UNIVERSITATEA CONSTANTIN BRÂNCUȘI DIN TÂRGU JIU
Concursul "MATE - UCB"- editia a VII-a
8 mai 2026

Clasa a XI-a, Nivel 1

1. Considerăm ecuația $\{x\} - \{2x\} = 4x + 2$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x. Atunci

a) ecuația nu are soluții reale; b) ecuația are o soluție reală; c) ecuația are două soluții reale; d) ecuația are trei soluții reale; e) ecuația are o infinitate de soluții reale;

R: c) ecuația are două soluții reale;

Rezolvare. Avem $\{2x\} = \{2([x] + \{x\})\} = \{2\{x\}\}$. În consecință, dacă $\{x\} < \frac{1}{2}$, $\{2x\} = 2\{x\}$, iar dacă $\{x\} \geq \frac{1}{2}$, $\{2x\} = 2\{x\} - 1$.

Deoarece $-1 < \{x\} - \{2x\} < 0$, rezultă că $-1 < 4x + 2 < 0$ sau echivalent $x \in \left(\frac{-3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Ca urmare. $[x] = -1$. Ecuația este echivalentă cu $\{x\} - \{2x\} = 4([x] + \{x\}) + 2 <=> \{x\} - \{2x\} = 4(-1 + \{x\}) + 2 \ <=> \{2x\} + 3\{x\} = 2$.

Cazul 1: $\{x\} < \frac{1}{2}$. Ecuația devine $5\{x\} = 2$, care are rădăcina $\frac{2}{5} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Deci se obține soluția $x_1 = -1 + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$.

Cazul 2: $\{x\} \geq \frac{1}{2}$. Ecuația devine $5\{x\} - 1 = 2$, care are rădăcina $\frac{3}{5} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Deci se obține soluția $x_2 = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$.

2. Se consideră numerele reale nenule x și y astfel încât $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{y^2} = \frac{8}{y^2+3x^2}$ și pentru o asfel de pereche de numere reale se notează $E(x,y) = 10^{-2026}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{2026}$. Atunci

a) $E(x,y) = 3^{-2026}$; b) $E(x,y) = 5^{-2026}$; c) $E(x,y) = 1$; d) nu există numere reale care să verifice relația; e) $E(x,y)$ poate lua mai multe valori reale;

R: a) $E(x,y) = 3^{-2026}$;

Rezolvare. Notăm $\frac{y}{x} = t$, $y = tx$ și obținem $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{t^2x^2} = \frac{8}{t^2x^2+3x^2}$. Împățind prin x^2 rezultă $1 - \frac{3}{t^2} = \frac{8}{t^2+3} <=> \frac{t^2-3}{t^2} = \frac{8}{t^2+3} <=> (t^2-3)(t^2+3) = 8t^2$ $<=> t^4 - 9 = 8t^2$. Notăm $t^2 = u$ și obținem ecuația $u^2 - 8u - 9 = 0$ cu rădăcile $u_1 = -1 < 0$ și $u_2 = 9$, de unde rezultă $t = \pm 3$. Așadar, $10^{-2026}\left(\frac{1}{t} + t\right)^{2026} = 10^{-2026}\left(\frac{1}{\pm 3} \pm 3\right)^{2026} = 10^{-2026}\left(\frac{1}{3} + 3\right)^{2026} = \frac{1}{3^{2026}} = 3^{-2026}$.

3. Din șirul 1, 2, ..., n, ... se șterg cuburile perfecte. În noul șir al 991-lea termen va fi a) 998; b) 999; c) 1000; d) 1001; e) 1002;

R: d) 1001;

Rezolvare. Fie x cel de al 991-lea termen din noul șir și m numărul de termeni elimiați din șirul inițial până la x. Atunci $m = x - 991$, iar $m^3 < x < (m+1)^3$. Deci $m^3 - 991 < x - 991 < (m+1)^3 - 991$, de unde rezultă $m^3 - 991 < m < (m+1)^3 - 991 \ <=> \ m^3 - m < 991 < (m+1)^3 - m$ $<=> (m-1)m(m+1) < 991 < m(m+1)(m+2) + 1$. Deoarece $9 \cdot 10 \cdot 11 <$

$991 < 10 \cdot 11 \cdot 12$, rezultă că $m = 10$. Deci în noul șir al 991-lea termen va fi $x = 991 + 10 = 1001$.

4. Pentru orice pereche de parametri (m, n) cu proprietatea că dreptele

$$d_1 : 40x - (m + 29)y + 10n = 0 \text{ și } d_2 : 4x - 3my + n + 20 = 0$$

sunt paralele, notăm $d\,(m, n)$ distanța dintre d_1 și d_2. Atunci $d\,(m, n)$

a) depinde de n; b) 4; c) 2; d) 3; e) 5;

R: b) 4;

Rezolvare. Dreptele sunt paralele $<=> \frac{40}{4} = \frac{-(m+29)}{-3m} <=> m = 1$. În acest caz dreptele au ecuațiile:

$d_1 : 40x - 30y + 10n = 0 \ <=> 4x - 3y + n = 0$

$d_2 : 4x - 3y + n + 20 = 0$.

Distanța de la un punct $A\,(x_0, y_0)$ la o dreapta d de ecuație $ax + by + c = 0$ este $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Distanța dintre 2 drepte paralele d_1 și d_2 este egală cu distanța dintre un punct $A \in d_1$ și d_2. Dacă $A\,(x_0, y_0) \in d_1$, $d_1 : ax + by + c_1 = 0$ și $d_2 : ax+by+c_2 = 0$, atunci $dist\,(d_1, d_2) = dist\,(A, d_2) = \frac{|ax_0+by_0+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, deoarece $A \in d_1 <=> \ ax_0 + by_0 + c_1 = 0 <=> ax_0 + by_0 = -c_1$.

Ca urmare $d\,(m, n) = d\,(1, n) = \frac{|n-(n+20)|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{20}{5} = 4$.

5. Media aritmetică a soluțiilor ecuației $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ din intervalul $[0,\ \pi]$ este

a) 0; b) nu este definită (ecuația nu are soluții în intervalul $[0, \pi]$); c) nu este definită (ecuații are o infinitate de soluții în intervalul $[0, \pi]$); d) $\frac{\pi}{2}$; e) π;

R: d) $\frac{\pi}{2}$;

Rezolvare. $\sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos(2x)$. Prin urmare, ecuația devine $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cu soluția generală $x = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$. Soluțiile ecuației din intevalul $[0, \pi]$ sunt $x_1 = \frac{3\pi}{8}$ și $x_2 = \frac{5\pi}{8}$.

6. Fie $S = \left\{z \in \mathbb{C}^* : \ \left|z + \frac{3}{z}\right| = 2\right\}$. Notăm $A = 2$, $B = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$, $C = \frac{\sqrt{10}+1}{2}$, $D = 3$, $E = \frac{7}{2}$ și $M = \max\{|z| : z \in S\}$. Atunci

a) $M = A$; b) $M = B$; c) $M = C$; d) $M = D$; e) $M = E$;

R: d) $M = D$;

Rezolvare. Pentru $z \in S$ avem $2 = \left|z + \frac{3}{z}\right| \geq |z| - \frac{3}{|z|}$. Notând $r = |z| > 0$ obținem $2r \geq r^2 - 3 <=> r^2 - 2r - 3 \leq 0 <=> r \in [-1, 3]$. Deci $r \ \leq 3$ și $M \ \leq 3$. Pentru $z = 3i$, avem $\left|z + \frac{3}{z}\right| = |3i - i| = 2$, de unde rezultă $3i \in S$ și $M \geq |3i| = 3$. Așadar $M = 3$.

7. Pentru orice număr real r se consideră matricea $C\,(r) = \begin{pmatrix} 1+2r & -4r \\ 3r & 1-6r \end{pmatrix}$. Observați că $C\,(x)\,C\,(y) = C\,(x + y - 4xy)$ pentru orice x și y. Să se determine numărul real x care verifică ecuația $C\,(1)\,C\left(\frac{1}{2}\right)...C\left(\frac{1}{2026}\right) + C(x) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) $x=\frac{1}{2}$; b) $x=\frac{3}{2}$; c) $x=\frac{5}{2}$; d) $x=\frac{5}{4}$; e) $x=\frac{3}{4}$;
R: e) $x=\frac{3}{4}$;
Rezolvare
Avem $C(x)\,C(y)=C(y)\,C(x)$ și înlocuind $y=\frac{1}{4}$ în $C(x)\,C(y)=C(x+y-4xy)$, obținem $C(x)\,C\left(\frac{1}{4}\right)=C\left(\frac{1}{4}\right)$ pentru orice x. În consecință, $C(1)\,C\left(\frac{1}{2}\right)...C\left(\frac{1}{2026}\right)$ $=\ C(1)...C\left(\frac{1}{4}\right)...C\left(\frac{1}{2026}\right)\ =\ C\left(\frac{1}{4}\right)$. Deci $C(1)\,C\left(\frac{1}{2}\right)...C\left(\frac{1}{2026}\right)+C(x)=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ $<=>$ $C\left(\frac{1}{4}\right)+C(x)=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ $<=>$ $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}+2x & -1-4x\\ \frac{3}{4}+3x & \frac{1}{2}-6x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ $<=>$ $x=\frac{3}{4}$.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă care safisface condiția $f(x\lg 20)-f(x)=2x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $f(3)-f(2)$ este
a) $2(1+\log_2 5)$; b) $\log_2 10$; c) $\lg 15$; d) $2-\log_2 5$; e) $2+\log_2 5$;
R: a) $2(1+\log_2 5)$;
Rezolvare

$$f(x)-f\left(\frac{x}{\lg 20}\right)=\frac{2x}{\lg 20}$$

$$x=\frac{x}{\lg^2 20} => f\left(\frac{x}{\lg 20}\right)-f\left(\frac{x}{\lg^2 20}\right)=\frac{2x}{\lg^2 20}$$

....

$$x=\frac{x}{\lg^n 20} => f\left(\frac{x}{\lg^{n-1} 20}\right)-f\left(\frac{x}{\lg^n 20}\right)=\frac{2x}{\lg^n 20}$$

Adunând obținem $f(x)-f\left(\frac{x}{\lg^n 20}\right)=\frac{2x}{\lg 20}\left(1+\frac{1}{\lg 20}+...+\frac{1}{\lg^{n-1} 20}\right)=\frac{2x}{\lg 20}\frac{\left(\frac{1}{\lg 20}\right)^n-1}{\frac{1}{\lg 20}-1}$. Trecând la limită cu $n\to\infty$ obținem $f(x)-f(0)=\frac{2x}{\lg 20}\frac{1}{1-\frac{1}{\lg 20}}=\frac{2x}{\lg 20-1}=\frac{2x}{\lg 2}=2x\log_2 10$. Ca urmare $f(3)-f(2)=6\log_2 10-4\log_2 10=2\log_2 10=2(1+\log_2 5)$.

9. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația $f(-x)-xf(x)=\sqrt{1+x^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Pentru funcția f care verifică relația se definește mulțimea $S=\{m\in\mathbb{R}:$ ecuația $f(x)=m$ are exact 2 soluții reale distincte$\}$. Atunci
a) $S=\emptyset$; b) Nu există funcții f care să verifice relația din enunț; c) $S=\mathbb{R}$; d) $S=\left(-1,\sqrt{2}\right)$; e) $S=\left(1,\sqrt{2}\right)$;
R: e) $S=\left(1,\sqrt{2}\right)$;
Rezolvare. Avem $f(-x)-xf(x)=\sqrt{1+x^2}$ și înlocuind x cu $-x$ obținem $f(x)+xf(-x)=\sqrt{1+x^2}$. Așadar, $\begin{cases} f(-x)-xf(x)=\sqrt{1+x^2}\,|-x\\ xf(-x)+f(x)=\sqrt{1+x^2}\end{cases}$, de unde prin adunarea ecuațiilor obținem $\left(x^2+1\right)f(x)=\sqrt{1+x^2}\,(-x+1)$ sau echivalent $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}(1-x)}{x^2+1}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$. Studiem variația funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ (singura funcție care verifică relația impusă). Calculăm derivată $f'(x)=\frac{-\sqrt{1+x^2}-(1-x)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{-x-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Avem $f'(x)=0 <=>\quad x=-1$, funcția este strict crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și strict

descrescătoare pe $[-1,\infty)$. Pe de altă parte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{-1}{-1} = 1$, $f(-1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -1$. Deoarece f este continuă și strict crescătoare pe $(-\infty,-1]$, rezultă $f((-\infty,-1]) = \left(1,\sqrt{2}\right]$. Similar, $f([-1,\infty)) = \left(-1,\sqrt{2}\right]$. Așadar,

- pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left(-1,\sqrt{2}\right]$ ecuația $f(x) = m$ nu are soluții reale
- pentru $m \in (-1,1]$ ecuația $f(x) = m$ are o soluție (în intervalul $[-1,\infty)$)
- pentru $m \in \left(1,\sqrt{2}\right)$ ecuația $f(x) = m$ are o soluție în intervalul $(-\infty,-1)$ și o soluție în intervalul $(-1,\infty)$-
- pentru $m = \sqrt{2}$, ecuația $f(x) = m$ are o soluție $(x = -1)$.

Ca urmare $S = \left(1,\sqrt{2}\right)$.

10. Se consideră o funcție $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^{1-\frac{1}{x-1}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Fie y ordonata intersecției dintre asimptota oblică la graficul funcției f spre $+\infty$ și tangenta la grafic în punctul de abscisă 2. Atunci

a) $y = \frac{e}{e-2}$; b) funcția nu admite asimtote oblice; c) $y = -1$; d) tangenta la grafic în punctul de abscisă 2 și asimptota oblică coincid ; e) tangenta la grafic în punctul de abscisă 2 și asimptota oblică sunt paralele;

R: a) $y = \frac{e}{e-2}$;

Rezolvare. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} e^{1-\frac{1}{x-1}} = e$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)e^{1-\frac{1}{x-1}}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x} e^{1-\frac{1}{x-1}} = e$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx =$

$\lim\limits_{x\to\infty} (x-1)e^{1-\frac{1}{x-1}} - ex = \lim\limits_{x\to\infty} ex\left(e^{-\frac{1}{x-1}}-1\right) - e^{1-\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} ex\left(e^{-\frac{1}{x-1}}-1\right) - e = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ex}{x-1}(x-1)\left(e^{-\frac{1}{x-1}}-1\right) - e = \lim\limits_{x\to\infty} e(x-1)\left(e^{-\frac{1}{x-1}}-1\right) - e \overset{t=\frac{1}{x-1}}{=} \lim\limits_{t\to 0} e\frac{1}{t}\left(e^{-t}-1\right) - e = \lim\limits_{t\to 0} e\frac{e^{-t}-e^{-0}}{t-0} - e = e\left(e^{-t}\right)'\Big|_{t=0} - e = -e - e = -2e$. În concluzie, graficul funcției admite asimptota oblică $y = ex - 2e$.

Tangenta la grafic în punctul de abscisă 2 are ecuația $y - f(2) = f'(2)(x-2)$. Calculăm derivata $f'(x) = e^{1-\frac{1}{x-1}} + (x-1)e^{1-\frac{1}{x-1}}\frac{1}{(x-1)^2} = e^{1-\frac{1}{x-1}}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$ și obținem $t'(2) = 2$, iar ecuația tangentei a grafic în punctul de abscisă 2 este $y - 1 = 2(x-2)$. Rezolvând sistemul $\begin{cases} y = e(x-2) \\ y-1 = 2(x-2) \end{cases}$, obținem $\frac{y}{y-1} = \frac{e}{2} <=> \frac{y}{-1} = \frac{e}{2-e} <=> y = \frac{e}{e-2}$.

Notă. Timp de lucru: 2 ore

Fiecare întrebare are un singur răspuns corect. Se acordă 10 puncte pentru un răspuns corect. Punctajul maxim este 100.