

Concursul „MATE-UCB” Ediția a VI-a
Universitatea „Constantin Brâncuși” din Târgu-Jiu
16 mai 2025

SUBIECTE pentru nivelul al II-lea (cls. a XI-a și a XII-a, Mate-Științe ale naturii, Mate-Tehnologic)

• **Timp de lucru: 2 ore**

• **Fiecare întrebare are un singur răspuns corect. Se acordă 6 puncte pentru un răspuns corect și se scad 3 puncte pentru fiecare răspuns greșit. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

1) Câte numere naturale $n \leq 100$ au proprietatea că $n^2 + 1$ este divizibil cu 5?

- a) 10
- b) 20
- c) 36

- d) 40
- e) 50

2) După două scumpiri succesive, prima de 20% și a doua de 30%, prețul unui obiect a ajuns la 468 de lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?

- a) 300 lei
- b) 312 lei
- c) 350 lei

- d) 360 lei
- e) 400 lei

3) Fie punctul $A(2,3)$. Simetricul său față de dreapta $y = x$ este:

- a) (3, -2)
- b) (2, -3)
- c) (-3, -2)

- d) (3, 2)
- e) (3, 2)

4) Într-un plan, se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,6)$ și dreptele

$$D_1 : 2x - y = 3, \quad D_2 : 3x + 2y = 5.$$

Se notează cu M mulțimea punctelor în care oricare două dintre cele trei drepte AB , D_1 și D_2 se intersectează. Câte elemente are mulțimea M ?

- a) 0
- b) 1
- c) 2

- d) 3
- e) o infinitate

5) Dacă x, y sunt numere reale pozitive astfel încât $-4, x, y, x^2$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice atunci perechea (x, y) este:

- a) $\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2}; 7 + \sqrt{41}\right)$
- b) $\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2}; 7 + \sqrt{41}\right)$
- c) (2; 8)

- d) (1; 5)
- e) (8; 2)

6) Cel mai apropiat punct al parabolei $y = x^2 - 6x + 11$ față de axa Oy este:

- a) (3, 2)
- b) (3, 5)
- c) (2, 3)
- d) (1, 1)
- e) (0, 11)

7) Calculați:

$$\cos(60^\circ) + \cos(120^\circ) + \cos(180^\circ)$$

- a) 1
- b) 0
- c) -1
- d) -0.5
- e) 0.5

8) Câte soluții are ecuația $|2x - 3| = x + 1$ în mulțimea numerelor întregi?

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) o infinitate

9) În reperul cartezian xOy , se consideră punctele $A(1, -2)$, $B(3, 2)$, iar punctele C și D sunt necunoscute. Se știe că: C este mijlocul segmentului AD , iar B este mijlocul segmentului CD . Care din următoarele sunt coordonatele punctului D ?

- a) $D\left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}\right)$
- b) $D(4, 5)$
- c) $D(5, 0)$
- d) $D(2, 3)$
- e) $D\left(\frac{13}{3}, \frac{12}{3}\right)$

10) Ionel a decupat literele siglei „MATEUCB”, le-a amestecat și a început să formeze anagrame ale siglei, adică „cuvinte” care conțin toate aceste literele într-o ordine arbitrară.

Câte anagrame care să înceapă cu litera A poate forma Ionel?

- a) 5040
- b) 720
- c) 1440
- d) 120
- e) 360

11) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A^8 este:

- a) 89
- b) 144
- c) - 89
- d) 112
- e) 233

12) Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

Care dintre următoarele variante oferă, în această ordine: determinantul matricei A , inversa matricei A

și soluția X a ecuației matriciale $A \cdot X = B$?

a) $\det(A) = 5,$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 3 & 2 \\ -\frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

b) $\det(A) = 5,$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{5}{5} & 3 \\ -\frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \\ \frac{14}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

c) $\det(A) = 10,$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

d) $\det(A) = 5,$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e) $\det(A) = 10,$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{5}{5} & 3 \\ -\frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \\ \frac{14}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

13) Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$, unde D este domeniul său maxim de definiție. Care din următoarele afirmații este adevărată?

a) Derivata funcției f are același semn pe întreg domeniul său de definiție.

b) Derivata funcției f se anulează într-un punct din D .

c) Funcția este continuă pe D .

d) $D = (-\infty, \infty)$

e) Funcția nu este definită în $x = 0$.

14) Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x < 2 \\ \frac{x^2+1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$. Care dintre următoarele **NU** este o asimptotă

a funcției $f(x)$?

a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) $y = 1$

d) $y = x + 3$

e) $y = -x + 3$

15) Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^x$. Valoarea derivatei $f'(x)$ în punctul $x = e^{-1}$ este:

a) 0

b) 1

c) $-\frac{1}{e}$

d) $\frac{1}{e^2}$

e) $-\ln e$

Barem de Corectare

Nr.	Răspuns corect	Explicației scurtă
1	d) 40	Doar numerele de forma $n = 5k + 2$ si $n = 5k + 3, n \leq 100$. Total 40 de numre
2	a) 300 lei	Fie x prețul inițial. După prima scumpire: $x \cdot 120/100$. După a doua scumpire: $x \cdot 120/100 \cdot 130/100 = 1,56x$. Deci $1,56x = 468$ și $x = \frac{468}{1,56} = 300$
3	d) (3, 2)	Simetria punctului față de dreapta $y = x$
4	c) 2	Se constata ca $AB \parallel D_1$ si ca $AB \cap D_2$ este un singur punct. Rezulta ca cele trei drepte se intersecteaza 2 câte două în 2 puncte.
5	a) $\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2}; 7 + \sqrt{41}\right)$	Se rezolva sistemul $y = (x + x^2)/2, x = (-4 + y)/2 \Leftrightarrow y = 2x + 4 \Rightarrow x + x^2 = 4x + 8, x > 0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{41}}{2}; y = 7 + \sqrt{41}$
6	e) (0, 11)	Cel mai apropiat punct este cel in care parabola taie axa Oy, $(0, y(0)) = (0, 11)$
7	c) -1	$\cos(60^\circ) + \cos(120^\circ) + \cos(180^\circ) = 1/2 + (-1/2) + (-1) = -1$
8	b) 1	Explicitând modulul obținem două ecuații: $2x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4 \in \mathbf{Z}$ și $-(2x - 3) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2/3 \notin \mathbf{Z}$.
9	a) $D\left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}\right)$	Fie $D(x, y)$, atunci $C = \left(x_C = \frac{1+x}{2}, y_C = \frac{-2+y}{2}\right)$, iar $B = \left(\frac{x+x_C}{2}, \frac{y+y_C}{2}\right) = (3, 2)$. Rezolvând sistemul $\frac{3x+1}{4} = 3, \frac{3y-2}{4} = 2$, rezultă $x = \frac{11}{3}, y = \frac{10}{3}$, deci $D\left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}\right)$.
10	b) 720	În total sunt 7 litere diferite. Daca fixăm litera A pe prima poziție ne rămân $6!=720$ variante.
11	a) 89	Se calculează succesiv $B = A^2, C = B^2$ si $A^8 = C^2$ și se adună elementele matricii rezultate.
12	a) $\det(A) = 5, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$	$\det(A) = 2 * 4 - 3 * 1 = 5, A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$
13	c) Funcția este continua pe D .	$D = (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ si funcția logaritm este continuă pe tot domeniul sau de definiție ca si funcția polinomială $x^2 + 3x + 2$

14	e) $y = -x + 3$	$x = 2$ și $x = 3$ sunt asimptote verticale, $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$, iar $y = x + 3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$
15	a) 0	$f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1)$. Deoarece $\ln(e^{-1}) + 1 = -1 + 1 = 0$, $f'(e^{-1}) = 0$