UNIVERSITATEA CONSTANTIN BRÂNCUŞI DIN TÂRGU-JIU

Clasa a XI-a (Niv1)
Concursul "MATE -UCB"- editia a V-a
13 mai 2019

1. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ astfel încât $a_1 a_2 ... a_n = 2$ şi fie $A = \left\{ x \in (0,+\infty) \setminus \{1\} : \frac{1}{\log_{a_1}(x)} + \frac{1}{\log_{a_2}(x)} + ... + \frac{1}{\log_{a_n}(x)} > 2 \right\}$. Atunci
a) $A = \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$; b) $A = (0,1)$; c) $A = (1,+\infty)$; d) $A = \left(1, \sqrt{2}\right)$; e) $A = \left(0, \sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$;

2. Pentru ce valori ale parametrilor m şi n suma rădăcinilor ecuaţiei $x^2 + (-m^2+2m)\,x - 3n^2 - nm + 1 = 0$ este minimă şi produsul este maxim?
a) $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{8}$; b) $m = -1$, $n = \frac{1}{4}$; c) $m = 1$, $n = -\frac{1}{6}$; d) $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{8}$; e) $m = -1$, $n = -\frac{1}{4}$;

3. Numărul soluţiilor (x, y) ale ecuaţiei $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ care satisfac condiţia $x, y \in \mathbb{N} \cap (100, 600)$ este
a) 300; b) 416; c) 298; d) 301; e) 0.

4. Dacă $V_{m_0}\left(x_{m_0}, y_{m_0}\right)$ este cel mai apropiat vârf al parabolelor $y = x^2 + (m+1)\,x + m - 2, m \in \mathbb{R}$ de axa Ox atunci distanţa de la V_{m_0} la originea reperului cartezian xOy este:
a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $1+\sqrt{2}$; d) $1-\sqrt{5}$; e) $\sqrt{5}$.

5. Dacă matricea X verifică ecuaţia
$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
atunci
a) $X^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $X^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $X^3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2^x + 2^{y-1} + 3 = 2^{2y+1} \\ 2^{x-3y} = \frac{1}{2} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}$.
a) $(x, y) \in \{(5,2)\,,\ (9,3)\}$; b) $(x, y) \in \{\ (-4,-1)\,,(-1,0)\}$; c) sistemul are o soluţie; d) sistemul are cel puţin trei soluţii; e) sistemul nu are soluţii.

7. Se dă funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x}{1-2019^x} - \frac{x^{2018}}{3}$ pentru orice $x \in (0,\infty)$. Fie $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{x^2} \sin(x)$. Atunci
a) limita nu există; b) $L = \infty$; c) $L = -\infty$; d) $L = 0$; e) $L = \frac{2}{3}$.

8. Câte submulţimi ale mulţimii $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ au exact 4 elemente şi il conţin pe 4 dar nu conţin nici unul dintre elementele 3 sau 5.
a) 20 b) 126 c) 45 d) 76 e) 40

9. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} \lg(x)\lg(y+1) = -\frac{3}{2} \\ x\left(y^2+2y+1\right) = 100 \end{cases}$. Atunci

a) sistemul nu are nici o soluţie; b) sistemul are două soluţii; c) sistemul are doar soluţii (x, y) ce satisfac condiţia $y > \frac{1}{10}$; d) sistemul are cel puţin trei soluţii; e) sistemul are doar soluţii (x, y) ce satisfac condiţia $x > \frac{1}{10}$.

10. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{x^2+4}\right)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, şi şirul de numere reale $(a_n)_n$ cu $a_n = f(1)\, f(2) \ldots f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci
a) $(a_n)_n$ este crescător; b) $(a_n)_n$ este nemărginit; c) $(a_n)_n$ este convergent; d) $a_n > 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
e) $(a_n)_n$ nu are limită.

11. Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 + a^5x^2 + (a+1)x + 2019$, $x \in \mathbb{R}$. Numărul de elemente ale mulţimii $A = \{a \in \mathbb{Z} |\ f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1\}$ este
a) 5; b) 1; c) 3; d) 2; e) 0;

12. Care dintre următoarele afirmaţii despre funcţia $f : D_f \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + \frac{x \cos x}{x^2-1}$, $x \in D_f$ (domeniul maxim de definiţie pentru f) este adevărată?
a) f nu are asimptote oblice, dar are asimptote verticale; b) f nu are limită la $+\infty$; c) f este mărginită; d) f are o asimptotă oblică şi două asimptote verticale; e) f are o asimptotă orizontală şi două asimptote verticale;

13. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $(m-1)e^x + 2m + me^{-x} = 0$ are cel puţin o soluţie reală.
a) $m \in (1, \infty)$; b) $m \in [0, 1)$; c) $m \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$; d) $m \in (0, 1)$; e) $m \in (-\infty, 0)$;

14. Fie $M(a, b)$ un punct de pe dreapta de ecuaţie $2x + 3y - 5 = 0$. Să se determine valoarea minimă m a expresiei $a^2 + 2a + b^2 + 4b + 3$.
a) $m = 13$; b) $m = -\infty$; c) $m = 11$; d) $m = -2$; e) $m = -1$

15. Să se determine ecuaţia laturii BC a unui triunghi ABC pentru care $A(1, 0)$, iar dreptele de ecuaţii $x - 2y + 2 = 0$ şi $-x - 2y + 4 = 0$ sunt înălţimi.
a) $y = 2$; b) $y = 2x$;c) $x - y + 1 = 0$;d) $y = 2x + 1$;e) $3x - y - 2 = 0$

Notă. *Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 6 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte din punctajul total. Se acordă 60 puncte din oficiu.Timp de lucru 2 ore.*