UNIVERSITATEA CONSTANTIN BRÂNCUŞI DIN TÂRGU-JIU

Clasa a XII-a (Niv1)
Concursul "MATE -UCB"- editia a V-a
13 mai 2019

1. Câţi întregi pozitivi b au proprietatea că $\log_b 64$ este un numar întreg pozitiv?
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

2. Se consideră şirul de numere reale $2, 3, 6, x, 2, 4, x, 9$, unde x este ales astfel încât, dacă se aranjează în ordine crescătoare numerele reprezentând minimul valorilor termenilor şirului, maximul valorilor termenilor şirului şi media aritmetică a tuturor termenilor şirului, se obţin termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice. Suma valorilor posibile ale lui x este:
a) 0; b) 5; c) -4; d) 4; e) 5.

3. Se dă punctul $P(1;2)$ în reperul cartezian xOy şi se construiesc simetricele R şi Q ale acestuia faţă de axele Ox şi respectiv Oy. Pe care din următoarele drepte se află centrul de greutate al triunghiului PQR?
a) $y = 2x - 3$; b) $y = x - 2/3$; c) $y = -x$; d) $y = -x + 2/3$; e) $y = x + 1/3$.

4. Fie a_1, a_2, ..., $a_{100} \in (0, \infty)$ primii 100 de termeni ai unei progresii geometrice cu raţia $q > 0, q \neq 1$ şi fie

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_4}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_7}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{97}} + \sqrt{a_{100}}}.$$

Atunci
a) $S = \frac{\sqrt{q^{99}}-1}{\sqrt{a_1}}$; b) $S = \frac{\sqrt{q^{99}}-1}{\sqrt{a_1}q^{48}(q^3-1)}$; c) $S = q\left(\sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_1}\right)$; d) $S = \frac{\sqrt{a_1}\left(\sqrt{q^{99}}-1\right)}{\sqrt{a_{100}}+\sqrt{a_1}}$; e) $S = \frac{\sqrt{q^{99}}-1}{\sqrt{a_1}(\sqrt{a_{100}}-1)}$.

5. Dacă θ este o constantă astfel încat $0 < \theta < \pi$ şi $z + 1/z = 2cos(\theta)$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $z^n + 1/z^n$ este egal cu
a) $2\cos(n\theta)$; b) $2^n \cos\theta$; c) $2(-1)^n \cos n\theta$; d) $2\cos\theta$; e) $2^n (\cos\theta)^n$.

6. Dacă termenii şirului $a_n, n \in \mathbb{N}^*$ sunt negativi şi îndeplinesc condiţia $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + .. + a_n^3 = -\left[\frac{(a_1+a_n)a_n}{2}\right]^2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci suma $2a_1 + 3a_2 + 4a_3$ este:
a) -51; b) -107; c) -108; d) -20; e) mai mare decât $a_1^4 + a_2^3 + a_3^2$.

7. Suma rădăcinilor ecuaţiei $x + |2x - 7| = 5$ este:
a) -6; b) -2; c) 2; d) 6; e) un număr iraţional.

8. Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci suma elementelor matricii A^{2019} este:
a) -2×2021; b) 0; c) -1; d) -2×2019; e) -2×2020.

9. Pentru ce valori ale coeficienţilor a şi b operaţia $x * y = \frac{ax+by}{1+xy}$ nu defineşte o lege de compoziţie pe $(-1, 1)$?
a) $a = b = 1/2$; b) $a = b \in (-1, 1)$; c) $|b| > 1$ sau $|a| > 1$; d) $a = b = 1$; e) $a = b = -1$.

10. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.În câte moduri se poate scrie mulţimea A ca o reuniune de 2 mulţimi disjuncte şi nevide?
a) 2^9-2; b) $\left(C_9^2\right)^2$; c) 2^8-1; d) 2^9-1; e) C_9^2.

11.Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2(x^2+1)(x^2+2)\ldots.(x^2+2019)$. Care din următoarele afirmaţii referitoare la funcţia f nu este adevarată ?
a) Ecuaţia $f(x)=x$ are cel puţin o rădăcină reală.
b) Ecuaţia $f(x)=x$ nu are nici o rădăcină reală din mulţimea $(-\infty,0)\cup[1,\infty)$.
c) Dacă $i\in\mathbb{C}$ este unitatea imaginară, iar g este polinomul definit de funcţia polinomială $f'(x)$, atunci partea imaginară a numărului complex $g(i)$ este $-2\times 2018!$.
d) $(f\circ f)'(0)=(f'(0))^2$.
e) $f''(0)=2019!$.

12. Considerăm funcţia $f:(-\infty,-3]\cup[3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=(x+3)\sqrt{x^2-9}$.Care din urmatoarele afirmatii referitoare la funcţia f este adevărată?
a) Funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$.
b) Funcţia f are exact două puncte de extrem local.
c) Funcţia este derivabilă în toate punctele domeniului său de definiţie.
d) Funcţia are asimptotă oblică spre $+\infty$.
e) Funcţia are două asimptote verticale.

13. Ştiind că limita şirului $a_n=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}, n\in\mathbb{N}$ este $\frac{\pi^4}{90}$, determinaţi limita l a şirului $b_n=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^4}, n\in\mathbb{N}^*$.
a) limita nu există; b) $l=\frac{\pi^4}{96}$; c) $l=2\frac{\pi^4}{90}$; d) $l=\frac{\pi^3}{\sqrt{3}}$; e) $l=\infty$.

14. Limita $\lim_{x\rightarrow\infty} x\int\limits_0^x \frac{1}{2+\cos t}dt$,
a) nu există; b) are valoarea $\frac{1}{2}$; c) are valoarea 2; d) are valoarea $\frac{1}{\sqrt{3}}$; e) are valoarea $+\infty$.

15. Pentru orice funcţie continuă, neconstantă, $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(0)=f(1)$ şi pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, există $x_n\in(0,1)$ astfel încât
a) $f(x_n)=\frac{1}{n}$; b) $f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)=f(x_n)$; c) $|f(x_n)|=\frac{1}{n}$;d) $f(x_n)=\frac{1}{n}x_n$;e) $\frac{f(xn)}{x_n-1}=\frac{n+1}{n}$;

Notă. *Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 6 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte din punctajul total. Se acordă 60 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore.*