

UNIVERSITATEA CONSTANTIN BRÂNCUȘI DIN TÂRGU-JIU

Clasa a XII-a

Concursul "MATE -UCB"- editia a IV-a

14 mai 2018

1. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este $4n^2 - 2n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine primul termen a_1 și rația r .

a) $a_1 = 2$ și $r = 8$; b) $a_1 = 2$ și $r = 10$; c) $a_1 = 4$ și $r = 8$; d) $a_1 = 4$ și $r = 8$; e) $a_1 = 4$ și $r = 9$.

2. Se dau punctele $A(1; 2)$, $B(5; 3/2)$ într-un reper cartezian rectangular XOY . Sa se determine coordonatele punctului C de pe axa OX știind ca mediana din C a triunghiului ABC are ecuatia $x = 3$.

a) $(0; 2)$; b) $(3; 0)$; c) $(3; 7/2)$; d) $(0; 3)$; e) nu sunt suficiente date pentru a fi determinate.

3. Sa se rezolve inecuatia $\frac{1}{x-3} \leq x + 3$.

a) $(-\infty, -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}, \infty)$; b) $[-\sqrt{10}, 3] \cup (\sqrt{10}, \infty)$; c) $(-\infty, -\sqrt{10}] \cup [3, \infty)$; d) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$; e) $[-\sqrt{10}, 3) \cup [\sqrt{10}, \infty)$.

4. Selectati perechile de valori reale m și n de mai jos pentru care vectorii $v = \frac{m}{2}\vec{i} + (n-1)\vec{j}$ și $u = \frac{m+1}{2}\vec{i} + n\vec{j}$ sunt coliniari.

a) $n = 0, m = -1$; b) $n = -2, m = 3$; c) $n = -2, m = -3$; d) $n = -1, m = 3$; e) $n = -2, m = 0$.

5. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1, (6) \\ 2, 5 & |2 - \sqrt{3}| \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & -1/3 \\ 1/2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Atunci matricea $C = A - B$ este egala cu:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 2, (3) \\ 2 & 2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 2, (3) \\ 3 & 2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & 2, (6) \\ 3, 5 & 2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 1, (9) \\ 2 & 2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

6. Care din afirmatiile de mai jos, referitoare la functia $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2x+1}$ sunt adevarate.

a) functia f admite o asimptota oblica; b) functia f admite o asimptota orizontala atat spre $+\infty$ cat si spre $-\infty$; c) functia f admite cel puțin 2 asimptote verticale; d) functia f este continua in $x = -1$; e) functia f este periodica.

7. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție „*” definită prin: $x * y = xy + x + y + m, (\forall) x, y \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Pentru ce valoare a lui m legea „*” este asociativă?

a) doar pentru $m = 1$; b) doar pentru $m = -1$; c) pentru orice valoare reala a lui m ; d) doar pentru $m = 0$; e) pentru orice $m \in \mathbb{R}, m > 0$.

8. Cate soluții are ecuatia $\hat{2} \oplus \hat{6} \otimes x = \hat{4}$ in inelul $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \otimes)$, unde \oplus și \otimes reprezinta simbolurile adunării și, respectiv, înmulțirii modulo 8?

a) o singura solutie; b) 2 solutii; c) 3 solutii; d) 4 solutii; e) 8 solutii.

9. Patru din polinoamele de mai jos sunt factori in descompunerea polinomului $x^{16} - 1$. Care dintre acestea nu este factor?

a) $x^2 + 1$; b) $x^4 + 1$; c) $x^6 + 1$; d) $x^2 - 1$; e) $x^4 - 1$.

10. Se consideră funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Determinați coeficienții a și b știind că

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2017 \text{ ori}}(4) = 4 \text{ și}$$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2018 \text{ ori}}(5) = 5.$$

a) $a = 4, b = 5$; b) $a = 5, b = 4$; c) $a = 1, b = 1$; d) $a = 8, b = -20$; e) $a = -8, b = 20$.

11. Se dau punctele $A(-1; 1)$, $B(3; 2)$ într-un reper cartezian rectangular XOY . Să se determine coordonata x a punctului $C(x, 3)$ astfel încât suma distanțelor de la C la A și de la C la B să fie minimă.

a) $x = 1$; b) $x = \frac{5}{3}$; c) $x = 5$; d) $x = 2$; e) nu există un astfel de punct C .

12. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{x + 1, \frac{1}{x}\}$. Câte din afirmațiile următoare sunt adevărate?

- i). Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}, \infty)$.
 - ii). Graficul funcției f admite o singură asimptotă verticală;
 - iii). Funcția f are un punct de minim;
 - iv). Funcția f este inversabilă;
 - v). Funcția f este derivabilă în fiecare punct al domeniului de definiție.
- a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

13. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și îndeplinește condițiile $f(0) = 2$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{\pi}\right) + x, x \in \mathbb{R}.$$

Care din următoarele formule este $f(x)$?

a) $f(x) = \frac{\pi(2+x)-2}{\pi-1}$; b) $f(x) = \frac{(x+1)(2+\pi)-2}{\pi}$; c) $f(x) = \frac{\pi(2+x)-2x}{\pi}$; d) $f(x) = 2 - \frac{\pi x}{\pi-1}$; e) $f(x) = \pi - \frac{\pi x}{\pi-1}$.

14. Știm că ecuația $x^3 - 6x^2 + (a + 10)x - (2a + 4) = 0$ are trei rădăcini reale diferite. Dacă x_1 și x_3 sunt cea mai mare și respectiv cea mai mică dintre aceste rădăcini, atunci suma $x_1^2 - x_3^2 + 8x_3$ este egală cu

a) 2; b) $2a$; c) 16; d) 0; e) -1 .

15. Câte numere cu 7 cifre satisfac condiția ca produsul ultimelor 4 cifre să fie 28 iar produsul primelor 4 cifre să fie 21.

a) 72; b) 81; c) 45; d) 36; e) 27.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 6 puncte. Pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte. Se acordă 60 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore.