

Concursul „MATE-UCB” - Ediția a VI-a
Universitatea „Constantin Brâncuși” din Târgu-Jiu
16 mai 2025

SUBIECTE pentru nivelul I (cls. a XI-a și a XII-a, Matematică-Informatică)

• **Timp de lucru: 2 ore**

• **Fiecare întrebare are un singur răspuns corect. Se acordă 6 puncte pentru un răspuns corect și se scad 3 puncte pentru fiecare răspuns greșit. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

1. Fie $A = \{x: |3 - |x - 2024|| \leq 2025\}$ numărul elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{N}$ care au 4 cifre este

a) 3043; b) 3023; c) 3063; **d) 3053**; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: d) 3053

Rezolvare: $|3 - |x - 2024|| \leq 2025$, $-2025 \leq |x - 2024| - 3 \leq 2025$, $-2022 \leq |x - 2024| \leq 2028$, $|x - 2024| \leq 2028$, $-2028 \leq x - 2024 \leq 2028$, $-4 \leq x \leq 4052$. Faptul că $x \in \mathbb{N}$ și are 4 cifre implică $x \geq 1000$. Așadar $1000 \leq x \leq 4052$ și $x \in \mathbb{N}$. Numărul este $4052 - 1000 + 1 = 3053$.

2. Produsul soluțiilor ecuației $\sqrt[3]{21-x} + \sqrt[3]{7+x} = 4$ este

a) 110; **b) -120**; c) -115; d) 115; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: b) -120

Rezolvare: Notăm $a = \sqrt[3]{21-x}$ și $b = \sqrt[3]{7+x}$. Avem $a + b = 4$ și $a^3 + b^3 = 28$. Pe de altă parte $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, de unde rezultă $a^2 - ab + b^2 = 7$. Cum $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$, rezultă că $ab = \frac{1}{3}(4^2 - 7) = 3$. Deci a, b sunt rădăcinile ecuației $t^2 - 4t + 3 = 0$, adică $a, b \in \{1, 3\}$. Deci $\sqrt[3]{21-x} = 1$, $x_1 = 20$ sau $\sqrt[3]{21-x} = 3$, $x_2 = -6$. Deci $x_1 x_2 = -120$.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface relația $3f(x) + f(-x) = 4x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(-1)$ este

a) 1; b) -1; c) 2; d) 0; e) $\frac{1}{2}$

R: a) 1

Rezolvare: Înlocuind în relația $3f(x) + f(-x) = 4x^2$ x cu $-x$, obținem $3f(-x) + f(x) = 4x^2$. Înmulțind relația inițială cu -3 și adunând-o cu relația nou obținută, rezultă $-8f(x) = -8x^2$ sau echivalent $f(x) = x^2$ (care verifică relația din enunț). Deci $f(-1) = 1$.

4. Se consideră triunghiul ABC , în care unghiurile $\angle A = 60^\circ$ și $\angle C = 45^\circ$, iar latura $AB = 6$. Care din următoarele este lungimea laturii BC ?

a) $6\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) $4\sqrt{2}$; d) 6; **e) $3\sqrt{6}$** ;

R: e) $3\sqrt{6}$;

Rezolvare: În triunghiul ABC aplicăm teorema sinusurilor: $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ} \Rightarrow BC = \frac{6 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{6}$.

5. Suma modulelor soluțiilor ecuației $|z|^2 + |z| - 6iz = 0$ ($z \in \mathbb{C}$) este

a) 3; b) 6; c) 5; d) 2 e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: c) 5

Rezolvare: $|z|^2 + |z| = 6iz$ implică $6iz \in \mathbb{R}$ și în plus, $6iz \geq 0$. Deci $z = ia$, cu $a \in \mathbb{R}$. Cum $6iz \geq 0$, rezultă $-6a \geq 0$, sau echivalent $a \leq 0$. Ecuația devine $a^2 - a + 6a = 0$, $a^2 + 5a = 0$ care are soluțiile $a_1 = 0$ și $a_2 = -5 \leq 0$. Deci soluțiile ecuației inițiale sunt $z_1 = 0$ și $z_2 = -5i$, de unde rezultă $|z_1| + |z_2| = 0 + 5 = 5$.

Soluția 2: trecem la modul (ținând cont că $|z|^2 + |z| > 0$) și obținem $|z|^2 + |z| = 6|z|$, $|z| = 0$ sau $|z| = 5$. Deci suma este 5.

6. Produsul valorilor parametrului m pentru care vectorii $\vec{v} = (m+2)\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{u} = 3\vec{i} + (m-2)\vec{j}$ sunt coliniari este

a) -20; b) 20; c) -10; d) -8; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: c) -10

Rezolvare: $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există c astfel încât $\vec{v} = c\vec{u}$ sau echivalent $m+2 = 3c$ și $2 = c(m-2)$, de unde rezultă $6 = (m+2)(m-2)$, $10 = m^2$, $m = \pm\sqrt{10}$.

7. Știind că pentru orice numere reale a și b are loc inegalitatea $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, care din următoarele este valoarea $\max\{\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \dots + \cos x_{2025} \sin x_1 : x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in \mathbb{R}\}$?

a) 2025; b) $\frac{2025}{2}$; c) 2024; d) 2023; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: b) $\frac{2025}{2}$

Rezolvare: Avem $(a-b)^2 \geq 0$, de unde rezultă $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ cu egalitate pentru $a = b$.

Deci

$$\begin{aligned} & \cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \dots + \cos x_{2025} \sin x_1 \leq \\ & \leq \frac{1}{2}(\cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \cos^2 x_2 + \sin^2 x_3 + \dots + \cos^2 x_{2025} + \sin^2 x_1) \\ & = \frac{1}{2}(\cos^2 x_1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \sin^2 x_1) \\ & = \frac{2025}{2} \quad (\text{maximul } \frac{2025}{2} \text{ se atinge, de exemplu, pentru } x_1 = \dots = x_{2025} = \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

8. Câte permutări ale numerelor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 au proprietatea că cifra 1 apare înaintea cifrei 2, iar cifra 2 apare înaintea cifrei 3, în cadrul aceleiași permutări?

Exemplu: permutarea (4, 1, 7, 2, 6, 5, 3, 8, 9) respectă regula de mai sus. În schimb, permutarea (1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9) nu respectă regula, deoarece 2 nu apare înaintea lui 3.

a) $\frac{9!}{6!}$; b) $\frac{9!}{4!}$; c) $\frac{9!}{3!}$; d) $\frac{8!}{3!}$; e) $\frac{9!}{5!}$;

R: c) $\frac{9!}{3!}$;

Rezolvare: Alegem pozițiile pe care se găsesc numerelor 1, 2 și 3 care sunt neapărat în acesta ordine. Acestea sunt combinații de 9 luate câte 3. Restul cifrelor, adică $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, pot fi permutate oricum, având $6!$ posibilități. Deci rezultatul este $\frac{9!}{3!6!} 6! = \frac{9!}{3!}$.

9. Câte soluții reale are ecuația $\sin x = \frac{1}{2}$, cu $x \in (\pi; 3\pi)$?

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) o infinitate

R: b) 2;

Rezolvare: Soluțiile ecuației $\sin x = \frac{1}{2}$ sunt de forma $x = (-1)^n \arcsin(\frac{1}{2}) + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Dintre acestea doar $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ și $-\frac{\pi}{6} + 3\pi$ sunt în intervalul considerat.

Soluția 2: Funcția $\sin$ fiind periodică de perioadă 2π , ecuația $\sin x = \frac{1}{2}$ are același număr de soluții în intervalul $(-\pi, \pi)$ ca în intervalul $(\pi; 3\pi)$. Pe intervalul $(-\pi, 0)$ valorile funcției $\sin$ sunt negative, iar pe intervalul $(0, \pi)$, $\sin x = \frac{1}{2}$ are două soluții: $\arcsin(\frac{1}{2})$ și $\pi - \arcsin(\frac{1}{2})$.

10. Fie $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $3^x = 5^y = 2025^{-z}$. Atunci $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}$ este

a) 1; b) -1; c) $\frac{1}{3}$; d) 0; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: d) 0

Rezolvare: Notăm $3^x = 5^y = 2025^{-z} = k > 0$. Atunci $x = \frac{\ln k}{\ln 3}$, $y = \frac{\ln k}{\ln 5}$ și $-z = \frac{\ln k}{\ln 2025}$. Așadar $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4 \ln 3 + 2 \ln 5 - \ln 2025}{\ln k} = \frac{\ln 3^4 5^2 - \ln 2025}{\ln k} = \frac{\ln 2025 - \ln 2025}{\ln k} = 0$.

11. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația r . Dacă $ra_1 = 4$, atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ este

a) 4; b) -4; c) $\frac{1}{4}$; d) ∞ ; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: c) $\frac{1}{4}$

Rezolvare: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + (n-1)r} \right) = \frac{1}{ar_1}$

12. Se presupune cunoscut faptul că dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, atunci

$$X^2 - (a+d)X + \det(X)I_2 = O,$$

unde $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} -2^{2025} & -2^{2024} \\ 2^{2027} & 2^{2026} \end{pmatrix}$ și $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel

încât $X^{2025} = A$. Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X este

a) 2025; b) 1; c) 2; d) 0; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: c) 2

Rezolvare: Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $X^2 - (a+d)X + \det(X)I_2 = O$. Deoarece $0 = \det(A) = \det(X^{2025}) = \det(X)^{2025}$, rezultă că $\det(X) = 0$ și deci $X^2 = (a+d)X$. Ca urmare pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem $X^n = (a+d)^{n-1}X$. Dacă t este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X^n , atunci $t = (a+d)^{n-1}a + (a+d)^{n-1}d = (a+d)^n$. În cazul nostru, $n = 2025$, $t = -2^{2025} + 2^{2026} = 2^{2025}$, și deci $(a+d)^{2025} = 2^{2025}$, de unde rezultă $a+d = 2$.

13. Considerăm determinantul $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^2 - 1 & y^2 - 1 \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Numărul

perechilor ordonate de numere întregi (x, y) pentru care $\Delta(x, y) = 2025$ este

a) 30; b) 15; c) 0; d) 12; e) niciuna dintre variantele a)-d);

R: a) 30

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare: } \Delta(x, y) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^2 - 1 & y^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x^2 - 1 & y^2 - 1 \\ 1 & x^2 - 2 & y^2 - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & y^2 - 1 \\ x^2 - 2 & y^2 - 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^2 - 1 & y^2 - 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -x^2 + 1 + y^2 - 1 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 2025. \quad \text{Deci} \\ &\begin{cases} y - x = k \\ y + x = \frac{2025}{k} \end{cases}, \text{ unde } k \in D_{2025} \quad (\text{mulțimea divizorilor întregi ai numărului } 2025). \end{aligned}$$

Sistemul are o unică soluție (x, y) cu $x, y \in \mathbb{Z}$, pentru fiecare $k \in D_{2025}$ ($y = \frac{k + \frac{2025}{k}}{2} \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\frac{2025}{k} - k}{2} \in \mathbb{Z}$ deoarece 2025 are doar divizori impari). Numărul de divizori naturali ai $2025 = 3^4 5^2$ este $(4 + 1)(2 + 1) = 15$. Deci numărul de divizori întregi este 30 (pentru fiecare divizor natural k se adaugă divizorul $-k$). Deoarece $k \mapsto \frac{\frac{2025}{k} - k}{2}$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{Z}_+$ și pe $\mathbb{Z}_-$ perechile $\left(\frac{\frac{2025}{k} - k}{2}, \frac{k + \frac{2025}{k}}{2}\right)$ sunt distincte pentru valori distincte pozitive (respectiv, negative ale lui k). De asemenea perechile (x_k, y_k) ce corespund $k > 0$ (respectiv, $k < 0$) au $y_k > 0$ (respectiv, $y_k < 0$). Deci sunt de asemenea distincte.

14. Limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)}$ este

a) 0; b) 2; c) ∞ ; d) 1; e) nu există;

R: b) 2

$$\text{Rezolvare: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x - 1}{\sin(x - 1)} \cdot \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x - 1}{\sin(x - 1)} (x + 1) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

15. Fie funcțiile $f, g : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} +$

$\sqrt{2} \ln x$ pentru orice $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Atunci graficele funcțiilor f și g au un punct comun (x_0, y_0) și o tangentă comună în (x_0, y_0) a cărei ecuație este

a) $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $y = x \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$; c) $y = x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$; d) $y = x\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$;
e) niciuna dintre variantele a) - d);

R: d) $y = x\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Rezolvare: $(x_0, y_0) \in G_f \cap G_g \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. În $(x_0, f(x_0))$ tangenta la graficul lui f are panta $f'(x_0)$. Ea este tangentă și la graficul funcției g în $(x_0, g(x_0)) \Leftrightarrow g'(x_0) = f'(x_0)$.

Avem $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}}$ și $g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$. Deci $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{2} \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^4 = 2 \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^4 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ (x > 0)$. Cum avem și $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = g(1)$, rezultă că $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $g'(x_0) = f'(x_0) = g'(1) = \sqrt{2}$. Deci ecuația tangentei comune este $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, adică $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(x - 1)$, $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.