists a, b \in I$  și  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  a.î.  $(f(a) - \lambda)(f(b) - \lambda) < 0$  și  $\forall c \in I \quad f(c) \neq \lambda$ ;  
e)  $\exists M > 0$  a.î.  $f(x) < M \forall x \in I$ .

14. Fie  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția dată de formula  $f(x) = ax + 2\sqrt{ax^2 + x + 1}$  este corect definită pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ , atunci

a)  $a = -1$  și  $f$  admite 2 asimptote oblice; b)  $a = -1$  și  $f$  admite 2 asimptote orizontale; c)  $f \in \emptyset$ ; d)  $a = 1$  și  $f$  admite 2 asimptote oblice; e)  $a = 1$  și  $f$  nu admite asimptote.

15. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă cu proprietatea că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2f(x) + f'(x)) = 2018$ . Atunci

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$ ; b) nu există o astfel de funcție; c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 2$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1008$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1009$ ;

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 6 puncte. Pentru fiecare răspuns gresit se scad 3 puncte. Se acordă 60 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore.