

Dragoș-Pătru Covei

Gheorghe Caralicea-Mărculescu

Vasile Lupulescu

MATEMATICĂ
pentru institutori (învațători)

- *Definitivat*
- *Licență*
- *Probleme date la concursul pentru ocuparea catedrelor vacante*
- *Probleme date la examenul de gradul II*

Referenți Științifici:

Prof. univ. dr. George Vraciu

Conf. univ. dr. Ion Chiriac

Tehnoredactare computerizată:

Dragoș-Pătru Covei

Editura: **SITECH**

ISBN:

2005

Prefață

*Această lucrare se adresează în mod special studenților de la specializarea: **Pedagogia învățământului primar și preșcolar** și are scopul de a constitui un sprijin considerabil în susținerea de către aceștia a examenelor de licență și de definitivat. Din acest motiv s-a avut în vedere ca prin conținutul său lucrarea să acopere „Programa de perfecționare prin definitivat”-partea de teoria mulțimilor-, în vigoare, și extins pe cea de licență.*

Pentru îndeplinirea obiectivului, linia de conduită s-a îndreptat cu atenție spre prezentarea materialului științific de pe poziții de înțelegere și independență față de alte lucrări. Cunoașterea manualelor de liceu asigură parcurgerea lesnicioasă a lucrării.

În aceeași idee, acolo unde suportul teoretic merge spre o accentuată abstractizare, au fost introduse exemple de exerciții rezolvate. Pentru fixarea cunoștințelor fiecare capitol conține și un set de exerciții propuse spre rezolvare.

Lucrarea poate fi utilizată cu folos și de către cei care într-un mod sau altul vin în contact, la un anumit moment, cu teorii ale matematicii.

Capitolul I. Elemente de logică matematică

Fiecare disciplină științifică necesită un raționament clar și logic, precum și o exprimare riguroasă și precisă. Din acest punct de vedere, enunțurile trebuie să fie lipsite de ambiguități și contradicții.

Prin *enunț* vom înțelege orice text lingvistic în care se afirmă ceva cu privire la unul sau mai multe obiecte. O astfel de afirmație poate avea sau nu o anume semnificație. Obiectul sau obiectele unui enunț trebuie să aparțină unui domeniu bine specificat, numit *domeniul (mulțimea) de referință* al enunțului. Din punct de vedere sintactic, la orice enunț vom distinge: *partea predicativă* și *subiectul* sau *subiectele*. Subiectul sau subiectele unui enunț reprezintă *obiectul* sau *obiectele* la care se referă enunțul.

Un enunț poate avea toate subiectele *determinate* sau poate avea unul sau mai multe subiecte *nedeterminate*.

În funcție de domeniul de referință, același enunț poate fi *adevărat* sau *fals* sau nu i se poate stabili o *valoare de adevăr*, adică este *indecidabil*.

Enunțul:

p: "Mingea este rotundă"

este adevărat dacă domeniul de referință este fotbalul, este fals dacă domeniul de referință este Rugby-ul și indecidabil dacă domeniul de referință este Sportul.

Un enunț cu toate subiectele determinate se numește *propoziție* dacă este sau adevărat sau fals, nu și una și alta simultan. Un enunț cu unul sau mai multe subiecte nedeterminate se numește *predicat* dacă pentru orice valoare dată subiectelor nedeterminate devine propoziție. Subiectele nedeterminate ale unui predicat se numesc *variabilele* predicatului.

În funcție de numărul subiectelor nedeterminate distingem predicate cu o variabilă (*unare*), cu două (*binare*), etc.

Enunțul

p: "Oaia este carnivoră"

are domeniul de referință zoologia iar partea predicativă constă din textul

"... este carnivoră"

Enunțul are un singur subiect determinat: "Oaia", deci reprezintă – propoziție.

Notăția p : semnifică faptul că enunțul " Oaia este carnivoră " va fi reprezentat prin simbolul p .

Enunțul

$p(x)$: "x este divizibil prin 2"

are domeniul de referință teoria numerelor iar partea predicativă constă din textul

"... este divizibil prin ..."

Enunțul are două subiecte:

"x" și "2", dintre care unul nedeterminat.

Observăm că dând lui x valori enunțul devine adevărat sau fals însă nu și una și alta simultan, prin urmare este un predicat cu o variabilă.

Enunțul

$p(x,y)$: "x este divizibil prin y"

este un predicat cu două variabile având domeniul de referință teoria numerelor.

1. Elemente de calculul propozițiilor

După cum am văzut o propoziție este un enunț cu toate subiectele determinate care este adevărat sau fals nu și una și alta simultan. Astfel de propoziții le numim propoziții *simple*.

O propoziție poate fi *adevărată* sau *falsă* dacă corespunde sau nu unei stări de fapt din domeniul său de referință. Calitatea unei propoziții de a fi adevărată sau falsă se numește *valoarea de adevăr* a propoziției respective.

Propozițiile simple le notăm prin:

$p, q, r, \dots$

În continuare, propozițiilor adevărate le atribuim *valoarea de adevăr 1* iar propozițiilor false *valoarea de adevăr 0*.

Plecând de la una sau mai multe propoziții simple prin aplicarea unui număr finit de operatori (conectori) logici obținem alte propoziții numite propoziții compuse.

Există patru operatori logici de bază:

$\neg$ (citit *non*), $\wedge$ (citit *și*), $\vee$ (citit *sau*) și $\rightarrow$ (citit *implică*).

Definiție. Fie p propoziție. Propoziția care se obține punând particula "*nu*" în fața părții predicative a propoziției p se numește *negația* propoziției p și se notează prin simbolul $\neg p$.

Negația propoziției p este adevărată numai când p este falsă.

Exemplu. " 2 este număr par " cu domeniul de referință mulțimea numerelor naturale.

Negația lui p este

$\neg p$: " 2 nu este număr par "

p fiind o propoziție adevărată, pe când $\neg p$ este o propoziție falsă.

Este ușor să folosim un tabel de adevăr pentru a verifica relațiile dintre valorile de adevăr ale propozițiilor.

Tabelul de adevăr pentru $\neg p$ în funcție de valoarea de adevăr a lui p este:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Definiție. Fie p, q propoziții. Propoziția care se obține punând particula "și" între părțile predicative se numește *conjuncția* propozițiilor p, q și se notează prin simbolul $p \wedge q$.

Propoziția $p \wedge q$ este adevărată numai când ambele propoziții sunt adevărate.

Exemplu. Propoziția "2 este număr par și 3 este număr par" cu domeniul de referință mulțimea numerelor naturale este conjuncția propozițiilor:

p : "2 este număr par"

q : "3 este număr par",

p fiind adevărată iar q falsă.

Valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$ în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p, q este dată în tabelul:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Definiție. Fie p, q propoziții. Propoziția care se obține punând particula "sau" între părțile predicative se numește *disjuncția* propozițiilor p, q și se notează prin simbolul $p \vee q$.

Propoziția $p \vee q$ este adevărată numai când una din propoziții este adevărată.

Exemplu. Propoziția " 8 este multiplu de 2 sau 5 este număr întreg" cu domeniul de referință mulțimea numerelor naturale este disjuncția propozițiilor:

p : " 8 este multiplu de 2 " ; q : " 5 este număr întreg " , p, q fiind adevărate.

Valorea de adevăr a propoziției $p \vee q$ în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p, q este dată în tabelul:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Definiție. Fie p, q propoziții. Expresia " p implică q " este o nouă propoziție, numită *implicația* propozițiilor p, q . Implicația propozițiilor p, q se notează $p \rightarrow q$.

Implicația propozițiilor p, q este o propoziție falsă când propoziția q este falsă iar p este o propoziție adevărată și adevărată în celelalte cazuri.

Exemplu. Propoziția „ $x^2 \leq 0$ implică $x = 0$ ” cu domeniul de referință mulțimea numerelor reale este implicația propozițiilor:

p : " $x^2 \leq 0$ " ; q : " $x = 0$ " ea fiind o propoziție adevărată.

Pentru exprimarea " p implică q " se mai folosește:

- " p atunci q "
- " p este suficient pentru q "
- " q este necesar pentru p "

Valorea de adevăr a propoziției $p \rightarrow q$ în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p, q este dată în tabelul:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Propoziția $q \rightarrow p$ se numește *reciproca* propoziției $p \rightarrow q$.

Dacă combinăm propoziția $p \rightarrow q$ cu propoziția $q \rightarrow p$, obținem o nouă propoziție careia îi spune *echivalența* propozițiilor p, q . Echivalența propozițiilor se notează $p \leftrightarrow q$.

Definiție. Fie p, q propoziții. Echivalența $p \leftrightarrow q$ este acea propoziție care este adevărată când p, q au aceeași valoare de adevăr și este falsă în rest.

Propoziția $p \leftrightarrow q$ se citește « p dacă și numai dacă q ».

Exemplu. Propoziția " $x^3 \leq 0$ dacă și numai dacă $x \leq 0$ " cu domeniul de referință mulțimea numerelor reale este echivalența propozițiilor:

p : " $x^3 \leq 0$ implică $x \leq 0$ "; q : " $x \leq 0$ implică $x^3 \leq 0$ "

ea fiind o propoziție adevărată.

Notăm că echivalența $p \leftrightarrow q$ este adevărată când $p \rightarrow q$ și $q \rightarrow p$ sunt adevărate.

Pentru exprimarea " p dacă și numai dacă q " se mai folosește:

- " p este necesar și suficient pentru q "
- " p dacă și numai dacă q , și invers"

Valoarea de adevăr a propoziției $p \leftrightarrow q$ în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p, q este dată în tabelul:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Vom nota prin A sau $A(p, q, r, \dots)$, B sau $B(p, q, r, \dots)$ propozițiile *compuse* (sau expresii logice) obținute prin aplicarea diferiților operatori logici propozițiilor simple $p, q, r, \dots$

$A(p, q, r) : (p \vee q) \rightarrow r \dots\dots\dots$

Calculul propozițiilor studiază expresiile logice din punctul de vedere al adevărului sau falsului lor în raport cu valorile logice ale propozițiilor simple care le compun.

O expresie logică $A(p, q, r, \dots)$ care este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor $p, q, r, \dots$ se numește *tautologie*.

Dacă

$A(p, q, r, \dots) \rightarrow B(p, q, r, \dots)$

este o tautologie atunci scriem

$A(p, q, r, \dots) \Rightarrow B(p, q, r, \dots)$

Dacă

$A(p, q, r, \dots) \leftrightarrow B(p, q, r, \dots)$

este o tautologie scriem

$A(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow B(p, q, r, \dots)$

Observații:

1. Semnul $\rightarrow$ este o operație din care deducem valoarea de adevăr a propoziției $A \rightarrow B$ în timp ce $\Rightarrow$ indică legătura între propozițiile $A(p, q, r, \dots)$, $B(p, q, r, \dots)$.

2. Semnul $\leftrightarrow$ este o operație din care deducem valoarea de adevăr a propoziției $A \leftrightarrow B$ în timp ce $\Leftrightarrow$ indică legătura între propozițiile $A(p, q, r, \dots)$, $B(p, q, r, \dots)$.

Exemple de tautologii :

1. *legea terțului exclus:* $p \vee (\neg p)$
2. *legea silogismului:* $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
3. *legea de reflexivitate:* $p \leftrightarrow p$
4. *legea idempotenței conjuncției:* $p \wedge p \leftrightarrow p$
5. *legea idempotenței disjuncției:* $p \vee p \leftrightarrow p$
6. *legea dublei negații:* $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
7. *legea de comutativitate a conjuncției:* $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
8. *legea de comutativitate a disjuncției:* $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
9. *legea de asociativitate a conjuncției:*

$$[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$
10. *legea de asociativitate a disjuncției:*

$$[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$
11. *Legile lui De Morgan:*

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$
12. *Legea de distributivitate a conjuncției:*
-în raport cu disjuncția: $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
13. *Legea de distributivitate a disjuncției :*
-în raport cu conjuncția:

$$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$
14. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Demonstrăm 1 :

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
1	0	1
0	1	1

Demonstrăm 2.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

2. Elemente de calculul predicatelor

Amintim că prin predicat se înțelege un enunț cu unul sau mai multe subiecte nedeterminate care depinde de o variabilă sau de mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice valori date variabilelor se obține o propoziție adevărată sau o propoziție falsă.

Observație. Ori de câte ori definim un predicat, trebuie să indicăm și mulțimile în care variabilele iau valori.

Exemplu.

Predicatul

$$p(x): "x < 4, x \in \mathbf{R}"$$

are domeniul de referință mulțimea numerelor reale iar partea predicativă constă în textul

"...este mai mic decât ..."

Predicatul are două subiecte: " x " și " 4 ", dintre care unul nedeterminat, prin urmare, este un predicat cu o variabilă.

Exemplu.

Fie $p(x, y)$ predicatul " $2x+y=2$ ". Care sunt valorile de adevăr ale propozițiilor $p(2,0)$ și $p(1,0)$?

Propoziția $p(2,0)$ obținută atribuind lui x, y valorile $x = 2, y = 0$ este o propoziție falsă, în timp ce propoziția $p(1,0)$ obținută atribuind lui x, y valorile $x = 1, y = 0$ este o propoziție adevărată.

Exercițiu. Fie $p(x)$ predicatul " $x < 4, x \in \mathbf{R}$ ". Care sunt valorile de adevăr ale propozițiilor $p(5)$ și $p(4)$?

În general, un predicat cu n variabile $x_1, x_2, \dots, x_n$ este notat prin $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Fie $p(x), q(x)$ predicate unare. Cu ajutorul operatorilor logici construim și alte predicate unare, anume:

$$\neg p(x), p(x) \vee q(x), p(x) \wedge q(x), p(x) \rightarrow q(x), p(x) \leftrightarrow q(x)$$

Astfel, de exemplu, pentru predicatul $p(x)$, $\neg p(x)$ este predicatul căruia pentru fiecare valoare $x = a$ îi corespunde propoziția $\neg p(a)$.

Strâns legată de noțiunea de predicat apare noțiunea de *cuantificator*. Distingem următoarele tipuri de cuantificatori:

Definiție. Propoziția *universală* a lui $p(x)$ este propoziția " $p(x)$ este o propoziție adevărată pentru orice valoare a lui x din domeniul de referință". Notăția $(\forall x)p(x)$ denotă propoziția universală a lui $p(x)$.

Semnul $\forall$ se numește *cuantificator universal*.

Pentru propoziția universală a lui $p(x)$ se folosesc și exprimările:

" pentru toți x , $p(x)$ "

" pentru fiecare x , $p(x)$ ".

Exemplu. Orice elev din clasa a IX^a cunoaște mulțimea numerelor naturale.

Predicatul este

$p(x)$: " Orice elev cunoaște mulțimea numerelor naturale "

Mulțimea în care $p(x)$ este adevărat este elevii clasei a IX^a.

Dacă propoziția $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ este adevărată, atunci vom folosi notația $p(x) \Rightarrow q(x)$ și citim: " $p(x)$ implică $q(x)$ ". Se mai spune, în acest caz, că predicatul $q(x)$ este o consecință logică a predicatului $p(x)$.

Exemplu. Considerând predicatele

$p(x)$: " $x = 1$ "

și

$q(x)$: " $x^3 - 1 = 0$, $x \in \mathbf{R}$ "

cu domeniul de referință mulțimea numerelor reale, avem $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Dacă propoziția $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$ este adevărată, atunci vom folosi notația $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ și citim: " $p(x)$ dacă și numai dacă $q(x)$ ". Se mai spune, în acest caz, că predicatele $p(x)$, $q(x)$ sunt echivalente logic.

Exemplu. Considerând predicatele

$p(x)$: " $x > 0$, $x \in \mathbf{R}$ "

și

$q(x)$: " $x^3 > 0$, $x \in \mathbf{R}$ "

cu domeniul de referință mulțimea numerelor reale, avem $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

Observație. Relațiile de *consecință logică* și *echivalență logică* pot fi definite și între predicate n^{are} , unde $n \geq 2$, într-un mod asemănător.

Definiție. Propoziția existențială a lui $p(x)$ este propoziția " există cel puțin un x din domeniul de referință astfel încât $p(x)$ ".

Notația $(\exists x)p(x)$ denotă propoziția existențială a lui $p(x)$ și este o propoziție adevărată când există cel puțin un element x_0 din domeniul de referință astfel încât $p(x_0)$ este adevărată.

Semnul $\exists$ se numește *cuantificator existențial*.

Pentru propoziția existențială a lui $p(x)$ se folosește și exprimarea:

" există x , $p(x)$ "

Exemplu. Dacă considerăm predicatul

$p(x)$: " $x+5=0$, $x \in \mathbf{R}$ "

cu domeniul de referință mulțimea numerelor întregi, atunci propoziția existențială lui $p(x)$ este adevărată, deoarece pentru $x = -5$ $(\exists x)(x+5=0)$ astfel propoziția

$p(-5)$: " $-5+5=0$ "

este adevărată.

Considerăm în continuare predicatul $p(x)$ definit numai pentru un număr finit de valori ale variabilei x , anume $x_1, x_2, \dots, x_n$, atunci:

$$\begin{aligned} (\forall x) p(x) &\Leftrightarrow p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n) \\ &\text{și} \\ (\exists x) p(x) &\Leftrightarrow p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n) \end{aligned}$$

Ținând cont de legile lui De Morgan (vezi paragraful 1 proprietatea 11), rezultă

$$\begin{aligned} \neg(\forall x) p(x) &\Leftrightarrow \neg p(x_1) \vee \neg p(x_2) \vee \dots \vee \neg p(x_n) \\ &\text{și} \\ \neg(\exists x) p(x) &\Leftrightarrow \neg p(x_1) \wedge \neg p(x_2) \wedge \dots \wedge \neg p(x_n) \end{aligned}$$

Regulile de negație stabilite mai sus, sunt valabile și în cazul general. Deci pentru orice predicat unar $p(x)$ avem:

$$\begin{aligned} \text{a) } \neg(\forall x) p(x) &\Leftrightarrow (\exists x) (\neg p(x)) \\ \text{b) } \neg(\exists x) (\neg p(x)) &\Leftrightarrow (\forall x) (\neg p(x)) \end{aligned}$$

Exemplu. Să considerăm predicatul

$$p(x): " (\exists x \in N) \text{ astfel încât } x+1=2 "$$

a căruia valoare de adevăr este *adevărul*.

Negația ei este propoziția

$$\neg p(x): " (\forall x \in N) , \text{ avem } x+1 \neq 2 "$$

evident o propoziție *falsă*.

Predicate binare. Fie $p(x, y)$ un predicat binar.

Folosind cuantificatorii $\exists$ și $\forall$ putem forma predicatele unare:

$$(\exists x) p(x, y) \text{ și } (\forall x) p(x, y)$$

unde y este variabila acestor două predicate. Din aceste predicate unare putem forma predicatele:

$$"(\exists y)(\exists x) p(x, y), (\forall y)(\exists x) p(x, y), (\exists y)(\forall x) p(x, y) \text{ și } (\forall y)(\forall x) p(x, y)"$$

În continuare vom arăta cum se deduc legile de negație pentru predicatele binare, din legile de negație pentru predicate unare.

Adică:

$$\begin{aligned} \text{a') } \neg((\forall y)(\exists x) p(x, y)) &\stackrel{\text{din a)}}{\Leftrightarrow} \exists y(\neg(\exists x) p(x, y)) \stackrel{\text{din b)}}{\Leftrightarrow} (\exists y)(\forall x)(\neg p(x, y)) \\ \text{b') } \neg((\exists y)(\exists x) p(x, y)) &\stackrel{\text{din b)}}{\Leftrightarrow} \forall y(\neg(\exists x) p(x, y)) \stackrel{\text{din b)}}{\Leftrightarrow} (\forall y)(\forall x)(\neg p(x, y)) \end{aligned}$$

Analog se extind aceste rezultate la predicate n -are.

3. Teoremă directă, teoremă reciprocă. Metoda demonstrației prin reducere la absurd.

O *teoremă* este o propoziție adevărată care stabilește că unul sau mai multe obiecte posedă o proprietate, forma lor generală fiind:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

unde $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se numește ipoteza teoremei iar $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se numește concluzia teoremei.

Teoremele care se acceptă fără demonstrație se numesc axiome.

Demonstrația unei teoreme constă în trecerea succesivă de la ipoteză la concluzie pe baza unor deducții logice. Demonstrația se face pe baza unor *definiții* și *axiome* cunoscute mai înainte.

Adică: demonstrația teoremei $p \Rightarrow q$ este un șir finit de implicații logice de forma:

$$p = p_1, p_1 \Rightarrow p_2, \dots, p_{n-1} \Rightarrow p_n = q$$

fiecare element al acestui șir fiind o implicație adevărată.

Dacă mai multe teoreme au aceeași ipoteză și concluzii diferite, atunci ele pot fi înlocuite cu o teoremă, care are ipoteza comună, iar drept concluzie, conjuncția concluziilor teoremelor.

Fie teorema

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

care exprimă faptul că predicatul $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este consecință logică a predicatului $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dacă și predicatul $\neg q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este consecință logică a predicatului $\neg p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atunci are loc teorema:

$$\neg p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \neg q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

numită *contrara* teoremei date.

Exemplu. Considerăm teorema:

" Dacă cel mai mare divizor comun a două numere întregi a, b este 1 atunci numerele nu pot fi amândouă pare "

Ea este formată din predicatele:

$p(x)$: " Dacă cel mai mare divizor comun a două numere întregi a, b este 1 "

$q(x)$: " atunci numerele nu pot fi amândouă pare "

Predicatul $\neg p(x)$ constă din enunțul:

" Dacă cel mai mare divizor comun a două numere întregi a, b este diferit de 1 "

Predicatul $\neg q(x)$ constă din enunțul:

" atunci numerele pot fi amândouă pare "

Contrara teoremei date este:

" Dacă cel mai mare divizor comun a două numere întregi a, b este diferit de 1 atunci numerele pot fi amândouă pare "

Fie teorema

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

putem forma:

-teorema *reciprocă*

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

-teorema *contrară*:

$$\neg p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \neg q(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

-teorema *contrară reciprocei*:

$$\neg q(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \neg p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Datorită tautologiei:

$$(p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow \neg p)$$

din calculul cu propoziții, teorema directă

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

este adevărată dacă și numai dacă contrara reciprocei sale

$$\neg q(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \neg p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

este adevărată. Acest lucru ne arată că pentru a demonstra

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

este totuna cu a demonstra

$$\neg q(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \neg p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Acest raționament poartă denumirea de *metoda reducerii la absurd*.

În rezumat, metoda reducerii la absurd se aplică după următoarea schemă:

a) Etapa *negării concluziei*. În această etapă, se presupune că ceea ce avem de demonstrat nu este adevărat.

b) Etapa *contrazicerii*. În această etapă, pornind de la presupunerea făcută în etapa anterioară, printr-o serie de raționamente logice, se caută să se ajungă la un rezultat care să fie contradictoriu cu un adevăr (o axiomă, o teoremă etc.).

c) Etapa *deciziei*. În aceasta, se pune întrebarea: de unde s-a ajuns la contradicția din etapa a doua? Răspunsul este firesc ținând seama de presupunerea făcută în etapa a) că ceea ce trebuia demonstrat nu este adevărat.

4.Exerciții

1.Care din enunțurile următoare sunt propoziții și ce valori de adevăr au:

- a) $(2-1)(2+1)=2^2-1$;
- b) Un număr întreg a pentru care $(a,2)=2$ este număr par;
- c) $3>6$;
- d) $m(\hat{A})=90^0 \Rightarrow \hat{A}$ este unghi drept.

2.Din propozițiile:

p : “ $4=6$ ”

și

q : “ $9<10$ ”

alcătuiți conjuncția, disjuncția, implicația și echivalența celor două propoziții.

3.Fie, predicatul

$p(x,y)$: „ $(x,y)=5$ ”

unde x,y desemnează numere naturale.

a)Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile:

$p(5,0)$, $p(1,5)$, $p(25,50)$

b)Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor:

$(\forall x)(\forall y)p(x, y)$, $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$, $(\forall y)(\forall x)p(x, y)$ și $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$

c)Să se spună dacă propoziția:

$(\forall y)(\exists x)(p(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)p(x, y))$

este adevărată sau falsă.

4.Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(\forall x)[(x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)]$, unde x desemnează un număr real oarecare.

b) $x+y=0 \Leftrightarrow [(x^2=y^2) \wedge (xy<0)]$, unde x desemnează un număr real oarecare.

5.Fie teorema:

“dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A , atunci $BC^2=AB^2+AC^2$ ”

Să se formuleze teorema reciprocă, teorema contrară, teorema contrară reciprocei.

Capitolul II. Elemente de teoria mulțimilor

1. Noțiunea de mulțime, relația de incluziune, egalitatea mulțimilor

Noțiunea de mulțime este fundamentală în matematică, *nu o definim* pentru că nu o putem subordona unei noțiuni mai generale. Vom apela în schimb la înțelegerea ei intuitivă drept *colecție* de obiecte de natură oarecare bine distincte și bine determinate, concepută ca un tot unitar. Obiectele unei mulțimi, pe care le vom numi *elementele* mulțimii, pot fi de orice natură: literele alfabetului, puncte, linii, oameni, etc.

În concluzie se poate vorbi de mulțimea punctelor din plan, mulțimea literelor alfabetului, etc.

Mulțimile sunt de obicei notate prin literele mari ale alfabetului ($A, B, C, \dots$, etc).

Relația de apartenență.

Pentru a pune în evidență faptul că x este un element al unei mulțimi A vom scrie " $x \in A$ " și vom citi : " x aparține mulțimii A ". Dacă x nu este un element al mulțimii A atunci vom scrie " $x \notin A$ " și vom citi : " x nu aparține mulțimii A ".

Notații pentru mulțimi

Mulțimea A ale cărei elemente îndeplinesc *proprietatea* $\mathcal{P}$ este notată prin:

$$A = \{x \mid x \text{ satisface } \mathcal{P}\}$$

sau

$$A = \{x: x \text{ satisface } \mathcal{P}\}$$

Exemplu.

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 6\}$$

Mulțimea A ale cărei elemente se pot numi individual, se specifică scriind între acolade elementele sale: $\{a, b, c, d, \dots\}$.

Exemplu.

$$A = \{-2, 0, 3\}$$

Sunt două lucruri importante de observat:

-unul este că mulțimea în sine este un obiect diferit de elementele ei. Mulțimea este o colecție de obiecte și obiect, conținând celelalte elemente.

-al doilea lucru de observat este că mulțimea se analizează funcție de un element particular, și este posibil să decidem dacă aparține sau nu elementelor mulțimii.

Relația de egalitate

Fie A, B mulțimi de numere reale date prin ecuațiile $x^2 - 1 = 0$ și $x^4 - 1 = 0$ respectiv. În limbajul notațiilor avem

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^4 - 1 = 0\}$$

Reiese că A și B au aceleași 2 elemente, 1 și -1 . Pentru astfel de mulțimi ca A, B scriem $A = B$. Nu contează dacă mulțimile A, B sunt definite în feluri diferite. Deoarece ele au aceleași elemente, ele sunt *egale*, asta înseamnă că ele sunt una și aceeași mulțime.

Definiție. Despre mulțimile A, B spunem că sunt *egale* (scriem $A = B$, dacă orice element din A este element și în B și orice element din B este element și în A).

Exemplu. $\{3, 4, 2\} = \{3, 2, 4\}$ căci " $\{3, 4, 2\} = \{3, 2, 4\}$ " reprezintă aceeași mulțime.

Acceptăm existența mulțimii *fără nici un element* și o numim mulțime *vidă*. Mulțimea vidă o notăm prin semnul " $\emptyset$ ".

Semnul de egalitate " $=$ " transmite între mulțimi proprietățile:

1. *Reflexivitatea:* $A = A, \quad \forall A$

2. *Simetria:* $A = B \Rightarrow B = A, \quad \forall A, B$

3. *Tranzitivitatea:* $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C, \quad \forall A, B, C$

În mod analog, scriem " $A \neq B$ " și citim " A diferită de B " dacă nu este adevărat că $A = B$, altfel, dacă există elemente în A care nu sunt în B sau există elemente în B care nu sunt în A .

Relația de incluziune.

Definiție. Fie A, B mulțimi. Dacă toate elementele mulțimii A aparțin și mulțimii B spunem că mulțimea A este *inclusă* în mulțimea B (sau că A este o *submulțime* a lui B) (scriem $A \subseteq B$) sau că B include A (scriem $B \supseteq A$).

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ atunci $A \subseteq B$.

Când vrem să punem în evidență că B mai are și alte elemente decât ale lui A , folosim semnele de incluziune strictă " $\subset$ " sau " $\supset$ " și scriem $B \supset A$ sau $A \subset B$.

În exemplul de mai sus putem folosi semnul de *incluziune strictă*.
Observăm că mulțimile A, B sunt egale când oricare element din A este în B (deci $A \subseteq B$) și oricare element din B este în A (deci $B \subseteq A$).

Rezultă următoarea metodă pentru a verifica egalitatea a două mulțimi A, B :

Arătăm că:

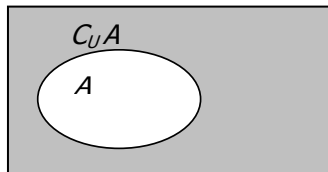
$$A \subseteq B, \text{ adică } "x \in A \Rightarrow x \in B"$$

$$B \subseteq A, \text{ adică } "x \in B \Rightarrow x \in A"$$

Semnul de incluziune " $\subseteq$ " transmite între mulțimi proprietățile:

1. *Reflexivitatea*: $A \subseteq A, \quad \forall A$
2. *Antisimetria*: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow B = A, \quad \forall A, B$
3. *Tranzitivitatea*: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C, \quad \forall A, B, C$

Un mod convenabil pentru a observa relațiile dintre mulțimi este *diagrama Venn-Euler*. Reprezentăm o mulțime de referință U printr-o mulțime de puncte dintr-un dreptunghi. Alte submulțimi ale mulțimii de referință sunt reprezentate prin mulțimea punctelor din interiorul unui cerc. Pentru o submulțime A a lui U , definim *complementara* lui A în raport cu U ca fiind mulțimea acelor elemente din U care nu sunt în A , și o notăm prin $C_U A$.



Mulțimea părților unei mulțimi

Definiție. Fie A mulțime. Mulțimea care are ca elemente toate submulțimile lui A se numește *mulțimea părților* lui A și se notează cu $\mathcal{P}(A)$.

Așadar:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

De observat este faptul că mulțimea vidă $\emptyset$ și mulțimea *totală* A sunt elemente ale lui $\mathcal{P}(A)$.

Exemplu. Dacă $A = \{a, b, c\}$ atunci:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

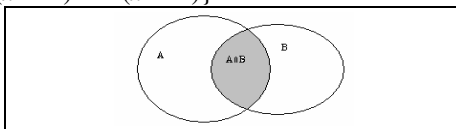
2. Operații cu mulțimi.

Definiție. Fie A, B mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ elementelor comune mulțimilor A, B se numește *intersecția* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează prin $A \cap B$.

Astfel:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler intersecția a două mulțimi este reprezentată în porțiunea hașurată:



Dacă mulțimile A, B nu au elemente comune, atunci $A \cap B = \emptyset$ și mulțimile se numesc *disjuncte*.

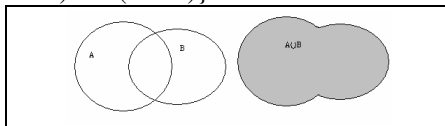
Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{1, 2, 8, 9, 12, 34\}$ atunci $A \cap B = \{1, 2\}$.

Definiție. Fie A, B mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B se numește *reuniunea* mulțimilor A, B și se notează prin $A \cup B$.

Astfel:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler reuniunea a două mulțimi este reprezentată în porțiunea hașurată:



Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ și $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 23\}$ atunci $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 23\}$

Analog se definește intersecția și reuniunea unui număr finit de mulțimi. De exemplu, dacă $A_{i \in I}$ (I este o mulțime de indici) sunt mulțimi, definim:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \wedge x \in A_j, \forall i, j \in I, i \neq j\}$$

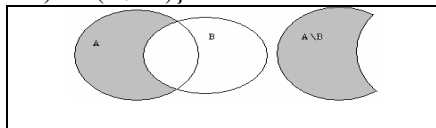
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \vee x \in A_j, \forall i, j \in I, i \neq j\}$$

Definiție. Fie A, B mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in A) \text{ și } (x \notin B)\}$ se numește *diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează $A \setminus B$.

Astfel,

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler diferența a două mulțimi este reprezentată în porțiunea hașurată:



Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}$ și $B = \{1, 2, 8, 9, 10\}$ atunci $A \setminus B = \{3, 4, 5, 11\}$.

Definiție. Fie A, B mulțimi. *Diferența simetrică* a mulțimilor A, B este mulțimea

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ și $B = \{1, 2, 8, 9, 10\}$ atunci
 $A \setminus B = \{3, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{8, 9\}$, deci $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{3, 4, 5, 8, 9\}$.

Teoremă (Legile lui De Morgan). Fie A, B submulțimi ale unei mulțimi U . Atunci:

- a) $C_U(C_U(A)) = A$,
- b) $C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B$,
- c) $C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B$.

Demonstrație.

- a) $x \in C_U(C_U(A)) \Leftrightarrow x \notin C_U A \Leftrightarrow x \in A$
- b) $x \in C_U(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in C_U A \vee x \in C_U B \Leftrightarrow x \in C_U A \cup C_U B$
- c) $x \in C_U(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in C_U A \wedge x \in C_U B \Leftrightarrow x \in C_U A \cap C_U B$

Produs cartezian

Fie A, B mulțimi și fie elementele a din A și b din B .

Prin definiție, *perechea ordonată* care are pe a ca prim element și pe b ca al doilea element este notată simbolic (a, b) .

Două perechi ordonate (x, y) și (u, v) sunt egale dacă și numai dacă $x = u$ și $y = v$. În acest sens, $(1, 2) \neq (2, 1)$, deși $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Definiție. Fie A, B mulțimi. Mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu a din A și b din B se numește *produsul cartezian* al mulțimilor A, B și se notează $A \times B$.

Avem:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Produsul cartezian al lui A cu A se mai notează cu A^2 .

Exemplu. Fie $A = \{-1, 0, 2\}$ și $B = \{0, 3\}$.

Atunci:

$$A \times B = \{(-1, 0), (-1, 3), (0, 0), (0, 3), (2, 0), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(0, -1), (0, 0), (0, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 2)\}$$

Se observă că $A \times B \neq B \times A$ egalitatea având loc numai pentru $A = B$.

Definim produsul cartezian a n mulțimi:

Fie $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ cele n mulțimi. Atunci:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Dacă $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$ atunci $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{not}}{=} A^n$.

Proprietăți ale operațiilor cu mulțimi.

Fie A, B, C mulțimi incluse într-o mulțime U . Atunci:

- 1) $A \subseteq B \Leftrightarrow C_U B \subseteq C_U A$;
- 2) $C_U U = \emptyset$;
- 3) $C_\emptyset = U$.
- 4) reuniunea este comutativă: $A \cup B = B \cup A$
- 5) reuniunea este asociativă: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- 6) dacă $A = B$ atunci $A \cup C = B \cup C$ pentru orice mulțime C .
- 7) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.
- 8) intersecția este comutativă: $A \cap B = B \cap A$
- 9) intersecția este asociativă: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 10) dacă $A = B$ atunci $A \cap C = B \cap C$
- 11) $A \cap B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.
- 12) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq C_B \Leftrightarrow B \subseteq C_A$;
- 13) intersecția este distributivă față de reuniune:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- 14) Intersecția este distributivă față de scădere.
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$
- 15) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B \Leftrightarrow B \subseteq A$
- 16) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
- 17) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$
- 18) reuniunea este distributivă în raport cu intersecția .
- 19) $A \setminus B = A \cap C_B$

Demonstrăm ca model proprietățile 1), 13), 18) și 19)

$$1) (A \subseteq B) \wedge (x \in C_U B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in C_U A$$

$$13) \text{ Arătăm mai întâi că } A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Fie $x \in A \cap (B \cup C)$, deci $x \in A$ și $x \in B \cup C$.

Dacă $x \in B$, atunci $x \in A \cap B$, deci $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Analog dacă $x \in C$.

$$\text{Astfel } A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Demonstrăm incluziunea reciprocă.

Fie $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dacă $x \in (A \cap B)$, atunci $x \in B$ și $x \in A$, deci $x \in B \cup C$. Dar $x \in A$, prin urmare $x \in A \cap (B \cup C)$.

Analog se tratează cazul $x \in A \cap C$.

$$18) (A \cup B) \cap (A \cup C) = [(A \cup B) \cap A] \cup [(A \cup B) \cap C] =$$

$$A \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] = [A \cup (A \cap C)] \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$$

$$19) \text{ Fie } x \in U, \text{ atunci: } x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \text{ și } (x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \cap C_B.$$

3.Exerciții

1.Care din următoarele propoziții sunt adevărate și care false:

- a) $\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$;
- b) $9\in\{9\}$;
- c) $\emptyset\subset\{2\}$;
- d) $\emptyset\in\{0\}$.

2.Să se determine mulțimile:

$$a) A = \left\{ x \in N \mid x = \frac{4n+6}{3n}, n \in N \right\};$$

$$b) B = \left\{ x \in N \mid x = \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+3}, n \in N \right\}.$$

3.Determinați toate submulțimile următoarelor mulțimi:

$$A=\{ \Leftrightarrow, \Rightarrow, \wedge \}, B=\{9,10\}.$$

4.Fie $A=\{1,5\}$ și $B=\{2,3,6\}$. Să se determine mulțimile

$$A \times B, A \times A, B \times A, B \times B.$$

5.Să se determine mulțimile A, B știind că:

- a) $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$;
- b) $A \cap B = \{a,b\}$;
- c) $d \notin A \setminus B$;
- d) B are mai puține elemente decât A.

Capitolul III. Relații binare

Definiție. Se numește *relație* între mulțimile E, F orice submulțime f a produsului cartezian $E \times F$.

Exemplu. Fie $E = \{2,4,6,8\}$, $F = \{3,5,7,9\}$. Produsul lor cartezian este:

$$E \times F = \{(2,3), (2,5), (2,7), (2,9), (4,3), (4,5), (4,7), (4,9), (6,3), (6,5), (6,7), (6,9), (8,3), (8,5), (8,7), (8,9)\}$$

Din mulțimea $E \times F$ alegem perechile ordonate care au proprietățile:

- 1) suma elementelor fiecărei perechi ordonate este egală cu 9;
- 2) diferența dintre a doua componentă și prima componentă a fiecărei perechi ordonate este 1.

Submulțimea f a produsului cartezian $E \times F$ este

$$f = \{(4,5)\}$$

Definiție. *Diagonala* unei mulțimi E se definește ca fiind relația

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$$

submulțime a lui $E \times E$.

Exemplu. Fie $E = \{2,4,6,8\}$. Produsul cartezian al lui E cu E este: $E \times E = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (4,2), (4,4), (4,6), (4,8), (6,2), (6,4), (6,6), (6,8), (8,2), (8,4), (8,6), (8,8)\}$

Diagonala mulțimii E este

$$\Delta = \{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$$

Definiție. Fiind dată o relație f între E, F se numește *domeniul de definiție* al lui f mulțimea:

$$\text{Dom } f = \{x \mid x \in E \text{ și } (x, y) \in f \text{ pentru cel puțin un } y \text{ din } F\}$$

iar *imaginea* lui f mulțimea:

$$\text{Im } f = \{y \mid y \in F \text{ și } (x, y) \in f \text{ pentru cel puțin un } x \text{ din } E\}.$$

Relația *inversă* lui f se definește ca fiind următoarea submulțime a lui $F \times E$:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}.$$

Exemplu. Fie $E = \{2,4,6,8\}$, $F = \{3,5,7,9\}$. Produsul lor cartezian este: $E \times F = \{(2,3), (2,5), (2,7), (2,9), (4,3), (4,5), (4,7), (4,9), (6,3), (6,5), (6,7), (6,9), (8,3), (8,5), (8,7), (8,9)\}$

Din mulțimea $E \times F$ alegem perechile ordonate care au proprietatea:

"suma elementelor perechilor ordonate este egală cu 9".

Avem :

$$f = \{ (2,7), (4,5), (6,3) \} \Leftrightarrow f = \{ (x, y) \in X \times Y \mid x + y = 9 \}$$

Pentru acest exemplu

$$\text{Dom } f = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{Im } f = \{7, 5, 3\}$$

$$f^{-1} = \{(7,2), (5,4), (3,6)\}$$

În cele ce urmează, pentru a marca faptul că $(x, y) \in f$, vom utiliza notația:

$$x f y.$$

Definiție. O relație de *echivalență* pe o mulțime nevidă E este orice semn " $\approx$ " între E și E care verifică următoarele trei proprietăți:

- 1) *Reflexivitatea*: $x \approx x, \forall x \in E$;
- 2) *Simetria*: $x \approx y \Rightarrow y \approx x, \forall x, y \in E$;
- 3) *Tranzitivitatea*: $(x \approx y \text{ și } y \approx z) \Rightarrow x \approx z, \forall x, y, z \in E$.

Exemplu.

- 1) Relația de egalitate definită pe mulțimi;
- 2) Relația de congruență și de asemănare definită pe mulțimea triunghiurilor.

Clase de echivalență.

Fie E o mulțime nevidă pe care s-a definit o relație de echivalență notată " $\approx$ ". Fiecărui element x din E îi putem asocia clasa sa de echivalență notată:

$$\hat{x} = \{y \mid y \approx x\}.$$

Definiție. Mulțimea $\frac{E}{\approx} = \{\hat{x} \mid x \in E\}$ tuturor claselor de echivalență

în raport cu relația " $\approx$ " se numește mulțimea *cât* (sau *factor*) a lui E prin relația " $\approx$ ".

Teoremă. Două clase de echivalență sau coincid sau sunt disjuncte.

Demonstrație. Dacă $x \approx y$ și $z \in \hat{x}$ (adică $z \approx x$) atunci $z \approx y$ (din tranzitivitatea relației $\approx$). Din $z \approx y$ avem $z \in \hat{y}$, adică $\hat{x} \subset \hat{y}$. Analog rezultă incluziunea inversă de unde $\hat{x} = \hat{y}$. Să presupunem acum că x nu este în relație cu y și că $\hat{x} \cap \hat{y} \neq \emptyset$.

Atunci $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$ implică $(x \approx z \text{ și } z \approx y)$ adică $x \approx y$ ceea ce este în contradicție cu presupunerea.

Definiție. O relație de ordine pe o mulțime E este o relație " $\leq$ " între E și E care verifică proprietățile:

- 1) Reflexivitatea: $x \leq x, \forall x \in E$;
- 2) Antisimetrie: $(x \leq y \text{ și } y \leq x) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in E$;
- 3) Tranzitivitate: $(x \leq y \text{ și } y \leq z) \Rightarrow x \leq z \forall x, y, z \in E$.

Exemplu.

- 1) Relația de incluziune definită între mulțimi;

Definiție. Numim mulțime ordonată orice pereche $(E, \leq)$ formată dintr-o mulțime nevidă E și o relație de ordine " $\leq$ " pe E . Notăm E în loc de $(E, \leq)$, în cazul în care nu există pericol de confuzie privind " $\leq$ ".

Exemplu.

- 1) $(\mathbf{N}, \leq)$ este o mulțime ordonată.

Definiție. O relație de ordine " $\leq$ " pe o mulțime nevidă E este o relație de ordine totală dacă pentru orice x, y din E avem sau $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Exemplu.

relația " $\leq$ " definită pe $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ este o relație de ordine totală.

Definiție. O mulțime ordonată $(E, \leq)$ se numește mulțime total ordonată dacă relația de ordine " $\leq$ " este totală.

Exemplu.

- 1) $(\mathbf{N}, \leq), (\mathbf{Z}, \leq)$ sunt mulțimi total ordonate.

Definiție. O relație de ordine f a produsului cartezian $E \times E$ este numită de ordine parțială, dacă există cel puțin un element x din E și un element y din E , pentru care nu avem adevărată nici una din relațiile $x f y$ sau $y f x$.

Exemplu.

- 1) În mulțimea părților unei mulțimi relația de incluziune nu este o relație de ordine totală.

Definiție. O relație f între elementele unei mulțimi este de ordine strictă dacă nu este reflexivă, nu este simetrică dar este tranzitivă.

Exemplu.

- 1) Într-o mulțime de oameni, relația f "... este urmaș al lui ..." este o relație de ordine strictă.

Nu putem avea " a este urmaș al lui a " deci relația nu este reflexivă.

Dacă avem " a este urmaș al lui b ", nu mai putem avea " b este urmaș al lui a ". Aceasta spune că relația nu este simetrică.

Dacă " a este urmaș al lui b " și " b este urmaș al lui c ", atunci spunem că " a este urmaș al lui c ". Relația este deci tranzitivă.

Exerciții

1. Demonstrați că o relație simetrică și tranzitivă pentru care orice element satisface cele două relații, este și reflexivă.

2. Pe mulțimea dreptelor din plan definim relațiile:

a) Relația f asociază oricare două drepte paralele sau identice;

b) Relația g asociază oricare două drepte perpendiculare.

Care sunt proprietățile și felurile relațiilor de mai sus?

3. Pe mulțimea punctelor unei drepte d din plan definim relațiile:

a) Relația f asociază oricare două puncte cu condiția că primul este la dreapta celui de-al doilea;

b) Relația g asociază două puncte astfel încât primul este identic sau la stânga celui de-al doilea;

Care sunt proprietățile și felurile relațiilor de mai sus?

4. În cercul $C(O, r)$ două coarde oarecare sunt în relația f dacă sunt egal depărtate de centrul cercului. Demonstrați că această relație este de echivalență.

5. În mulțimea studenților din România considerăm relațiile :

a) Relația f asociază oricare două persoane cu aceleași medii;

b) Relația g asociază oricare două persoane cu aceeași vârstă;

c) Relația h asociază oricare două persoane care locuiesc în mediul urban.

Care sunt proprietățile și felurile relațiilor de mai sus?

Capitolul IV. Funcții

1. Noțiunea de funcție.

Definiție. Fie X, Y mulțimi nevide. Se numește *funcție definită pe X cu valori în Y* orice relație f între X, Y care verifică următoarele condiții:

$F_1)$ $Dom f = X$, adică pentru orice $x \in X$ există $y \in Y$ astfel încât $(x, y) \in f$;

$F_2)$ Relația f este *univocă*, adică dacă $(x, y_1) \in f$ și $(x, y_2) \in f$ atunci $y_1 = y_2$.

În acord cu $F_2)$, pentru fiecare $x \in X$ notăm cu $f(x)$ *unicul element $y \in Y$ astfel încât $(x, y) \in f$* . Simbolul $f(x)$ se numește *valoarea lui f în punctul x , sau imaginea lui x prin f* .

O funcție se notează indicând cele două mulțimi și legea de corespondență astfel:

$$f: X \rightarrow Y, f = f(x); f: X \rightarrow Y; f: x \rightarrow f(x); y = f(x), x \in X; y = f(x); f;$$

Exemple.

1) Fie X mulțimea tuturor orașelor din România, iar B mulțimea tuturor județelor din România.

Definim funcția $f: X \rightarrow Y$ prin: *oricărui oraș i se asociază județul său*. Pentru această funcție avem, spre exemplu, $f(Tg-Jiu) = Gorj$, $f(Craiova) = Dolj$, etc.

2) Fie $\mathcal{P}(X)$ mulțimea tuturor *părților* lui X . Definim $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ prin $f(A, B) = A \cup B$.

Fie $A \subset X$ și B acea parte a lui Y care corespunde prin f lui A .

Spunem că B este *imaginea directă* a lui A prin f și scriem $f(A) = B$.

Dacă imaginea lui X prin f constă dintr-un singur element al lui Y , spunem că funcția f este *constantă*.

Astfel, conceptul de *funcție* trebuie înțeles ca un *triplet* format din *domeniul de definiție, mulțimea în care se iau valori și relația dintre ele*.

Funcțiile $f_1: E_1 \rightarrow F_1$, $f_2: E_2 \rightarrow F_2$ sunt *egale* dacă:

1) $E_1 = E_2$,

2) $F_1 = F_2$,

3) $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice $x \in E_1$.

Definiție. Fie U mulțime și A submulțime a sa. Definim $1_A: U \rightarrow \{0,1\}$ prin:

$$1_A = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \notin A \\ 1, & \text{pentru } x \in A \end{cases}$$

și o numim *funcția caracteristică* a lui A .

Exemplu. Dacă $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ atunci lui $A = \{2,4,5,7,8\}$ îi corespunde secvența

0	1	0	1	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

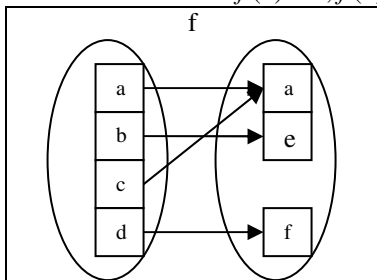
2. Moduri de a defini o funcție.

Există două moduri de a defini o funcție:

a) *Funcții definite sintetic.* În multe cazuri funcția $f: X \rightarrow Y$ poate fi definită numind pentru fiecare element în parte din X elementul ce i se asociază din mulțimea Y .

Exemplu. Fie $X = \{a, b, c, d\}$ și $Y = \{a, e, f\}$. Definim $f: X \rightarrow Y$ prin:

$$f(a) = a; f(b) = e; f(c) = a; f(d) = f$$



În fig 1 săgețile indică legea de definire a funcției f de la mulțimea X la mulțimea Y .

x	a	b	c	d
$f(x)$	a	e	a	f

În tabelul alăturat în prima linie sunt trecute elementele mulțimii pe care este definită funcția, iar în linia a doua elementele din mulțimea unde funcția ia valori.

b) *Funcții definite analitic.* O funcție $f: X \rightarrow Y$ poate fi definită specificând o *proprietate* (relație) ce leagă un element arbitrar $x \in X$ de elementul $f(x)$ din Y .

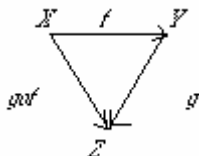
Exemplu. Dacă $E(x) = x^3$ atunci putem defini funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$.

3. Compunerea funcțiilor.

Fie X, Y, Z mulțimi nevide și $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ funcții. Din definiția funcției f deducem că pentru orice element $x \in X$ există un unic element notat $f(x)$ din Y . Cum $f(x) \in Y$ din definiția funcției g deducem că există un unic element notat $g(f(x))$ din Z . Prin urmare *perechii* de funcții (f, g) îi corespunde o nouă funcție notată $g \circ f$ și numită *funcția compusă a lui f prin g* care aplică pe X în Z .

Definiție. Funcția $g \circ f: X \rightarrow Z$ se definește prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

Schematic funcția $g \circ f$ poate fi reprezentată cu ajutorul diagramei:



Exemplu. Dacă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sunt definite prin $f(x) = x + 5$ și $g(x) = 3 - x$ atunci $g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ se definește prin $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 - (x + 5) = -2 - x$.

Observație 1. Dacă notăm cu y argumentul funcției g , iar funcția însăși cu $g(y)$, atunci funcția compusă se obține substituind argumentul y prin $f(x)$, deci $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

Observație 2. Dacă $g \circ f$ are sens nu rezultă că și $f \circ g$ are sens. Dacă $g \circ f, f \circ g$ au sens, atunci, în general $f \circ g \neq g \circ f$;

Teoremă. Compunerea funcțiilor este asociativă, adică pentru orice funcții $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ și $h: Z \rightarrow V$ avem $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

4. Graficul unei funcții

Definiție. Dacă $f: X \rightarrow Y$, atunci mulțimea $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\} \subseteq X \times Y$ se numește *graficul lui f* .

Exemplu. Dacă $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{1, 2, 4\}$ și $f: X \rightarrow Y$ prin $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 2, f(d) = 4$ atunci

$$G_f = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$$

4.1. Funcții numerice și reprezentarea grafică a lor

Definiție. $f: X \rightarrow Y$ se numește funcție *numerică*, dacă X, Y sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale.

Exemplu. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 10$

Fie $f: X \rightarrow Y$ funcție numerică și G_f graficul său. Fie xOy un sistem de axe perpendiculare din plan. Dacă (x, y) este un element din G_f , atunci îi asociem punctul $P(x, y)$ din plan (x abscisa, iar y ordonata punctului P). Mulțimea tuturor punctelor din plan de coordonate x și y unde (x, y) este un element oarecare din G_f se numește reprezentarea geometrică a graficului funcției f . Fără a face vreo confuzie în loc de reprezentarea geometrică a unei funcții spunem *graficul* funcției f .

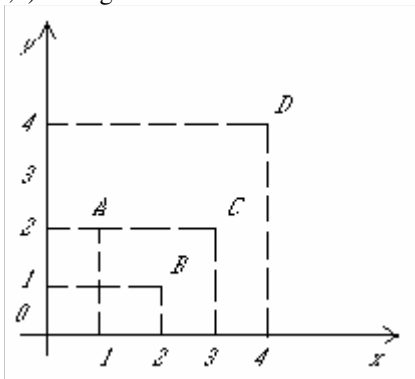
Exemplu. Dacă $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 4\}$ și $f: X \rightarrow Y$ prin

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 4$$

atunci

$$G_f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$$

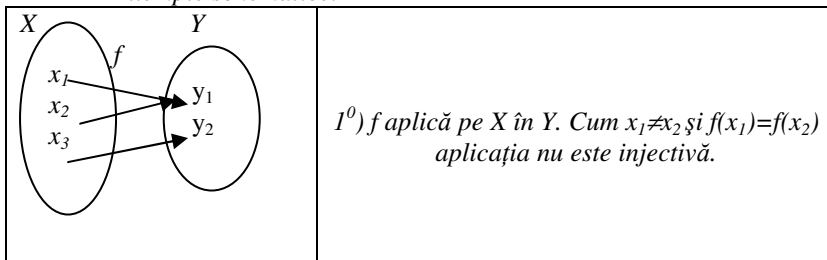
Reprezentarea geometrică a mulțimii G_f este mulțimea punctelor $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$, $D(4, 4)$ din figura:

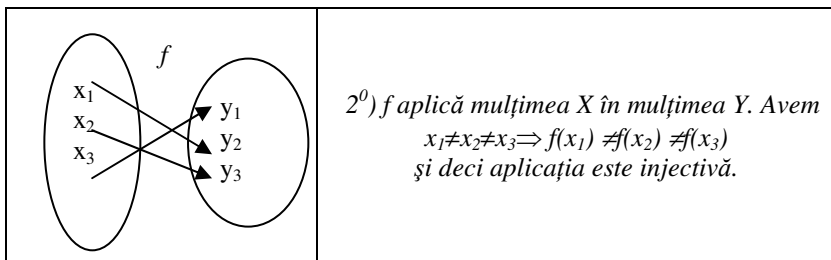


5. Funcții injective, surjective, bijective. Inversa unei funcții.

Definiție. Spunem că o funcție $f: X \rightarrow Y$ este *injectivă* dacă pentru orice două elemente $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

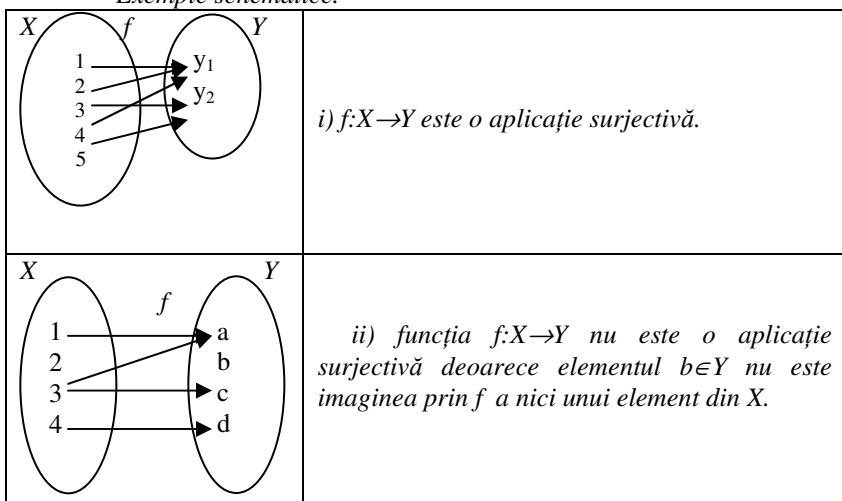
Exemple schematice.





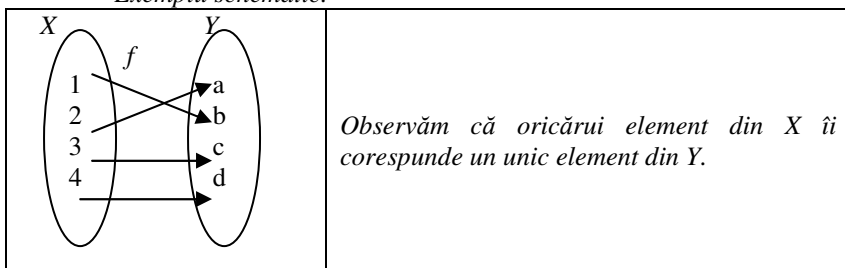
Definiție. Spunem că $f: X \rightarrow Y$ este o funcție *surjectivă* dacă pentru orice element $y \in Y$ există cel puțin un element $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

Exemple schematice.



Definiție. O funcție $f: X \rightarrow Y$ simultan injectivă și surjectivă se numește funcție *bijectivă*.

Exemplu schematic.



Pentru funcțiile $f: X \rightarrow X$, $f(x)=x$ vom folosi notațiile I_X sau id_X și citim funcția *identică* a mulțimii X .

Inversa unei funcții

Definiție. Spunem că $f: X \rightarrow Y$ este o funcție *inversabilă* dacă există o funcție $g: Y \rightarrow X$ astfel încât $g \circ f = I_X$ și $f \circ g = I_Y$.

Exemplu. Dacă $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ și $f: X \rightarrow Y$ definită prin $f(1)=b, f(2)=a, f(3)=c, f(4)=d$ atunci există funcția inversă $f^{-1}: Y \rightarrow X$ definită prin $f^{-1}(b)=1, f^{-1}(a)=2, f^{-1}(c)=3, f^{-1}(d)=4$.

Dacă există g' cu proprietățile din enunț atunci $g = I_X \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ I_Y = g'$ deci, inversa unei funcții dacă există este unică. Vom nota inversa funcției f cu f^{-1} , ca în exemplul dat.

Definiție. Mulțimea tuturor elementelor din X a căror imagine prin f este Y , spunem că formează imaginea *reciprocă* prin f a lui Y și se notează cu $f^{-1}(Y)$.

Din $f(X) = Y$ urmează $f^{-1}(Y) \supseteq X$.

Observație. Graficele funcțiilor f, f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare a axelor.

Într-adevăr, fie $y_0 = f(x_0)$, deci $x_0 = f^{-1}(y_0)$, punctul $B(x_0, y_0) \in G_f$, iar punctul $A(y_0, x_0) \in G_{f^{-1}}$; deci punctele $B(x_0, y_0)$ și $A(y_0, x_0)$ sunt simetrice față de prima bisectoare, deoarece prima bisectoare este chiar bisectoarea unghiului xOy .

6. Funcții monotone, funcții pare, funcții impare.

Definiție. Fie X, Y submulțimi ordonate ale lui R . Spunem că $f: X \rightarrow Y$ este *crescătoare* (respectiv *descrescătoare*) dacă $x \leq y$ în X implică $f(x) \leq f(y)$ (respectiv $f(x) \geq f(y)$) în Y .

Înlocuind peste tot " $\leq$ " cu " $<$ " (și respectiv " $\geq$ " cu " $>$ ") obținem noțiunile de funcție *strict crescătoare* (respectiv funcție *strict descrescătoare*). Funcțiile crescătoare și funcțiile descrescătoare alcătuiesc la un loc clasa funcțiilor *monotone*. Clasa funcțiilor *strict monotone* se definește similar.

Exemplu. Funcția $f: R_+ \rightarrow R_+$, $f(x) = x+1$ este o funcție *strict crescătoare*.

Observație. Fie $f: X \rightarrow R$ și $M, N \subset X$ submulțimi nevide. Dacă f este *strict crescătoare* pe M și N atunci f nu rezultă că este *strict crescătoare* și pe $M \cup N$.

Într-adevăr, funcția $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in R \setminus \{0\}$ este un exemplu suficient.

Pe $M = (-\infty, 0)$, $N = (0, +\infty)$ funcția este *strict crescătoare*, dar pe $M \cup N = R \setminus \{0\}$

nu este strict crescătoare cum ar fi de exemplu pentru $-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1)$.

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o submulțime reală simetrică față de originea axelor și $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție. Funcția f se numește funcție *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Exemplu. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ este o funcție pară.

Graficul său este simetric față de axa Oy, adică $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ aparținând graficului, simetricul său $(-a, b)$ față de axa Oy aparține graficului.

Definiție. Funcția f se numește *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Exemplu. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este o funcție impară;

Graficul unei funcții impare este simetric față de originea axelor, adică $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ aparținând graficului, simetricul său față de origine $(-a, -b)$ aparține graficului. O funcție care nu îndeplinește condițiile de mai sus se numește funcție *fără paritate*.

7. Exerciții

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{dacă } x < 1 \\ -7, & \text{dacă } 1 \leq x < 5 \\ -2x + 3, & \text{dacă } x \geq 5 \end{cases}$$

a) Să se calculeze $f(-3), f(-1), f(3), f(5), f(6)$;

b) Să se traseze graficul funcției f .

2. Folosindu-se diagrama asociată unei funcții să se determine numărul funcțiilor injective de la mulțimea $A = \{a, b\}$ în mulțimea $B = \{c, d, e\}$. Există funcții surjective de la A la B ?

3. Considerăm funcțiile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq -1 \\ x - 1, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$$

Determinați $g \circ f, f \circ g$.

4. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0 \\ \text{ultima cifră a lui } 3^n, & \text{dacă } n \geq 1 \end{cases}$$

a) Să se arate că $f(n+4) = f(n)$;

b) Să se schițeze graficul funcției f .

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

a) Să se arate că f este bijectivă;

b) Să se traseze graficele lui f și f^{-1} .

Capitolul V. Structuri algebrice

1. Lege de compoziție internă

Definiție. Fiind dată o mulțime nevidă M , se numește *operație algebrică internă* sau *lege de compoziție internă*, definită pe M , orice funcție

$$\varphi: M \times M \rightarrow M; (a, b) \rightarrow \varphi(a, b) \in M.$$

Exemplu. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a tuturor părților lui M definim:

$$\varphi: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow \varphi(A, B) = A \cup B.$$

Observație. Dacă $\varphi: M \times M \rightarrow M$ este o operație algebrică pe mulțimea M , în loc de φ se mai folosesc notațiile:

$$-, +, \Delta, \square, \diamond, \bullet, \Theta, \otimes, \odot, \vee, \wedge \text{ etc.}$$

Definiție. Fie M o mulțime pe care este dată o lege de compoziție φ . O submulțime H a lui M cu proprietatea:

$$\forall a, b \in H \Rightarrow \varphi(a, b) \in H$$

se numește *parte stabilă* a lui M în raport cu H .

Exemplu. Fie A mulțime și $F(A) = \{f: A \rightarrow A\}$. Definim operația algebrică:

$$\varphi: F(A) \times F(A) \rightarrow F(A), (f, g) \rightarrow \varphi(f, g) = f \circ g.$$

Notăm prin H mulțimea tuturor funcțiilor bijective din $F(A)$. Este evident că H este *parte stabilă* a lui $F(A)$.

Observație. Dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție $\varphi: M \times M \rightarrow M$, atunci pe H putem defini legea de compoziție:

$$\varphi': H \times H \rightarrow H, \varphi'(a, b) = \varphi(a, b) \in H, \quad \forall a, b \in H.$$

și spunem că φ' este legea de compoziție indusă pe H de către φ sau că operația din G induce o operație pe H .

2. Proprietățile operației interne

Asociativitatea.

Definiție. Fie $M \neq \emptyset$ mulțime și $\varphi: M \times M \rightarrow M$ o operație algebrică pe mulțimea M . Spunem că φ este o operație algebrică *asociativă*, dacă:

$$\forall a, b, c \in M \Rightarrow \varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c).$$

Exemplu. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a tuturor părților lui M definim

$$\varphi: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow \varphi(A, B) = A \cup B.$$

Demonstrăm că φ este asociativă. Avem:

$$\varphi(A, \varphi(B, C)) = \varphi(A, B \cup C) = A \cup (B \cup C) \quad (1)$$

$$\varphi(\varphi(A, B), C) = \varphi(A \cup B, C) = (A \cup B) \cup C \quad (2)$$

folosind (1) și (2) avem că $\varphi(A, \varphi(B, C)) = \varphi(\varphi(A, B), C)$ din asociativitatea reuniunii. În concluzie operația algebrică definită mai sus pe mulțimea părților unei mulțimi este asociativă.

Comutativitatea.

Definiție. Fie $M \neq \emptyset$ o mulțime și $\varphi: M \times M \rightarrow M$ o operație algebrică pe mulțimea M . Spunem că φ este o operație algebrică *comutativă*, dacă:

$$\forall a, b \in M \Rightarrow \varphi(a, b) = \varphi(b, a).$$

Exemplu. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a tuturor părților lui M definim:

$$\varphi: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow \varphi(A, B) = A \cup B.$$

Demonstrăm că φ este comutativă.

Avem:

$$\varphi(A, B) = A \cup B \quad (3)$$

$$\varphi(B, A) = B \cup A \quad (4)$$

iar din (3) și (4) avem că $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$, adică φ este comutativă.

În cazul în care φ nu este comutativă, se spune că φ este o operație algebrică *necomutativă*.

Element neutru.

Definiție. Fie $M \neq \emptyset$ o mulțime și $\varphi: M \times M \rightarrow M$ o operație algebrică pe mulțimea M . Spunem că $e \in M$ este *element neutru* pentru operația φ , dacă:

$$\forall a \in M \Rightarrow \varphi(a, e) = \varphi(e, a) = a$$

Dacă considerăm o operație algebrică oarecare, notată prin:

$$\Delta: M \times M \rightarrow M, (a, b) \rightarrow a \Delta b$$

atunci condiția de mai înainte a elementului neutru se scrie:

$$a \Delta e = e \Delta a = a, \forall a \in M.$$

Exemplu. Fie A mulțime și $F(A) = \{f: A \rightarrow A\}$. Definim operația algebrică:

$$\varphi: F(A) \times F(A) \rightarrow F(A), (f, g) \rightarrow \varphi(f, g) = f \circ g.$$

Aplicația identică I_A a mulțimii A este elementul neutru al operației de compunere a funcțiilor din $F(A)$.

***Teoremă.* Elementul neutru, dacă există, este unic determinat.**

Demonstrație.

Presupunem că e și e^1 sunt elemente neutre pentru operația algebrică " Δ ". Avem:

$$e = e \Delta e^1 = e^1$$

Elemente simetrizabile.

Definiție. Fie $M \neq \emptyset$ o mulțime și $\varphi: M \times M \rightarrow M$ o operație algebrică pe mulțimea M cu element neutru e . Dacă $a \in M$ este un element al lui M , se spune că a este *simetrizabil* față de operația dată, dacă:

$$\exists b \in M, \text{ astfel încât } \varphi(a, b) = \varphi(b, a) = e \quad \forall a, b \in M.$$

Exemplu. Orice număr rațional este simetrizabil în raport cu adunarea numerelor raționale. Simetricul lui $\frac{a}{b}$ fiind $-\frac{a}{b}$.

Teoremă. Dacă $M \neq \emptyset$ este o mulțime, iar $\Delta: M \times M \rightarrow M$, $(a, b) \rightarrow a \Delta b$, este o operație algebrică pe M , care admite element neutru e , atunci e este simetrizabil, simetricul său fiind e .

Demonstrație.

Avem $e \Delta e = e$.

Teoremă. Fie $M \neq \emptyset$ o mulțime înzestrată cu o operație algebrică asociativă $\Delta: M \times M \rightarrow M$, $(a, b) \rightarrow a \Delta b$, și cu element neutru e . Dacă $a \in M$ este simetrizabil, atunci simetricul său este unic.

Demonstrație.

Fie $a \in M$ iar $b, c \in M$, simetrici ai lui a , adică $a \Delta b = b \Delta a = e$ și $a \Delta c = c \Delta a = e$ atunci $c \Delta (a \Delta b) = c \Delta e = c$ iar $(c \Delta a) \Delta b = e \Delta b = b$. Operația fiind asociativă, avem $c \Delta (a \Delta b) = (c \Delta a) \Delta b$ de unde $c = b$.

Observație. Dacă operația algebrică Δ nu este asociativă atunci simetricul nu este unic.

Demonstrație.

Fie $M = \{e, a, b, c\}$ și $\Delta: M \times M \rightarrow M$, $(a, b) \rightarrow a \Delta b$ definită prin:

$e \Delta x = x \Delta e = x$, pentru orice $x \in M$

$a \Delta a = a \Delta b = b \Delta a = e$

$c \Delta a = a$

$c \Delta b = b \Delta c = b$

$c \Delta c = a \Delta c = b \Delta b = c$

Această operație nu este asociativă, de exemplu $(a \Delta b) \Delta c = c \neq e = a \Delta (b \Delta c)$.

Elementul a are ca simetrice pe a și pe b .

O mulțime nevidă M înzestrată cu o operație algebrică Δ o notăm, uneori prin perechea (M, Δ) , punând în evidență mulțimea și operația algebrică.

3. Tabla unei legi de compoziție.

Fie M o mulțime finită, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. În acest caz o lege de compoziție $\varphi: M \times M \rightarrow M$, se poate reprezenta prin ceea ce este cunoscut de tabla operației φ , care constă dintr-un tabel cu n linii și n coloane afectate

celor n elemente ale lui M . Tabla legii de compoziție φ conține la intersecția liniei lui a_i cu coloana a_j elementul $\varphi(a_i, a_j)$ și este reprezentată prin:

φ	a_1	a_2		a_j	a_n
a_1	$\varphi(a_i, a_j)$				
a_2					
$\dots$					
a_i					
a_n					

Din tabla unei legi de compoziție dată pe o mulțime finită M se pot verifica operațiile algebrice definite mai sus.

Spre exemplu:

-comutativitatea unei legi de compoziție, pentru ca operația φ să fie comutativă trebuie ca elementul $\varphi(a_i, a_j)$ de la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j să fie egal cu elementul $\varphi(a_j, a_i)$ de la intersecția liniei lui a_j cu coloana lui a_i .

Cu un raționament analog se verifică celelalte operații.

Exercițiu. Fie C mulțimea numerelor complexe și $H = \{1, -1, i, -i\}$ submulțime a lui C . Pe H definim “ $\bullet$ ” (înmulțirea) prin:

$$\bullet: H \times H \rightarrow H; (a, b) \rightarrow a \bullet b, \quad \forall a, b \in H.$$

Folosind tabla legii de compoziție verificați că operația algebrică definită pe $H \times H$ este comutativă, admite element neutru și element simetrizabil precum și faptul că H este parte stabilă pe C .

4. Structura de monoid.

Definiție. O mulțime nevidă M se numește *monoid* în raport cu o lege de compoziție:

$$\varphi: M \times M \rightarrow M; (a, b) \rightarrow \varphi(a, b)$$

dacă sunt îndeplinite simultan relațiile:

$$M_1) \varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c),$$

$$M_2) \exists e \in M \text{ astfel încât } \varphi(a, e) = \varphi(e, a) = a, \quad \forall a, b, c \in M.$$

Dacă în plus este îndeplinită și condiția

$$M_3) \varphi(a, b) = \varphi(b, a), \quad \forall a, b \in M$$

spunem că monoidul M este *comutativ*.

Exemplu. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a tuturor părților lui M definim:

$$\varphi: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow \varphi(A, B) = A \cup B.$$

Atunci $(\mathcal{P}(M), \cup)$ este monoid comutativ.

Reguli de calcul într-un monoid

Presupunem în continuare că M este monoid cu element neutru e și că operația algebrică de pe M este dată în notație multiplicativă (" $\cdot$ ").

Definim produsul unui număr finit de elemente $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) astfel:

$$a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n \Leftrightarrow a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 a_2 \dots a_k) (a_{k+1} \dots a_n) \quad (1)$$

Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, în loc de $a_1 a_2 \dots a_n$ scriem a^n și definim inductiv puterile lui a astfel:

$$a^0 = e; a^1 = a; a^2 = a \cdot a; a^3 = a^2 \cdot a, \dots, a^n = a^{n-1} \cdot a, \dots$$

Teoremă. Oricare ar fi numerele naturale m și n avem:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Dacă legea de compoziție a monoidului M este adunarea (+), definim multiplii n ai lui a , cu $n \in \mathbb{N}$, astfel:

$$na = \begin{cases} (n-1)a + a & \text{daca } n > 0 \\ 0 & \text{daca } n = 0 \end{cases}$$

Rezultatul din teoremă se scrie aditiv astfel:

$$ma + na = (m+n)a, n(ma) = (nm)a \text{ oricare ar fi } m, n \in \mathbb{N}.$$

5. Structura de grup

Definiție. Se numește *grup* o mulțime nevidă G , înzestrată cu o operație algebrică:

$$\varphi: M \times M \rightarrow M; (a, b) \rightarrow \varphi(a, b)$$

care satisface următoarele condiții:

$$G_1) \varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c),$$

$$G_2) \exists e \in M \text{ astfel încât } \varphi(a, e) = \varphi(e, a) = a, \forall a \in M,$$

$G_3)$ orice element din G este simetrizabil, adică:

$$\forall a \in G, \exists a' \in G \text{ astfel încât } \varphi(a, a') = \varphi(a', a) = e.$$

Dacă în plus operația algebrică φ este comutativă, se spune că grupul este *comutativ* sau *abelian*.

Exemplu. Fie G mulțimea rădăcinilor ecuației $x^3 = 1$. Definim " $\bullet$ " (înmulțirea-notația multiplicativă) prin:

$$\bullet: G \times G \rightarrow G; (a, b) \rightarrow a \bullet b, \forall a, b \in G$$

atunci $(G, \bullet)$ este *grup abelian*.

Subgrup.

Definiție. Spunem că o submulțime nevidă H a grupului G este un *subgrup* al lui G , dacă operația algebrică din G induce pe H o operație algebrică față de care H este grup.

Exemplu. Fie $n \geq 0$ număr întreg și $nZ = \{nh \mid h \in Z\}$ mulțimea multiplilor lui n . În aceste ipoteze nZ este subgrup al grupului $(Z, +)$.

Teoremă. Fie $(G, \cdot)$ grup cu element neutru e și H o submulțime nevidă a sa. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) H este subgrup al lui G ,

2)

1⁰) $\forall a, b \in H$ produsul ab , efectuat conform operației din G , este un element din H ,

2⁰) $e \in H$,

3⁰) $\forall a \in H$, inversul său a^{-1} în G , aparține lui H ,

3) $\forall a, b \in H$, $a b^{-1}$ (sau $a^{-1}b$) efectuat în G , aparține lui H .

Demonstrație. Exercițiu

Observație.

Dacă G este un grup, atunci G însuși este un subgrup al lui G , numit *subgrupul total* al lui G . De asemenea submulțimea $\{e\}$ a lui G este subgrup, numit *subgrupul nul* al lui G . Subgrupul total și subgrupul nul al lui G se numesc *subgrupuri improprii* ale lui G . Orice subgrup diferit de acestea se numește *subgrup propriu*.

Reguli de calcul într-un grup.

Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 0$) sunt elemente ale unui grup G (în notație multiplicativă) cu element neutru e , atunci

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$$

Într-adevăr, ținând cont de asociativitatea operației multiplicative avem:

$$(a_1 a_2 \dots a_n)(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1})(a_1 a_2 \dots a_n) = e.$$

În particular $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ iar dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, atunci pentru orice $n \geq 0$ are loc

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n \quad (1)$$

Într-adevăr, $(a^n)^{-1} = ((a^{-1})^{-n})^{-1} = ((a^{-1})^{-1})^{-n} = (a)^{-n} = (a^{-1})^n$.

Observație. Relația (1) se extinde și pentru $n < 0$.

Ca și la monoizi și la grupuri, pentru orice numere naturale m și n avem:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

mai mult într-un grup sunt adevărate regulile de simplificare:

1⁰) Dacă $(a, b, c \in G$ și $ab=ac$) atunci $b=c$;

2⁰) Dacă $(a, b, c \in G$ și $ba=ca$) atunci $b=c$

6. Structura de inel

Definiție. Se numește *inel* o mulțime nevidă I , înzestrată cu două legi de compoziție notate de obicei "+" și "·", astfel încât:

- a) $(I, +)$ are o structură de grup.
- b) operația "." este asociativă.
- c) operația "." este distributivă în raport cu legea "+".

Pentru a evidenția faptul că pe mulțimea I s-au considerat două operații vom nota $(I, +, \cdot)$.

Exemplu. Fie $Z[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Dacă definim:

$$+ : Z[i] \times Z[i] \rightarrow Z[i] \text{ prin } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \in Z[i]$$

și

$$\cdot : Z[i] \times Z[i] \rightarrow Z[i] \text{ prin } (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \in Z[i]$$

atunci $(Z[i], +, \cdot)$ este inel.

Observație. Dacă mulțimea I este formată dintr-un singur element a atunci putem defini o singură structură de inel punând $a+a=a \cdot a=a$. În acest caz $a=1=0$ iar I se numește *inel nul*. Un inel care conține cel puțin două elemente se numește *inel nenul*;

Observație. Dacă legea de compoziție "." a inelului I are proprietatea de comutativitate atunci inelul I se numește *comutativ*;

Observație. Inelul I se numește *unitar* sau inel cu *element unitate* dacă operația de "." are element unitate.

***Teoremă.* Fie $(I, +, \cdot)$ un inel. Dacă 0 este element unitate pentru operația "+" din I , atunci $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, pentru orice $a \in I$.**

Demonstrație.

Avem $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ și deci adunând la ambii membri ai acestei relații pe $-(0 \cdot a)$, obținem $0 \cdot a = 0$. Pentru cealaltă egalitate scriem $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ și deci adunând în ambii membri pe $-a \cdot 0$ se obține $a \cdot 0 = 0$.

Dacă $(I, +, \cdot)$ este un inel unitar, atunci elementele lui I simetrizabile în raport cu operația "." se numesc *elemente inversabile* sau *unități* ale inelului I . Inversul sau simetricul lui a în raport cu legea "." se notează cu a^{-1} iar în raport cu legea "+" se notează cu $-a$. Mulțimea unităților lui I se notează cu $U(I)$. Elementul unitate 1 al inelului I este unul din unitățile inelului I și are rol de element neutru în grupul $(U(I), \cdot)$.

Definiție. Elementul $a \in I$, se numește *divizor* la stânga (la dreapta) al lui zero dacă există $b \in I$, $b \neq 0$, astfel încât $a \cdot b = 0$ ($b \cdot a = 0$).

Dacă inelul este comutativ, atunci $b \cdot a = a \cdot b = 0$ și deci noțiunile de divizor la stânga și divizor la dreapta al lui zero coincid.

Definiție. Un inel $(I, +, \cdot)$ nenul, comutativ, unitar și fără divizori ai lui zero diferiți de zero se numește *domeniu de integritate* sau inel *integru*.

Subinele

Definiție. Fie $(I, +, \cdot)$ un inel și S o submulțime nevidă a sa. S se numește *subinel* al lui I dacă operațiile din I induc pe S o structură de inel.

Din definiție rezultă, în particular, că S este subgrup al grupului $(I, +)$ și S este o parte stabilă a lui I în raport cu operația " $\cdot$ ".

Prin urmare condițiile:

$S_1) a \cdot b \in S$, pentru orice $a, b \in S$;

$S_2) a \cdot b \in S$, pentru orice $a, b \in S$;

sunt condiții necesare și suficiente pentru ca S să fie un subinel al lui I .

Observație. Dacă $(I, +, \cdot)$ este un inel, atunci I și submulțimea $\{0\}$ a lui I este subinel.

7. Structura de corp.

Definiție. Un inel $(K, +, \cdot)$ unitar și care conține cel puțin două elemente se numește *corp* dacă orice element nenul din K este inversabil față de operația " $\cdot$ " din K .

Existența elementelor inversabile este asigurată de faptul că inelul admite element unitate în raport cu operația " $\cdot$ ".

Faptul că elementul unitate al operației " $\cdot$ " este diferit de elementul unitate al operației " $+$ " este asigurat de faptul că inelul este diferit de inelul nul.

Exemplu. Fie $d \neq 0, 1$ număr care nu se divide prin pătratul nici unui număr prim. Notăm

$$Q[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in Q\}$$

Definim:

$$+ : Q[\sqrt{d}] \times Q[\sqrt{d}] \rightarrow Q[\sqrt{d}],$$

$$(a + b\sqrt{d}) + (u + v\sqrt{d}) = (a + u) + (b + v)\sqrt{d} \in Q[\sqrt{d}]$$

și

$$\cdot : Q[\sqrt{d}] \times Q[\sqrt{d}] \rightarrow Q[\sqrt{d}],$$

$$(a + b\sqrt{d}) \cdot (u + v\sqrt{d}) = (au + dbv) + (av + bu)\sqrt{d} \in Q[\sqrt{d}]$$

Atunci $(Q[\sqrt{d}], +, \cdot)$ este corp.

***Teoremă.* Orice divizor al lui zero într-un inel nenul I nu este inversabil.**

Demonstrație.

Fie a un divizor al lui zero la stânga, adică există $b \neq 0$, $b \in I$ astfel încât $ba = 0$. Dacă a ar fi inversabil în I , atunci ar exista $a' \in I$ astfel încât $aa' = a'a = 1$. Deducem că $baa' = 0a' = 0 = b$ lucru care intră în contradicție cu $b \neq 0$. În concluzie un corp nu are divizori ai lui zero diferiți de zero.

Definiție. Un corp se numește *comutativ* dacă "." este operație comutativă.

Observație. Deoarece orice corp este inel, toate proprietățile inelelor rămân valabile în cazul corpurilor.

Subcorpuri.

Definiție. O submulțime nevidă k a unui corp $(K, +, \cdot)$ se numește *subcorp* dacă operațiile de înmulțire și adunare de pe K induc pe k operații algebrice împreună cu care este corp.

Din definiție deducem: k împreună cu operația aditivă este subgrup în K , ceea ce este echivalent cu

a) oricare ar fi $x, y \in k \Rightarrow x - y \in k$

iar din faptul că elementele din $k \setminus \{0\}$ formează subgrup al grupului elementelor nenule din K , avem:

a) oricare ar fi $x, y \in k \setminus \{0\} \Rightarrow xy^{-1} \in k$.

Exemplu. $(Q, +, \cdot)$ este subcorp al lui $(R, +, \cdot)$

Observații.

1. Condiția $x \neq 0$ putea fi eliminată deoarece pentru $x=0$ se obține totdeauna $xy^{-1} \in k$.

2. Din definiția subcorpului rezultă că orice subcorp conține elementul nul și elementul unitate al corpului.

Caracteristica unui corp.

Fie K un corp și e elementul unitate la înmulțire în K .

Definiție. Caracteristica lui K este cel mai mic număr natural $p > 0$ cu proprietatea :

$$0 = pe = e + e + \dots + e, \text{ de } p \text{ ori.}$$

Dacă nu există nici un număr natural cu această proprietate vom spune că, corpul K este de caracteristică 0.

Teoremă. Numărul p cu proprietatea de mai sus dacă există este prim.

Demonstrație.

Dacă $p = p_1 p_2$, atunci $pe = (p_1 e)(p_2 e)$ și $pe = 0$, iar K fiind corp, se obține $p_1 e = 0$ sau $p_2 e = 0$.

Din proprietatea de minimalitate a lui p se obține sau $p_1 = p$ sau $p_2 = p$.

Se notează

$$c(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \min \{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot 1_K = 0 \} \\ 0, & n \cdot 1_K \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Teoremă. Orice domeniu de integritate are caracteristica 0 sau un număr prim p .

Demonstrație.

Fie K domeniu de integritate și presupunem caracteristica lui $k \neq$ de un număr prim $\Rightarrow c(K)=mn \Rightarrow 1 < m, n < c(K)$.
 $m1_K \cdot n1_K = mn1_K = c(K)1_K = 0 \Rightarrow m1_K = 0$ sau $n1_K = 0$. Din prima relație rezultă $m > c(K)$ iar din a doua $n > c(K)$ ceea ce este absurd.

8.Exerciții

1. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție “*” :

$$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow x * y = xy + 2ax + by$$

Determinați $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât legea de compoziție “*” să fie comutativă și asociativă.

2. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție “*” :

$$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

Arătați că $(\mathbf{G}, *)$ este monoid comutativ.

3. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție “*” :

$$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow x * y = ax + by + c; \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R} \text{ și } ab \neq 0.$$

Determinați valorile lui a, b, c pentru care $(\mathbf{R}, *)$ este grup cu elementul neutru 2005.

4. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Pe $\mathbf{R}$ se definesc legile de compoziție “ Δ ” și “*” :

$$\Delta : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow x \Delta y = ax + by - 2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow x * y = xy - 2x - 2y + c, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

care sunt valorile lui $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $(\mathbf{R}, \Delta, *)$ să fie corp?

5. Pe $\mathbf{C}$ se definește legea de compoziție “*” :

$$* : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 * z_2 = z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - i - 1$$

Se cere:

a) Elementul neutru;

b) Elementele simetrizabile;

c) Să se rezolve ecuația $z * (i - 1) = 3 + i$.

Capitolul VI. Analiza combinatorie

Teoremă. Dacă A este o mulțime cu n elemente, iar B o mulțime cu m elemente atunci $A \times B$ are $n \cdot m$ elemente, adică:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Demonstrație.

Observăm că pentru fiecare $a \in A$ putem construi n perechi ordonate de forma (a, y) , cu $y \in B$. Cum B are m elemente, numărul total de perechi ordonate este $n \cdot m$.

Definiție. Fie A mulțime cu n elemente. Mulțimea A se numește *ordonată* dacă fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n , numit rangul elementului, astfel încât la elemente diferite ale lui A corespund numere diferite.

1. Aranjamente

Definiție. Dacă A este o mulțime cu n elemente atunci submulțimile ordonate lui A având fiecare câte r elemente, unde $0 \leq r \leq n$, se numesc aranjamente de n elemente luate câte r și se notează A_n^r .

Teoremă. Numărul aranjamentelor de n obiecte luate câte r este dat de $A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$.

Demonstrație. În construcția unui aranjament de r -elemente dintr-o mulțime A cu n elemente, la fiecare pas p se poate alege un element dintr-o mulțime cu $n - (p-1) = n - p + 1$ elemente. Aplicăm regula produsului $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ și rezultă ce era de demonstrat.

Observație. Un calcul simplu conduce la

$$\underbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

unde $n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (citește „ n factorial”).

Notatii: Prin convenție, punem $A_n^0 = 1$ și $A_0^0 = 1$. Cu aceste notații

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}, \text{ pentru } 0 \leq r \leq n; \quad 0! = 1.$$

Exemplu. Numărul de moduri în care pot fi așezați 3 studenți pe 6 locuri este:

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

2. Permutări

Fie $n \geq 1$, întreg fixat. Aranjamentele de n elemente dintr-o mulțime A cu n elemente (distincte) se numesc *permutări* ale mulțimii A . Numărul $P_n = A_n^n = n!$. Prin convenție, se extinde această formulă și la cazul când $A = \emptyset$, punând $P_0 = 0! = 1$.

Exemplu. Câte moduri posibile de așezare a 9 oameni în jurul unei mese pot fi făcute ?

Soluție. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ mulțimea celor 9 oameni. Notăm cu X mulțimea tuturor permutărilor și cu Y mulțimea permutărilor din jurul meselor, din A . Definim funcția $f: X \rightarrow Y$ stabilind că pentru orice permutare $x_1, x_2, \dots, x_9$, $f(x_1, x_2, \dots, x_9)$ este permutare circulară legând x_1 și x_9 împreună pentru a forma un cerc. Este clar că funcția f este bijectivă și cele 9 permutări:

$$x_1 x_2 \dots x_9, \quad x_2 x_3 \dots x_9 x_1, \quad x_9, x_1, \dots, x_8$$

sunt corespondente permutările circulare.

$$\text{Avem } |Y| = \frac{9!}{9} = 8! = 40320.$$

Analog, numărul așezărilor a n oameni în jurul unei mese este

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

3. Combinări

Definiție. Fie A o mulțime cu n elemente ($n \geq 1$) și r fixat, $1 \leq r \leq n$. Se numește *combinare* de r elemente din A orice submulțime a lui A având r elemente.

Teoremă. Numărul C_n^r de combinări de r elemente ale unei mulțimi A cu n elemente este

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Demonstrație. Fie $B = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ o combinare fixată de r elemente din A . Putem asocia acestei combinări $r!$ aranjamente de r

elemente din A . În felul acesta, se obțin toate aranjamentele. Așadar $r! C_n^r = A_n^r$ de unde rezultă formula din enunț.

Convenții. Vom extinde formula combinărilor și la cazul $r = 0$, prin $C_n^0 = 1$ (există o singură submulțime cu 0 elemente, anume $\emptyset$). De asemenea, $C_n^0 = 1$.

Aceste convenții sunt compatibile cu o convenție mai veche $0! = 1$.

Trebuie remarcat că natura elementelor mulțimii A nu joacă nici un rol pentru calculul lui C_n^k (ceea ce explică absența mulțimii A din notație). De aceea, C_n^k se mai citește „combinări de n luate câte k ”.

Exemplu. Se dau cinci puncte distincte într-un plan, oricare patru necoliniare. Câte patrulatere se pot forma având vârfurile în cele patru puncte ?

Soluție. Avem $C_5^4 = C_5^{5-4} = C_5^1 = 5$ patrulatere.

4. Principiul cuibului

Teorema 1. (Principiul cuibului). *Dacă n obiecte sunt plasate în m căsuțe și $n > m$, atunci există cel puțin o căsuță care conține două sau mai multe obiecte.*

Principiul cuibului vine de la un chinez care a spus: când pui porumbei în cuiburi cu mai mulți porumbei decât cuiburi, atunci cel puțin doi porumbei trebuie puși în același cuib.

Exemplul 1. Printre cele cinci numere între 1 și 8, sunt cel puțin două din ele care adunate dau 9.

Soluție. Putem divide mulțimea $\{1, 2, \dots, 8\}$ în patru submulțimi distincte unde fiecare are două elemente care adunate dau 9: $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$. Când selectezi cinci numere din aceste patru submulțimi, cel puțin două din cele cinci numere selectate trebuie să fie din aceeași submulțime. Suma elementelor fiecăreia este 9.

Exemplul 2. Aratăm că în fiecare grup de doi sau mai mulți oameni există doi oameni care au același număr de prieteni (Este presupus că dacă x este prietenul lui y atunci y este de asemenea prietenul lui x).

Soluție. Presupunem că sunt n oameni în grup. Numărul prietenilor unei persoane x trebuie să fie între 0 și $n-1$. Dacă există o persoană x^* care are $n-1$ prieteni, atunci oricine este prieten cu x^* . Astfel 0 și $n-1$ nu pot fi ambele numărul de prieteni a unor oameni din

grup. Deci principiul cuibului ne spune că sunt cel puțin două persoane care au același număr de prieteni.

Teorema 2. *Dacă n obiecte sunt plasate în m căsuțe, atunci una din căsuțe trebuie să conțină cel puțin $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ obiecte, unde $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ denotă cel mai mic întreg sau egal cu $\frac{n}{m}$ (adică, partea întreagă a lui $\frac{n}{m}$).*

5. Relația de probabilitate

Sunt multe probleme în viața noastră zilnică legate de șansă, posibilitate sau *probabilitate*. Când aruncăm cu o monedă putem avea două posibilități externe: Cap și Pajură. Dacă moneda este adevărată șansa să avem pe partea externă Cap este 1 la jumătate sau 50 %. Când rotim o pereche de zaruri putem avea pe exterior o colecție de perechi de numere între 1 și 6. Șansa evenimentului de a arunca cu un zar 6 este de $\frac{1}{6}$, pe

amândouă zarurile să avem 6 este $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, ... (În acest caz spunem că rezultatul aruncării cu un zar este independent de celălalt zar).

Probabilitatea ca un eveniment A să se întâmple, este dată de:

$$P_A = \frac{\text{Nr. total de cazuri favorabile}}{\text{Nr. total de cazuri posibile}}$$

Exemplu. Presupunem că urna U_i conține a_i bile albe și b_i bile negre, $i=1,2$. Din fiecare urnă extragem la întâmplare câte o bilă. Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

Soluție. Observăm că numărul cazurilor egal posibile este $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ întrucât un eveniment elementar posibil este o pereche (m,n) , unde m este bila provenită din U_1 și n este bila provenită din U_2 . Fie acum A evenimentul ca bilele extrase să fie albe. Numărul cazurilor favorabile producerii lui A este a_1a_2 întrucât eveniment elementar favorabil lui A este o pereche (m,n) formată cu o bilă albă din U_1 și o bilă albă din U_2 .

$$\text{Deci : } P_A = \frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2)}$$

6.Exerciții

1.Câte numere diferite se pot forma cu cifrele 0, 3, 5, 6, 7 dacă fiecare astfel de cifră intră o singură dată?

2. Dintr-un grup de 6 persoane se aleg un rector, un prorector, și un secretar științific, fiind interzis cumulul de funcții. În câte moduri se poate face alegerea ?

3. Câte numere diferite se pot forma cu cifrele 0, 3, 5, 6, 7?

4.Arătați că dacă $a_1, a_2, \dots, a_k$ sunt întregi nu necesar distincți, atunci se pot găsi unele care adunate dau un număr multiplu de k .

5.Dându-se zece numere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ astfel încât $0 \leq a_i < 100$, demonstrați că putem găsi submulțimi A, B de forma suma elementelor din A să fie egală cu suma elementelor din B.

Capitolul VII. Mulțimea numerelor naturale

1. Relația de echipotență. Cardinalul unei mulțimi.

Definiție. Fie A, B mulțimi. Spunem că mulțimile A, B sunt *echipotente* dacă există o funcție bijectivă $f: A \rightarrow B$.

Notăm prin:

$$A \approx B$$

faptul că A, B sunt echipotente.

Exemplu. Dacă $B = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ atunci $f: A \rightarrow B$ definită prin $f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c$ este bijectivă, deci A, B sunt echipotente.

Teoremă. Simbolul " $\approx$ " este o relație de echivalență.

Demonstrație.

Reflexivitatea: $A \approx A$ rezultă din faptul că $I_A: A \rightarrow A$ este bijectivă.

Simetria: ($A \approx B \Rightarrow B \approx A$) rezultă din faptul că dacă $f: A \rightarrow B$ este bijectivă atunci și $f^{-1}: B \rightarrow A$ este bijectivă.

Tranzitivitatea: $[(A \approx B \text{ și } B \approx C)] \Rightarrow A \approx C$ rezultă din faptul că dacă $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ sunt funcții bijective atunci și $g \circ f: A \rightarrow C$ este bijectivă.

Relația " $\approx$ " fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă este o relație de echivalență, deci împarte mulțimile în clase de echivalență.

Exemplu.

$$A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}, \dots, A_n = \{a_n\}, \dots$$

$$B_1 = \{a_1, b_1\}, B_2 = \{a_2, b_2\}, \dots, B_n = \{a_n, b_n\}, \dots$$

$$C_1 = \{a_1, b_1, c_1\}, C_2 = \{a_2, b_2, c_2\}, \dots, C_n = \{a_n, b_n, c_n\}, \dots$$

Mulțimile $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ formează o clasă. Mulțimile $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ formează o altă clasă etc.

O clasă de echivalență, definită de relația de echipotență, se notează prin simbolul $|A|$ și se numește număr *cardinal* sau *puterea* fiecărei mulțimi din clasa respectivă.

Dacă mulțimile A, B sunt echipotente, ele au aceeași putere și li se asociază același număr cardinal.

Notăm cardinalul mulțimii A cu $|A|$.

Prin definiție

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A \approx B$$

2. Axiomele lui Peano

Mulțimea numerelor naturale constituie un sistem $(N, 0, f)$ format dintr-o mulțime N , un element fixat $0 \in N$ al său și o funcție $f: N \rightarrow N$ (numită funcție de succesiune) pentru care sunt satisfăcute următoarele axiome:

P1) $n \in N \Rightarrow f(n) \neq 0$ (0 nu este succesorul nici unui număr natural)

P2) $n, m \in N, f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

P3) $(M \subseteq N) \wedge (0 \in M) \wedge (n \in M \Rightarrow f(n) \in M) \Rightarrow M = N$

Elementul 0 poartă numele zero.

Axioma P3) stă la baza demonstrației prin inducție (primul principiu de inducție).

Teoremă. Fie $(N, 0, f)$ un sistem Peano. Atunci:

- 1) $\forall y \in N, y \neq 0, \exists x \in N$ astfel încât $y = f(x)$;
- 2) Oricare ar fi tripletul $(M, \bar{0}, g)$ format cu o mulțime nevidă M , un element $\bar{0} \in M$ și o funcție $g: M \rightarrow M$ există o unică funcție $h: N \rightarrow M$, astfel încât $h(0) = \bar{0}$ și $h \circ f = g \circ h$, adică $h(f(x)) = g(h(x))$, $\forall x \in N$.
- 3) Dacă $(M, \bar{0}, g)$ este de asemenea un sistem Peano, atunci f este funcție bijectivă.

Notăm

$$f(n) = n^+.$$

Presupunem îndeplinite axiomele P1) – P3) pentru o mulțime N .
Notăm 0^+ prin 1, 1^+ prin 2, 2^+ prin 3, . . . ceea ce conduce la:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Elementele mulțimii N se numesc *numere naturale*. Numerele 0, 1, 2, 3, . . . se numesc respectiv *zero, unu, doi, trei, . . .* și sunt folosite pentru a exprima cantitatea de elemente pentru mulțimile fără nici un element, cu un element, cu un element și încă un element, . . .

Axiomele P1)-P3) poartă numele *axiomele lui Peano* și mai pot fi formulate astfel:

P1) 0 nu este succesorul nici unui număr natural;

P2) numere naturale diferite au succesori diferiți;

P3) dacă M este o submulțime a lui N ($M \subseteq N$), care conține pe 0 și dacă conține pe n va conține și pe n^+ , atunci $M = N$

Observații:

- Orice număr natural n afară de 0 este succesorul unui alt număr natural numit precedent al lui n .
- În continuare notăm $N \setminus \{0\}$ prin N^* .

3. Operații cu numere naturale.

Adunarea.

Teoremă. Există o unică operație algebrică pe N (notată prin $+$) și numită adunarea numerelor naturale astfel încât pentru orice $m, n \in N$ să avem:

$$A_1: 0 + m = m$$

$$A_2: n^+ + m = (n + m)^+$$

Demonstrație. Probăm unicitatea. Pentru aceasta să presupunem că mai există o operație algebrică $\oplus$ pe N astfel încât sunt satisfăcute A_1 și A_2 .

Fie $P = \{n \in N \mid n + m = n \oplus m, \text{ pentru orice } m \in N\} \subseteq N$

Din A_1 deducem că $0 \in P$ (deoarece $0+0=0$ și $0 \oplus 0=0$) iar din A_2 deducem că dacă $n \in P$, atunci $n^+ + m = n^+ \oplus m \Leftrightarrow (n + m)^+ = (n \oplus m)^+$ ceea ce este adevărat (lucru rezultat din axioma P_2 a lui Peano). Deci $P=N$, adică cele două operații coincid.

Teoremă. Pentru orice $m, n \in N$ avem:

$$A_1^0: n + 0 = n$$

$$A_2^0: n + m^+ = (n + m)^+$$

Demonstrație. Fie $P = \{m \in N \mid m + 0 = m\} \subseteq N$. Dacă în A_1 facem pe $m = 0$, deducem că $0+0=0$, adică $0 \in P$. Dacă $m \in P$, (adică $m + 0 = m$), atunci $m^+ + 0 = (m + 0)^+ = m^+$, adică $m^+ \in P$, deci $P=N$. Analog se probează și a doua relație.

Înmulțirea.

Teoremă. Există o unică operație algebrică pe N notată $\cdot$ și numită înmulțirea numerelor naturale astfel încât pentru orice $m, n \in N$ să avem:

$$I_1: m \cdot 0 = 0$$

$$I_2: m \cdot n^+ = m \cdot n + m$$

În cazul în care nu există pericol de confuzie, vom scrie $n \cdot m = nm$ pentru $n, m \in N$.

Teoremă. $\forall n, m \in N$ avem:

$$I^{10}: 0 \cdot m = 0$$

$$I^{20}: n^+ \cdot m = n \cdot m + m$$

Pornind de la observația că o sumă de de mai mulți termeni, toți egali (de exemplu: $5+5+5+5$), poate fi înlocuită prin scrierea ce reprezintă produsul dintre numărul termenilor și termenul în sine (în exemplul nostru cu $4 \cdot 5$), s-a pus problema scrierii prescurtate a produsului a n numere egale

ca valoare (de exemplu: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$). S-a convenit ca un asemenea produs să se înlocuiască cu scrierea „numărul dat ^{numărul aparițiilor sale}” (în exemplul nostru 5^4).

Proprietăți ale operațiilor cu numere naturale:

1) Adunarea este asociativă:

$$(n + p) + r = n + (p + r), \forall p, n, r \in \mathbb{N}$$

2) Adunarea este comutativă:

$$n + p = p + n, \forall p, n \in \mathbb{N}$$

3) $\forall p, n, r \in \mathbb{N}, p + n = n + r \Leftrightarrow p = r$.

4) Două numere naturale au suma zero dacă și numai dacă amândouă numerele sunt zero.

5) Înmulțirea este asociativă:

$$(n \cdot p) \cdot r = n \cdot (p \cdot r), \forall p, n, r \in \mathbb{N}$$

6) Înmulțirea este comutativă:

$$n \cdot p = p \cdot n, \forall p, n \in \mathbb{N}$$

7) Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare :

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

8) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot 1 = n$

9) Suma a p elemente toate egale cu n este egală cu $p \cdot n$.

Demonstrăm ca exemplu proprietățile 1), 2), 3), 7), 8) și 9):

1) Fie

$$P = \{r \in \mathbb{N} \mid (n + p) + r = n + (p + r) \forall n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Pentru $r = 0$ avem $(n + p) + 0 = n + p$ și $p + 0 = p$ deci $n + (p + 0) = n + p$, prin urmare:

$(n + p) + 0 = n + (p + 0) = n + p$ și egalitatea este adevărată.

Arătăm că dacă egalitatea este adevărată pentru r , va fi de asemenea adevărată pentru r^+ .

Avem $(n + p) + r^+ = [(n + p) + r]^+ = [n + (p + r)]^+ = n + (p + r)^+ = n + (p + r^+)$ de unde totul este clar.

Din axioma P3) și cele de mai sus $\Rightarrow 1)$.

2) Fie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n + p = p + n \forall p \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

Evident $0 \in \mathbb{N}$.

Demonstrăm că dacă $n \in P$ atunci și $n^+ \in P$.

Într-adevăr, $n^+ + p = p + n^+ \Leftrightarrow (n + p)^+ = (p + n)^+$ iar din axioma P_2 avem $n + p = p + n$ ceea ce este adevărat.

3) $P = \{n \in \mathbb{N} \mid p + n = n + r \Leftrightarrow p = r, \forall p, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

Observăm că $0 \in \mathbb{N}$.

Presupunem $n \in \mathbb{N}$ și demonstrăm că $n^+ \in \mathbb{N}$. Egalitatea $p + n^+ = r + n^+$ este echivalentă cu $(p + n)^+ = (r + n)^+$, iar din axioma P2) deducem că

$$p + n = r + n \Leftrightarrow p = r.$$

Prin urmare proprietatea 3) este adevărată.

$$7) \text{ Fie } P = \{p \in \mathbf{N} \mid m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p, \forall m, n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{N}.$$

Ținând cont de I_1 deducem că $0 \in P$. Să presupunem acum că $p \in P$ și fie $m, n \in \mathbf{N}$. Avem $m \cdot (n + p^+) = m \cdot ((n+p)^+) = m \cdot (n+p) + m = m \cdot n + m \cdot p + m = m \cdot n + m \cdot p^+$, adică $p^+ \in P$ de unde $P = \mathbf{N}$.

$$8) \text{ Într-adevăr, } n \cdot 1 = n \cdot 0^+ = n \cdot 0 + n = n$$

$$9) \text{ Într-adevăr, după definiția înmulțirii avem: } n \cdot (1^+) = n \cdot 1 + n = n + n = 2 \cdot n$$

Dacă suma $S_p = n_1 + n_2 + \dots + n_p$, unde toți termenii sunt egali cu n este egală cu $p \cdot n$, atunci deducem că:

$$S_{p+1} = S_p + n = n \cdot p + n = n \cdot p^+ = (p+1) \cdot n$$

$$1) \text{ Prin urmare, oricare ar fi } p \text{ avem } S_p = p \cdot n.$$

Exercițiu. Ce structură algebrică este $(\mathbf{N}, +)$ și $(\mathbf{N}, \cdot)$?

4. Relația de ordine în $\mathbf{N}$

4.1. Relația de ordine totală

Definiție. Pentru $m, n \in \mathbf{N}$ scriem $m \leq n$ (și spunem că m este mai mic sau egal decât n sau că n este mai mare sau egal decât m) dacă există $p \in \mathbf{N}$ astfel încât $m + p = n$.

Proprietățile relației " $\leq$ "

Relația " $\leq$ " este reflexivă: $n \leq n$. Adevărat deoarece există $0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $n + 0 = n$.

Relația " $\leq$ " este antisimetrică: $(n \leq m \text{ și } m \leq n) \Rightarrow m = n$. Adevărat deoarece există numerele naturale p și q astfel încât $m = n + p$ și $n = m + q$. Adunăm ultimele două egalități:

$$m + n = m + n + p + q \Rightarrow 0 = p + q.$$

Numerele p și q fiind naturale, ultima egalitate este adevărată numai dacă $p = q = 0$.

Relația " $\leq$ " este tranzitivă: $(n \leq m \text{ și } m \leq r) \Rightarrow n \leq r$. Adevărat deoarece există numerele naturale p, q astfel încât $m = n + p$ și $r = m + q$. Adunăm ultimele două egalități:

$$m + r = n + m + p + q \Rightarrow r = n + (p + q) \Rightarrow n \leq r.$$

Relația " $\leq$ " fiind reflexivă, antisimetrică, și tranzitivă este o relație de ordine.

Observație. În loc de $m \leq n$ se mai scrie $n \geq m$.

Teoremă. Fiind date numerele naturale n, p are loc una și numai una din relațiile: $n \leq p$ sau $p \leq n$.

Demonstrație. Presupunem dat un număr natural n . Arătăm că relația dată ordonează toate celelalte numere naturale în raport cu n , adică avem: $n \leq p$ sau $p \leq n$. Folosim axioma P_3 a lui Peano. Observăm că 0 este ordonat în raport cu n , deoarece $n = 0 + n \Rightarrow n \geq 0$. Presupunem că un număr natural oarecare p este de asemenea ordonat în raport cu n , adică avem una din relațiile: $n \leq p$ sau $p \leq n$. Arătăm că în acest caz și p^+ este ordonat în raport cu n . Dacă $n \leq p$ atunci există $a \in \mathbb{N}$ a.î. $p = n + a$ deci $p^+ = (n + a)^+ = n + a^+$, prin urmare $n \leq p^+$.

Cum " $\leq$ " este o relație de ordine deducem că " $\leq$ " este o relație de ordine totală, astfel N este o mulțime total ordonată.

Relația de ordine totală și adunarea

Teoremă. Fie $m, n, p, q \in N$.

- 1) Dacă $m + p \leq n + p$ atunci $m \leq n$ și reciproc.
- 2) Dacă $m \leq n$ și $p \leq q$ atunci $m + p \leq n + q$.

Relația de ordine totală și înmulțirea

Teoremă. Fie $m, n, p, q \in N$.

- 1) Dacă $m \leq n$ atunci $mp \leq np$ ($p \neq 0$) și reciproc.
- 2) Dacă $m \leq n$ și $p \leq q$ atunci $mp \leq nq$.

Observație. A scădea dintr-un număr natural N , numit, descăzut, un alt număr natural M , numit scăzător, înseamnă a găsi un al treilea număr natural A , numit rest sau diferență, care, adunat cu scăzătorul, să ne dea descăzutul, scriem:

$$A = N - M$$

4.2. Relația de ordine strictă

Definiție. Pentru $m, n \in N$ scriem $m < n$ (și spunem că m este strict mai mic decât n sau că n este mai mare strict decât m) dacă există $p \in N^*$ astfel încât $m + p = n$.

Proprietățile relației "<"

Relația "<" nu este reflexivă : n nu este mai mic ca n . Adevărat deoarece pentru $p \in N^* \Rightarrow p + n \neq n$.

Relația "<" nu este simetrică. Adevărat, deoarece dacă $m < n$ nu mai putem avea $n < m$.

Relația "<" este tranzitivă, adică $(n < m \text{ și } m < r) \Rightarrow n < r$. Adevărat deoarece există numerele naturale p, q nenule astfel încât $m = n + p$ și $r = m + q$. Adunăm ultimele două egalități:

$$m + r = n + m + p + q \Rightarrow r = n + (p + q) \Rightarrow n < r.$$

O relație " r " nereflexivă, nesimetrică, și tranzitivă se numește relație de ordine strictă. În cazul nostru " $<$ " este relație de ordine strictă.

Relația de ordine strictă are aceleași proprietăți ca relația de ordine totală „ $\leq$ ” introdusă pe $\mathbb{N}$ în raport cu adunarea și înmulțirea.

Observație. În loc de $m < n$ se mai scrie $n > m$.

Teoremă. Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ și $m < n$, atunci $m^+ \leq n$.

Demonstrație. Din $m < n$ rezultă că există $p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $m + p = n$.

Cum $p \in \mathbb{N}^*$ există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $p = k^+$. Atunci din $m + p = n$ deducem că $m + k^+ = n \Rightarrow (m + k)^+ = n \Rightarrow m^+ + k = n \Rightarrow m^+ \leq n$.

Consecință. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $n < n^+$.

Teoremă. Dacă $n \in \mathbb{N}$ atunci toate numerele naturale sunt ordonate în raport cu n .

Demonstrație.

Dacă $p < n$ avem $n = p + b$ cu $b \neq 0$. Cum $b \neq 0 \Rightarrow$ există $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = a^+$. În concluzie $n = p + (a + 1) = (p + 1) + a = p^+ + a$ de unde $p^+ \leq n$. Analog cazul $p > n$.

Teoremă. Orice submulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

Demonstrație. Fie

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m, \forall m \in A\} \subseteq \mathbb{N}$$

Avem $0 \in P$ din axioma P1). Dacă pentru orice $n \in P$ ar rezulta $n^+ \in P$, atunci am deduce că $P = \mathbb{N}$. Astfel pentru $q \in A$ avem că $q \in P$, deci $q^+ \in P$. În particular ar rezulta că $q^+ \leq q$ ceea ce este absurd. În concluzie $P \neq \mathbb{N}$, adică există $p \in P$ astfel încât $p^+ \notin P$.

Demonstrăm că $p \in A$ și că p este cel mai mic element al lui A . Într-adevăr, dacă $p \notin A$, atunci pentru orice $m \in A$ avem $p < m$, de unde $p^+ \leq m$, adică $p^+ \in P$ ceea ce este absurd. În concluzie $p \in A$ și cum $p \in P$ deducem că $p \leq m$ pentru orice $m \in A$, adică p este cel mai mic element al lui A .

Consecință. Orice șir descrescător de numere naturale este staționar.

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir descrescător de numere naturale iar

$$P = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Știim că P are un cel mai mic element a_k ; atunci pentru orice $m \geq k$ avem $a_m \geq a_k$ și cum $a_m \leq a_k$ deducem că $a_m = a_k$, adică șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este staționar.

5. Împărțirea

Lema lui Arhimede. Fie n un număr natural diferit de zero. Atunci oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $pn > m$.

Demonstrație. Fie $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = q^+$. Cum $mn = mq^+ = mq + m \geq m$, rezultă că $mn \geq m$. Fie $p = m + 1$. Atunci $pn = (m + 1)n = mn + n > mn \geq m$, deci $pn > m$.

Teorema împărțirii. Oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ ($b \neq 0$), există și sunt unice două numere naturale q și r astfel încât $a = bq + r$ și $r < b$.

Numărul a se numește deîmpărțit, b împărțitor, q cât și r rest.

Demonstrație. Dacă $a = 0$ putem lua $q = 0$ și $r = 0$. Presupunem că $a = bq + r$ cu $r < b$ și arătăm că există $q^*, r^* \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^+ = bq^* + r^*$, $r^* < b$. Avem $a^+ = a + 1 = bq + r + 1$.

Fie $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ astfel încât $r + p = a$ și fie $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $p = s^+$. Avem $a = r + p = r + s^+ = r + (s + 1) = (r + 1) + s$. Dacă $s = 0$ luăm $q^* = q + 1$ și $r^* = 0$ iar dacă $s \neq 0$ luăm $q^* = q$ și $r^* = r + 1$ și avem

$$a^+ = bq^* + r^*, r^* < b$$

Astfel partea de existență a teoremei este demonstrată conform axiomei P3) a lui Peano.

Să demonstrăm acum unicitatea numerelor q și r . Presupunem că q și r nu sunt unice. Atunci $a = bq + r = bq^1 + r^1$, cu $r, r^1 < b$ și să arătăm că $q = q^1$ și $r = r^1$.

Să presupunem de exemplu că $q < q^1$, adică $q + s = q^1$ cu $s \in \mathbb{N}^*$.

Avem $a = bq^1 + r^1 = b(q + s) + r^1 = bq + bs + r^1$, adică $r = bs + r^1 > b$ ceea ce este absurd. În concluzie q, r sunt unice.

Algoritm de determinare a câtului și restului.

Numerele de mai jos sunt multiplii lui b :

$$0 < b < 2b < 3b < \dots < qb < (q+1)b < \dots$$

Dacă a este multiplul lui b atunci $a = nb$, $q = n$ și $r = 0$, unice.

Dacă a nu este multiplul lui b , el se situează între doi multipli consecutivi de b . În acest caz

$$bq < a < (q+1)b \Rightarrow a = bq + r \text{ și } r < b, q \text{ și } r \text{ sunt unice.}$$

6. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimi numărabile. Mulțimi nenumărabile.

În acest paragraf vom studia mulțimile din punctul de vedere al cantității de elemente pe care le conțin.

Definiție. O mulțime A se numește *finită* dacă este echivalentă cu mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definiție. O mulțime care nu este finită se numește *infinită*.

Cardinalul mulțimii $\mathbb{N}$.

Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(n) = n + 1$. Această aplicație fiind bijectivă, mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt echipotente și au același cardinal. Pe de altă parte

$N^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ are cardinalul $|N^*|$

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ are cardinalul $|N^*| + 1$.

Rezultă că $|N^*| = |N^*| + 1$, deci $|N|$ nu este finit.

Definiție. O mulțime A se numește *numărabilă* dacă este cardinal echivalentă cu mulțimea numerelor naturale. O mulțime care nu este numărabilă se numește *nenumărabilă*.

Teoremă . Orice mulțime infinită A conține o submulțime numărabilă.

Demonstrație.

A infinită putem alege a_1 în A . Deoarece $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ putem alege a_2 în $A \setminus \{a_1\}$ și în general a_n în $A \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ pentru fiecare $n \geq 2$. Mulțimea $\{a_1, a_2, \dots\}$ astfel construită constituie o submulțime numărabilă a lui A .

Consecință. Dacă A este o mulțime infinită și B este o submulțime finită a sa atunci A și $A \cup B$ sunt mulțimi cardinal echivalente.

Teoremă. Dacă A, B sunt numărabile și $A \cap B = \emptyset$, atunci $A \cup B$ este numărabilă.

Demonstrație.

Dacă $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ atunci $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$ este numărabilă.

7. Sisteme de numerație

Definiție. Se numește *sistem de numerație* totalitatea regulilor de reprezentare a numerelor folosind un anumit set de simboluri diferite, numit alfabet .

După felul de grupare și ordonare a semnelor se deosebesc două sisteme de numerație:

a) sisteme de numerație nepoziționale.

b) sisteme de numerație poziționale.

a) Sisteme de numerație nepoziționale. Cel mai cunoscut sistem de numerație nepozițional este sistemul de numerație roman care folosește următoarele semne (cifre romane):

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Reguli de scriere cu cifre romane.

În cadrul unui număr scris în sistemul roman *nu pot să apară mai mult de trei semne consecutive de același fel.*

De aceea:

-orice semn pus la stânga aluia de valoare mai mare decât a lui, se scade.

Astfel următoarele numere se scriu cu două semne, primul reprezentând un număr care se scade din al doilea:

IV	IX	XL	XC	CD	CM
4	9	40	90	400	900

-orice semn pus la dreapta altuia de valoare mai mare sau egală decât a lui, se adună.

Un număr oarecare până la 4000 se scrie alăturând numere scrise mai sus începând cu cel mai mare.

Exemple.

$$LXXXIV=50+10+10+10+4=84;$$

$$MMCDXXVIII=2428.$$

Pentru numere mai mari de 4000, indicăm numărul miilor punând deasupra numărului de mii o linie, deasupra numărului zecilor de mii două linii ș.a.m.d.

Exemplu.

$$\overline{IVC} = 4100$$

$$\overline{\overline{XIICDXDC}} = 12410600$$

b) Sisteme de numerație poziționale. În sistemele de numerație poziționale, un simbol din alcătuirea unui număr (cifră) are valoare intrinsecă dar și o valoare prin poziția pe care o ocupă un număr. Aceasta implică existența unui simbol cu valoare intrinsecă nulă (zero). În unele din sistemele poziționale (spre exemplu babilonian) în care regulile o permit, este posibil să se renunțe la acest simbol. În continuare prezentăm sistemul de numerație indian care folosește următoarele semne (cifre arabe): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (de altfel fiind sistemul de numerație folosit în prezent).

Principiul numerației de poziție. Fie a un număr natural, pe care îl numim bază a sistemului de numerație.

Teoremă. Orice număr natural N poate fi scris sub forma

$$N = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0,$$

unde numerele x_k sunt numere naturale care verifică relația

$$0 \leq x_k \leq a - 1, k=1, 2, \dots, n \text{ și } a > 1.$$

Demonstrație. Admițând că expresia există vom nota

$$R_k = x_k a^k + x_{k-1} a^{k-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

$$N - R_k = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_{k+1} a^{k+1} = Q_k a^{k+1}$$

Q_k și R_k sunt câtul și restul împărțirii lui N la a^{k+1} , fiindcă avem

$$R_k \leq (a-1)a^k + (a-1)a^{k-1} + \dots + (a-1)a + (a-1) = a^{k+1} - 1.$$

Vom defini coeficienții x_k din aproape în aproape, în ordinea descrescătoare a indicilor, luând drept x_n – câtul împărțirii lui N la a^n , drept $x_n a + x_{n-1}$ –

câtul împărțirii lui N la a^{n-1} , drept $x_n a^2 + x_{n-1}a + x_{n-2}$ – câtul împărțirii lui N la a^{n-2} , etc.

Se obține astfel singura soluție posibilă dacă aceasta există. Or numerele x_k introduse sunt realmente mai mici decât a , dacă n a fost definit prin $a^n \leq N < a^{n+1}$ fiindcă dacă una din împărțiri este $N = Q_k a^{k+1} + R_k$, împărțirea următoare este $N = (Q_k a + x_k) a^k + R_{k-1}$, de unde, $R_k = x_k a^k + R_{k-1} < a^{k+1}$, prin urmare $x_k < a$.

În fine, ultima împărțire, cea de la a , dă pe x_0 și demonstrează că expresia obținută este aptă să reprezinte pe N .

Deci, există o corespondență biunivocă între numerele N care verifică $a \leq N < a^{n+1}$ și șirurile de $n+1$ numere x_i , $0 \leq x_i < a$.

Supraliniind pentru a evita confuzia cu un produs, vom scrie

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)}_{(a)}$$

Se spune că N este scris în baza a , iar dacă $a=10$ vom spune că numărul este scris în baza zece.

Astfel am fundamentat ideea de scriere a unui număr natural în baza a :

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)}_{(a)} = x^n a_n + x^{n-1} a_{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

Teoremă. Dacă $N = \overline{(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)}_{(a)}$, $M = \overline{(y_n y_{n-1} \dots y_1 y_0)}_{(a)}$, $a \in \mathbb{N}^*$ atunci $N < M \Leftrightarrow m \leq n$ și $x_p < y_p$, unde $p \in \mathbb{N}$ este cel mai mare $i \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_i \neq y_i$.

$$\text{Exemplu. } \overline{1001101}_{(2)} > \overline{100110}_{(2)}$$

Trecerea unui număr din baza 10 în baza a .

Pentru a trece un număr din baza 10 într-o altă bază de numerație a , $a > 1$ se aplică algoritmul:

Se fac împărțiri întregi, succesive la baza a , pornind de la numărul întreg care se convertește;

- în urma fiecărei împărțiri se obține un cât și un rest;
- noul cât este deîmpărțitul următoarei împărțiri întregi;
- algoritmul se încheie când se obține câtul 0;
- resturile obținute, începând cu ultimul și până la primul, reprezintă cifrele numărului căutat.

Demonstrație. Fie N numărul natural în baza 10 care se convertește în baza a și fie reprezentarea în baza a obținută prin transformare de forma:

$$\overline{x_n x_{n-1} \dots x_0}_{(a)}$$

Algoritmul este corect dacă se termină într-un număr finit de pași și dacă:

$$N = \sum_{i=0}^n x_i a^i$$

Notăm cu a_1 câtul obținut după prima împărțire întreagă și cu x_0 restul acestei împărțiri; au loc relațiile $x_0 = N - a_1 a$, cu $a_1 < N$.

Cu a_2 câtul obținut după a doua împărțire întreagă (la baza a) și cu x_1 restul acestei împărțiri, au loc relațiile: $x_1 = a_1 - a_2 a$, $a_2 < a_1$.

Analog pentru $i=2, \dots, n+1$ au loc relațiile $x_{i-1} = a_{i-1} - a_i a$, $a_i < a_{i-1}$.

Din șirul de inegalități $a_i < a_{i-1}$ ($i = 2, \dots, n$) rezultă finitudinea algoritmului.

Fie ultimul rest, $x_n = a_n - a_{n+1} a$, unde $a_{n+1} = 0$.

Rezultă $N = x_0 + a_1 a = x_0 + x_1 a + a_2 a^2 = \dots = x_0 + x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_{n-1} a^{n-1} + a_n a^n = x_0 a^0 + x_1 a^1 + \dots + x_{n-1} a^{n-1} + x_n a^n$.

Exemplu. Să se treacă numărul 327 din baza 10 în baza 4

Număr	Bază	Cât	Rest
327	:4	81	3
81	:4	20	1
20	:4	5	0
5	:4	1	1
1	:4	0	1
Rezultatul obținut este $327 = 11013_{(4)}$.			

Operații într-un sistem de numerație dat.

În continuare vom stabili anumite reguli de efectuare a sumei, produsului, scăderii și împărțirii a două numere reprezentate în aceeași bază.

Adunarea

Fie N și M două numere scrise în aceeași bază a . Vom arăta cum se va scrie în baza a numărul $A = N + M$ numit suma lui N cu M .

Avem:

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)}_{(a)} = a^n x_n + a^{n-1} x_{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

respectiv

$$M = \overline{(y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)}_{(a)} = a^m y_m + a^{m-1} y_{m-1} + \dots + y_1 a + y_0$$

Dacă $n > m$, atunci adunăm la M , fără a-i schimba valoarea, expresia:

$$y_n a^n + y_{n-1} a^{n-1} + \dots + y_{m+1} a^{m+1}, \text{ unde } y_n = y_{n-1} = \dots = y_{m+1} = 0$$

Atunci:

$$N + M = (x_n + y_n)a^n + (x_{n-1} + y_{n-1})a^{n-1} + \dots + (x_i + y_i)a^i + \dots + (x_2 + y_2)a^2 + (x_1 + y_1)a + (x_0 + y_0)$$

Dacă toate numerele $(x_i + y_i)$ sunt mai mici decât a , numărul

$$A = N + M$$

se scrie:

$$A = \overline{(x_n + y_n)(x_{n-1} + y_{n-1}) \dots (x_i + y_i) \dots (x_1 + y_1)(x_0 + y_0)}_{(a)}.$$

Dacă există numere $(x_i + y_i)$ mai mari sau egale cu a , vom scrie:

$$x_i + y_i = a + z_i, z_i < a$$

Atunci avem:

$$(x_i + y_i)a^i = (a + z_i)a^i = a^{i+1} + z_i a^i$$

și vom înlocui: $x_i + y_i$ prin z_i , iar $x_{i+1} + y_{i+1}$ prin $x_{i+1} + y_{i+1} + 1$

$$\text{Exemplu. Fie } N = \overline{(5376)}_{(8)} \text{ și } M = \overline{(7147)}_{(8)}$$

Să aflăm numărul A :

$6+7=a+5=15$	Scriem 5 și reținem 1	Aranjarea folosită:
$7+4+1 = a+4=14$	Scriem 4 și reținem 1	$\begin{array}{r} 5376 + \\ 7147 \\ \hline 14545 \end{array}$
$3+1+1=5$	Scriem 5	
$5+7=a+4=14$	Scriem 14	
$Deci A = (14545)_{(8)}$		

Scăderea

Fie N și M două numere scrise în aceeași bază a .

Vom arăta cum se va scrie în baza a numărul $A = N - M$ numit scăderea lui N cu M .

Avem:

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)}_{(a)} = a^n x_n + a^{n-1} x_{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

respectiv

$$M = \overline{(y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)}_{(a)} = a^m y_m + a^{m-1} y_{m-1} + \dots + y_1 a + y_0$$

Pentru ca operația să fie posibilă este necesar să avem $N \geq M$.

Dacă $n > m$, atunci scădem la N , fără a-i schimba valoarea, expresia:

$$y_n a^n + y_{n-1} a^{n-1} + \dots + y_{m+1} a^{m+1}, \text{ unde } y_n = y_{n-1} = \dots = y_{m+1} = 0$$

Atunci:

$$N - M = (x_n - y_n)a^n + (x_{n-1} - y_{n-1})a^{n-1} + \dots + (x_i - y_i)a^i + \dots + (x_2 - y_2)a^2 + (x_1 - y_1)a + (x_0 - y_0)$$

Dacă toate numerele $(x_i - y_i)$ sunt definite, numărul $A = N - M$ se scrie:

$$A = \overline{(x_n - y_n)(x_{n-1} - y_{n-1}) \dots (x_i - y_i) \dots (x_1 - y_1)(x_0 - y_0)}_{(a)}.$$

Dacă există vreo diferență $(x_i - y_i)$ care nu se poate efectua înseamnă că există un număr i , astfel ca $y_i > x_i$ caz în care scriem:

$$(x_{i+1} - y_{i+1})a^{i+1} + (x_i - y_i)a^i = (x_{i+1} - y_{i+1} - 1)a^{i+1} + (a + x_i - y_i)a^i$$

Dar: $0 < x_i < y_i < a$ ceea ce atrage $0 < a + x_i - y_i < a$. Cifra unităților de ordinul i din diferență este deci $a + x_i - y_i$, iar cifra unităților de ordinul $i+1$ este micșorată cu o unitate.

Exemplu. Fie $N = (14545)_{(8)}$ și $M = (\overline{5376})_{(8)}$. Să aflăm numărul A :

$a+5-6=7$	Scriem 7 reținem 1	Aranjarea folosită:
$a+4-(7+1)=4$	Scriem 4 reținem 1	14545 –
$a+4-3=1$	Scriem 1 reținem 1	5376
$a+4-5=7$	Scriem 7 reținem 1	7147
$1-1=0$	S-a terminat scăderea	
Deci $A = (\overline{7147})_{(8)}$		

Înmulțirea

Fie N, M două numere scrise în aceeași bază a . Vom arăta cum se va scrie în baza a numărul $A = NM$.

Avem:

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)}_{(a)} = a^n x_n + a^{n-1} x_{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

respectiv

$$M = \overline{(y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)}_{(a)} = a^m y_m + a^{m-1} y_{m-1} + \dots + y_1 a + y_0$$

Arătăm că înmulțirea numerelor naturale scrise în aceeași bază se reduce la următoarele operații:

- înmulțirea numărului natural N cu o putere a^j a bazei a ;
- înmulțirea numărului natural N cu un număr j cu proprietatea 0

$\leq j < a$.

- adunarea în baza a .

$$\begin{aligned}
 Na^j &= \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)_{(a)}} \cdot a^j = a^{n+j} x_n + a^{n+j-1} x_{n-1} + \dots + x_1 a^{j+1} + x_0 a^j = \\
 \text{a)} \quad &= \overline{(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0 \underbrace{00 \dots 0}_{j\text{-ori}})_{(a)}}
 \end{aligned}$$

adică am arătat cum se face o înmulțire de tipul a)

b) Dacă i și j sunt două numere naturale $< a$, avem că $ij < a^2$ iar după teorema împărțirii cu rest pentru numere naturale, avem:

$$ij = aq(i,j) + r(i,j), \quad 0 \leq r(i,j) < q(i,j), \quad 0 \leq q(i,j) < a$$

cățul $q(i,j)$ și restul $r(i,j)$ împărțirii numărului ij prin a depinzând de i și j .

Fie acum j o cifră a sistemului de numerație de bază a . Atunci:

$$\begin{aligned}
 N \cdot j &= \sum_{i=0}^m x_i j a^i = \sum_{i=0}^m (aq(x_i, j) + r(x_i, j)) a^i = \\
 &= \sum_{i \geq 0} r(x_i, j) a^i + \sum_{i \geq 0} q(x_i, j) a^{i+1}
 \end{aligned}$$

Deci efectuarea produsului Nj în baza a revine la a face suma numerelor N_1 și N_2 reprezentate în baza a :

$$N_1 = r(x_0, j) + r(x_1, j)a + r(x_2, j)a^2 + \dots$$

respectiv

$$N_2 = q(x_0, j) + q(x_1, j)a + \dots$$

Astfel am văzut cum se face o înmulțire de tipul b)

Concluzionăm că:

$$N \cdot M = \sum_{j=0}^m N y_j a^j$$

Adică produsul NM se poate efectua făcând suma în baza a a numerelor $N y_j a^j$, $j=0, 1, 2, \dots, m$. Ținând cont că $N y_j a^j = (N y_j) a^j$ avem $N y_j$ este o operație de tipul b) și că $(N y_j) a^j$ este o operație de tipul a).

Exemplu. Se consideră $N=3523$ și $M=500$ scrise în baza 7. Se cere $A = NM$. Aflăm numărul A :

5·3=2·7+1	Scriem 1 reținem 2	Aranjarea folosită:
2+5·2=1·7+5	Scriem 5 reținem 1	3523 ×
1+5·5=3·7+5	Scriem 5 reținem 3	500
3+5·3=2·7+4	Scriem 24	2455100
A = (2455100) ₍₇₎		

Împărțirea

Împărțirea unui număr x numit deîmpărțit la un număr y numit împărțitor se reduce la găsirea numerelor q și r unice astfel încât:

$$x = yq + r \text{ și } r < y.$$

Fie

$$x = a_{n-1}a^{n-1} + a_{n-2}a^{n-2} + \dots + a_1a + a_0$$

$$y = a_{n-1}a^{n-1} + a_{n-2}a^{n-2} + \dots + a_1a + a_0 \quad \text{și}$$

numere scrise în baza a .

Găsirea câțului (q) și restului (r) presupune parcurgerea etapelor :

E1: Determinarea numărului de cifre a câțului;

E2: Determinarea primei cifre a câțului;

E3: Determinarea altor cifre a câțului;

E4: Aranjarea practică a operației;

E1. În cazul că:

a) $y > x$, câțul este $q = 0$ și $r = x$;

b) $y = x$, câțul este $q = 1$ și $r = 0$

Presupunem $y < x$.

Teoremă. Dacă există două numere q_1 și q_2 astfel ca $yq_1 \leq x < yq_2$, câțul q verifică $q_1 \leq q < q_2$.

Demonstrație. Presupunem că există două numere naturale q_1 și q_2 astfel ca $yq_1 \leq x < yq_2$.

Observăm că

$q_1 > q$ rezultă $q_1 \geq q + 1$ sau $yq_1 \geq y(q + 1) > x$, contradicție cu definiția câțului;

$q_2 \leq q$ rezultă $yq \geq yq_2 > x$, contradicție cu definiția câțului.

Deci, nu putem avea nici $q_1 > q$ și nici $q_2 \leq q$.

Am demonstrat $q_1 \leq q < q_2$.

Teoremă. Numărul cifrelor câțului q este numărul minim de 0 care trebuie scrise la dreapta lui y , pentru ca numărul obținut să fie superior lui x .

Demonstrație.

Notăm cu r numărul minim de 0 pe care trebuie să le scriem la dreapta lui y pentru ca numărul y' astfel obținut să fie să fie mai mare ca x . Numărul y' este produsul lui y prin a^r .

Din alegerea lui r avem $ya^{r-1} \leq x < ya^r$ care rezultă $q_1 = a^{r-1}$ și $q_2 = a^r$ îndeplinind condițiile din teoremă. Câțul q are în baza a un număr de r cifre.

E2. Calculăm prima cifră a câțului c_{r-1} .

Avem:

$$c_{r-1}a^{r-1} \leq q < (c_{r-1} + 1)a^{r-1}.$$

Cum toate numerele sunt naturale, avem:

$$c_{r-1}a^{r-1} \leq q < q + 1 \leq (c_{r-1} + 1)a^{r-1}$$

de unde :

$$c_{r-1}a^{r-1}y \leq qy < x < (q+1)y \leq (c_{r-1}+1)a^{r-1}y$$

din care deducem:

$$c_{r-1}a^{r-1}y \leq x < (c_{r-1}+1)a^{r-1}y.$$

Cifra c_{r-1} este deci câtul dintre x și $a^{r-1}y$.

E3. După determinarea lui c_{r-1} scriem:

$$x = c_{r-1}a^{r-1}y + x_1 \text{ cu } x_1 < a^{r-1}y.$$

Câtul dintre x și y este suma dintre $c_{r-1}a^{r-1}$ și câtul dintre x_1 și y .

Un calcul analog cu cel precedent ne dă prima cifră c_{r-2} a câtului dintre x_1 și $a^{r-2}y$.

Avem:

$$x_1 = c_{r-2}a^{r-2}y + x_2 \text{ cu } x_2 < a^{r-2}y.$$

Din aproape în aproape, avem relații analoage de forma:

$$x_i = c_{r-i-1}a^{r-i-1}y + x_{i+1} \text{ cu } x_{i+1} < a^{r-i-1}y,$$

care pentru

$$i=r-2 \text{ ne dă } x_{r-2} = c_1ay + x_{r-1} \text{ cu } x_{r-1} < ka$$

$$i=r-1 \text{ ne dă } x_{r-1} = c_0y + s \text{ cu } s < y.$$

Scoatem din aceste egalități relația:

$$x = y[c_{r-1}a^{r-1} + c_{r-2}a^{r-2} + \dots + c_{r-i-1}a^{r-i-1} + \dots + c_1a + c_0] + s \text{ cu } s < y.$$

Câtul q se scrie în baza a sub forma:

$$c_{r-2}c_{r-1} \dots c_2c_1c_0.$$

E4. Scriem datele astfel:

x	y
$c_{r-1}a^{r-1}a$	$c_{r-1}c_{r-2}$
x_1	
$c_{r-2}a^{r-2}y$	
x_2	
.	
.	
.	

Exemplu.

Să se efectueze împărțirea dintre numerele 4628 și 35 scrise în baza 9.

4628	35
3500	128
1128	
710	
318	
314	
4	

Astfel că în baza 9 câtul dintre 4628 și 35 este $q=128$, restul $r=4$.

Avem: $4628=128 \cdot 35+4$

8.Exerciții

1.Fie șirul 1, 4, 7, 10, 13,

a)Completați șirul cu încă doi termeni;

b)Găsiți al o sută^{-lea} termen;

2.Calculați:

$$2^{22}-2^{21}-2^{20}-\dots-2-1$$

3.Demonstrați că nu există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $5n+7=k^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

4.Demonstrați că printre $n+1$ numere naturale cel puțin două dau același rest prin împărțirea la n .

5.Determinați $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$\overline{24ab73} - \overline{c98d5} = \overline{e6019f}$$

Capitolul VIII. Divizibilitate pe $\mathbb{N}$

1. Teorema fundamentală a aritmeticii

Din teorema împărțirii cu rest rezultă că:

$$\forall a, b \text{ cu } b \neq 0, \exists! q, r \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } a = bq + r \text{ și } 0 \leq r < b.$$

În cazul particular în care $r=0$ spunem că a este un multiplu al lui b , sau că a este divizibil cu b , sau că b divide pe a , sau că b este un divizor al lui a .

În scris, exprimăm aceasta prin unul din simbolurile: $b \mid a$, care se citește b divide pe a , sau $a : b$, care se citește a este divizibil cu b .

Exercițiu. Verificați că dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ atunci:

$$\begin{aligned} & a \mid a \\ (a \mid b \text{ și } b \mid a) & \Rightarrow a = b. \\ (a \mid b \text{ și } b \mid c) & \Rightarrow a \mid c. \end{aligned}$$

Observație. Nu definim divizibilitatea prin 0.

Numere prime.

Definiția numerelor prime vine din școala lui Pitagora (sec. 6 î.e.n.). Poate că numai forma de exprimare a căpătat transformări, conținutul rămânând obligatoriu același: "prim este numărul care se divide numai cu el însuși și cu 1". Numărul 1, având numai un divizor nu face parte din numerele prime.

Putem recunoaște dacă un număr n este prim încercând ca divizori numerele prime inferioare primului număr prim p al cărui pătrat este mai mare decât numărul dat n ($p^2 > n$).

Exemplu. Pentru a stabili că 167 este număr prim, având $13^2 \approx 167$, va fi suficient să verificăm că el se divide cu numerele 2, 3, 5, 7, 11.

În continuare ne vom ocupa de cea mai importantă problemă din domeniul numerelor prime: posibilitatea descompunerii oricărui număr în factori primi. Aceasta revine la a scrie în mod unic orice număr natural sub forma unui produs de numere prime.

Teoremă. (Teorema fundamentală a aritmeticii) **Orice număr natural se scrie în mod unic ca produs de numere prime.**

Demonstrație.

Etapă 1: Arătăm că orice număr natural nenul se scrie ca un produs de numere naturale prime.

Într-adevăr, fie A mulțimea numerelor naturale nenule ce nu se scriu ca produs de numere naturale prime. Dacă prin absurd propoziția este falsă, atunci $A \neq \emptyset$. A fiind submulțime a lui N deducem că A are un cel mai mic element pe care-l notăm prin m . Spre exemplu, $m > 1$ și cum m nu este prim putem scrie $m = xy$ cu $1 < x, y < m$. Cum $x, y < m$ iar m este cel mai mic element din A deducem că $x, y \notin A$, deci x și y se scriu ca produse de numere prime – absurd. Deci $A = \emptyset$ și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Etapă 2: Demonstrăm că descompunerea în factori primi a lui n este unică.

Presupunem posibile următoarele descompuneri ale lui n :

$$n = p_1 p_2 \dots p_m$$

$$n = q_1 q_2 \dots q_s$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_m$ și $q_1, q_2, \dots, q_s$ sunt numere prime.

Avem:

$$p_1 p_2 \dots p_m = q_1 q_2 \dots q_s \quad (1')$$

Membrul întâi al egalității este divizibil prin p_1 ; deci și membrul al doilea va fi divizibil prin p_1 . Deducem că unul din factorii $q_1, q_2, \dots, q_s$ se împarte la p_1 . Admitem că acesta este q_1 . Cum q_1 este prim, el se împarte numai prin 1 și prin el însuși ceea ce impune cu necesitate $q_1 = p_1$.

Împărțind egalitatea (1') prin p_1 obținem $p_2 \dots p_m = q_2 \dots q_s$.

Repetând raționamentul ajungem la concluzia $q_2 = p_2$, iar după o nouă simplificare, la relația $p_3 p_4 \dots p_m = q_3 q_4 \dots q_s$.

Tot astfel găsim $p_3 = q_3, p_4 = q_4, \dots, p_m = q_s$, prin urmare avem tot atâția factori q câți p ; fiecare q este egal cu câte un p , adică cele două descompuneri ale lui n în factori primi sunt identice.

Unii factori se pot repeta. Deci, orice număr n poate fi reprezentat în mod unic sub forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere prime diferite iar $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in N$ sunt numiți exponenți și reprezintă multiplicitățile factorilor diferiți.

Această ultimă reprezentare este denumită descompunere canonică în factori.

Teoremă. Există o infinitate de numere prime.

Demonstrație.

Presupunem că există un număr finit de numere prime, fie ele $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Observăm că $a = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ nu este divizibil prin $p_1, p_2, \dots, p_k$ deoarece ar rezulta că $a \mid 1$. Din rezultatele anterioare deducem că există $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ astfel încât $p \mid a$.

Din presupunerea că $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt singurele numere prime deducem că există $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ astfel încât $p_i = p$. Absurd deoarece a nu este divizibil prin p_i . Deci există o infinitate de numere prime.

2. Criterii de divizibilitate.

Definiție. O regulă pe baza căreia putem spune că a este divizibil cu b fără a face împărțirea se numește *criteriu de divizibilitate*.

Teoremă. (Criteriul de divizibilitate cu 2^k și cu 5^k) **Un număr natural m este divizibil cu 2^k (sau cu 5^k) dacă și numai dacă numărul format de ultimele k cifre din scrierea sa în baza zece este divizibil cu 2^k (sau cu 5^k).**

Demonstrație. Scriem m în sistemul zecimal sub forma $m = a_n 10^n + \dots + a_{k+1} 10^{k+1} + a_k 10^k + a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$ unde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sunt numere cuprinse între 0 și 9, $a_n \neq 0$. Prin urmare a_0 reprezintă cifra unităților, a_1 cifra zecilor, a_2 cifra sutelor ș.a.m.d.,

astfel că $m = 10^k (a_n 10^{n-k} + a_{n-1} 10^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} 10 + a_k) + a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$.
Deci $m = 10^k t + a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$ unde $t = a_n 10^{n-k} + a_{n-1} 10^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} 10 + a_k$.

Atunci $2^k \mid m$ rezultă $2^k \mid (n-10^k t)$, adică $2^k \mid a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$.

Reciproc, $2^k \mid a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$ rezultă $2^k \mid 10^k t + a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$ adică $2^k \mid m$. Analog se procedează pentru 5^k .

Exemple.

- numerele 3724 și 18760 sunt divizibile cu 2^2 (pentru că 24 și 60 sunt multipli de 4).
- numerele 6900; 4925; 3250; 1475; 5000 sunt divizibile cu 25.

Teoremă. (Criteriul de divizibilitate cu 3 și cu 9) **Un număr natural m este divizibil cu 3 (respectiv cu 9) dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3 (respectiv cu 9).**

Demonstrație. Scriem m în sistemul zecimal sub forma:
 $m = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_n (10^n - 1) + a_{n-1} (10^{n-1} - 1) + \dots + a_2 (10^2 - 1) + a_1 (10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$.

Din formula

$$10^{k-1} - 1 = (10 - 1)(10^{k-2} + 10^{k-3} + \dots + 1) = 9k',$$

rezultă $10^{k-1} - 1$ este multiplu de 9, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $m = 9k' + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$ adică m este divizibil cu 3, respectiv cu 9, dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3, respectiv cu 9.

Teoremă. (Criteriul de divizibilitate cu 7, 11, 13) Un număr natural a este divizibil respectiv prin 7, 11 sau 13 dacă diferența obținută prin scăderea numărului reprezentat de ultimele 3 cifre ale numărului dat, din numărul reprezentat de toate celelalte cifre (sau invers) este egală cu 0 (zero) sau se divide prin 7 sau prin 11 sau prin 13.

Demonstrație.

Fie

n =numărul reprezentat de ultimele trei cifre ale lui a ;

m =numărul reprezentat de toate celelalte cifre ale aceluiaș

număr a ;

Avem

$$a = m \cdot 1000 + n = m \cdot 1000 + n + m - m = m \cdot 1001 + n - m$$

Caz I. Dacă $m < n$ scriem

$$a = m \cdot 1001 + (n - m)$$

Caz II. Dacă $m > n$ scriem

$$a = m \cdot 1001 - (m - n)$$

Cum $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ deducem că $m \cdot 1001$ este divizibil cu 7, 11 și 13.

Exemplu. Numărul 367311 este divizibil cu 7 deoarece $m - n = 367 - 311 = 56 = 7 \cdot 8$.

Teoremă. (Criteriul (2) de divizibilitate cu 11) Un număr natural n este divizibil cu 11 dacă și numai dacă diferența dintre sumele alternante ale cifrelor sale este divizibilă cu 11.

Exemplu. Numărul 18326 este divizibil cu 11 deoarece suma alternantă a cifrelor sale este $1 - 8 + 3 - 2 + 6 = 0$ divizibilă cu 11.

3.Divizorii unui număr natural.

Teoremă. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea canonică a numărului $n \in \mathbb{N}$ atunci, toți divizorii lui n sunt toate numerele de forma

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k \quad (1)$$

Demonstrație. Presupunem că $d \mid n$. Atunci $n = dq$ cu $q \in \mathbb{N}^*$ și prin urmare, toți divizorii primi ai lui d intră în descompunerea canonică a lui n cu exponenții ce nu sunt mai mici decât aceia cu care ei intră în descompunerea canonică a lui d . Din această cauză, d are forma (1).

Reciproc, orice d de forma (1) îl divide, evident pe n .

Exemplu. Toți divizorii numărului $720=2^4 3^2 5$ se obțin dacă vom face ca în expresia $2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$ exponenții $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ să parcurgă independent unul de altul valorile

$$\beta_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \beta_2 = 0, 1, 2; \beta_3 = 0, 1;$$

De aceea, acești divizori sunt: 1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 9, 18, 36, 72, 144, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240, 45, 90, 180, 360, 720.

Dacă toți β sunt nuli, obținem $d = 1$; dacă $\beta_k = \alpha_k$, obținem $d = n$.

Numărul divizorilor.

Folosim tabelul:

$p_1^0 p_1^1 p_1^2 \dots p_1^{\alpha_1}$	$-(\alpha_1 + 1)$ - termeni
$p_2^0 p_2^1 p_2^2 \dots p_2^{\alpha_2}$	$-(\alpha_2 + 1)$ - termeni
.....	
$p_k^0 p_k^1 p_k^2 \dots p_k^{\alpha_k}$	$-(\alpha_k + 1)$ - termeni

Înmulțind pe rând fiecare număr din linia I cu fiecare număr din linia II, obținem

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \text{ produse de forma } p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}.$$

Continuând să le înmulțim cu fiecare număr din linia III, obținem

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \text{ produse de forma } p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3}.$$

Analog, procedând până la ultima linie, obținem produsele de forma

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k},$$

adică toți divizorii.

Numărul lor este:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

Exemplu. Numărul $720=2^4 3^2 5$ are $(4+1)(2+1)(1+1)=30$ divizori.

Suma divizorilor.

Să efectuăm produsul de k sume, având termenii pe cele k linii considerate mai sus.

$$\begin{aligned} & (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + \dots + p_k^{\alpha_k}) = \\ & = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \end{aligned}$$

Exemplu. Suma divizorilor numărului $72=2^3 3^2$ este

$$\frac{2^4 - 1}{2 - 1} \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 195,$$

ceea ce se poate verifica ușor.

4. Divizori și multipli comuni a două sau mai multe numere naturale.

Definiții.

1) Orice întreg care divide simultan întregii $a, b, c, \dots, m$ se numește *divizor comun* al lor. Cel mai mare dintre divizorii comuni se numește *cel mai mare divizor comun* (prescurtat c.m.m.d.c) și se notează prin simbolul $(a, b, c, \dots, m)$. Existența sa este evidentă deoarece numărul divizorilor comuni este finit.

2) Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor $a, b, c, \dots, m$ este 1, atunci $a, b, c, \dots, m$ se numesc *prime* între ele sau *relativ prime*.

3) Dacă fiecare dintre numerele $a, b, c, \dots, m$ este prim cu oricare altul dintre aceste numere, atunci $a, b, c, \dots, m$ se numesc prime două câte două.

Exemple:

1. Numerele 6, 10 și 15 au $(6, 10, 15) = 1$

2. Numerele 8, 13, 21 sunt prime două câte două, deoarece $(8, 13) = (8, 21) = (13, 21) = 1$.

Teoremă. Dacă a este un multiplu al lui b , atunci mulțimea divizorilor comuni ai lui a și b coincide cu mulțimea divizorilor lui b , iar $(a, b) = b$.

Teoremă. Dacă $d, a, b \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $d = (a, b)$ atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ cu $d = ax + by$.

Demonstrație. Este evident pentru $a = b = 0$. Presupunem că a, b nu sunt simultan nule și considerăm $S = \{au + bv \mid u, v \in \mathbb{N}\}$. Mulțimea S nu este vidă deoarece $a^2 + b^2 > 0$. Fie s cel mai mic element din S cu proprietatea $s = au_0 + bv_0$ și $u_0, v_0 \in \mathbb{N}$. Arătăm că $d = s$. Este clar că d divide toate elementele din S . În particular, d divide s ; astfel că $d \leq s$. Din teorema împărțirii cu rest există $q, r \in \mathbb{N}$ unici astfel încât

$$au + bv = qs + r, \quad 0 \leq r < s.$$

Atunci $r = a(u - qv_0) + b(v - qv_0) \in S$, deci, d divide r . Cum $r \in S$ și $r < s$ intrăm în contradicție cu minimalitatea lui s . Dacă $r = 0$, atunci, s divide $au + bv$. În particular, când $(u, v) = (0, 1)$ și $(u, v) = (1, 0)$, deducem că s este divizor comun al lui a, b . Prin urmare $s \leq d$.

Teoremă. Dacă $a = bq + r$ atunci mulțimea divizorilor comuni ai numerelor a și b coincide cu mulțimea divizorilor comuni ai numerelor b și r .

Demonstrație. Dacă $(n \text{ divide } a \text{ și } n \text{ divide } b)$ atunci $(n \text{ divide pe } r)$ și deci n este divizor comun al numerelor b și r . Reciproc, aceeași egalitate ne arată că dacă $(n \text{ divide } b)$ și $(n \text{ divide } r)$ atunci $(n \text{ divide pe } a)$. În particular, trebuie să coincidă și cei mai mari dintre acești divizori, adică $(a,b)=(b,r)$.

Observație. Din teoremă deducem că pentru găsirea divizorilor comuni ai lui a și b (cazul a nu este multiplu de b) este mai ușor să-i căutăm pe cei ai numerelor b și r .

Exemplu. Calculăm cel mai mare divizor comun pentru 297 și 3627 astfel:

$$\begin{aligned} 3627 &= 12 \cdot 297 + 63 \\ 297 &= 4 \cdot 63 + 45 \\ 63 &= 1 \cdot 45 + 18 \\ 45 &= 2 \cdot 18 + 9 \\ 18 &= 2 \cdot 9; \\ (297, 3627) &= (63, 297) \\ &= (45, 63) \\ &= (18, 45) \\ &= (9, 18) \\ &= 9 \end{aligned}$$

5. Algoritmul lui Euclid.

Fie a, b numere naturale $\neq 0$ astfel încât $a > b$. Conform teoremei împărțirii, formăm șirul de egalități:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, & 0 \leq r_0 < b \\ b &= r_0q_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < r_0 \\ r_0 &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k, & 0 \leq r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1} + 0, & (r_{k+1}=0) \end{aligned}$$

Cum s-a arătat, acest lucru este inevitabil, deoarece șirul $b, r_0, r_1, \dots, r_k, r_{k+1}$ fiind un șir de întregi descrescători, nu poate conține mai mult decât b numere pozitive.

Considerând egalitățile de mai sus și ținând cont de rezultatele de mai sus ne convingem că divizorii comuni ai numerelor a și b sunt aceeași cu divizorii comuni ai numerelor r_0 și r_1 , ai numerelor r_1 și $r_2, \dots$, ai numerelor r_{k-1} și r_k și, în sfârșit, că sunt aceiași cu divizorii numărului r_k . Totodată avem: $(a,b)=(b,r_0)=(r_0,r_1)=\dots=(r_{k-1},r_k)=r_k$.

Ajungem la următoarele concluzii:

1) Mulțimea divizorilor comuni ai numerelor a și b coincide cu mulțimea divizorilor celui mai mare divizor comun al lor.

2) Acest cel mai mare divizor comun al lor este r_k , adică egal cu ultimul rest diferit de zero din algoritmul lui Euclid.

Exemplu. Să se găsească $(525, 231)$, aplicând algoritmul lui Euclid.

	525	:231		
	462	2		$525=231 \cdot 2+63$
231				$231=63 \cdot 3+42$
189	:63			$63=42 \cdot 1+21$
	3			$42=21 \cdot 2$
	63	:42		
	42	1		
42	:21			
42	2			
==				

Ultimul rest fiind $r_4=21$ avem $(525, 231)=21$.

Mai practic, menționăm procedeul uzual (cel puțin în Franța) în cadrul căruia cântările sunt plasate deasupra divizorilor corespunzători.

Exemplu.

	2	3	1	2		
	525	231	63	42	21	0

Deci, $(525, 231)=21$.

Remarcă. În cazul în care ultimul împărțitor este 1, c.m.m.d.c. este 1, numerele sunt prime între ele.

Exemplu. Pentru numerele 616 și 285 avem:

	2	6	5		
	616	285	46	9	1

6. Cel mai mic multiplu comun.

Definiție. Orice întreg divizibil simultan prin întregii $a, b, c, \dots, m$, se numește *multiplu comun* al lor. Cel mai mic dintre multiplii comuni se numește *cel mai mic multiplu comun* (prescurtat c.m.m.m.c) și se notează prin simbolul: $[a, b, c, \dots, m]$.

Teoremă. Cel mai mic multiplu comun a două numere este egal cu produsul lor împărțit prin cel mai mare divizor comun al lor.

Demonstrație. Fie m un multiplu comun oarecare al întregilor a și

b . Avem $m=ak$, unde k este un întreg. Atunci și $\frac{ak}{b}$ este întreg.

Facem notațiile $(a,b)=d$, $a=a_1d$, $b=b_1d$.

Atunci

$$\frac{ak}{b} = \frac{a_1dk}{b_1d} = \frac{a_1k}{b_1} \text{ unde } (a_1, b_1) = 1$$

De aceea, trebuie $b_1 \mid k$, adică $k=b_1t$, unde t este întreg.

Din notații

$$b_1 = \frac{b}{d}, \text{ deci } k = \frac{b}{d}t \text{ ceea ce impune } m = ak = \frac{ab}{d}t$$

Cel mai mic multiplu comun se obține pentru $t=1$, el fiind

$$m = \frac{ab}{d} \quad (1)$$

Remarcă. Algoritmul lui Euclid permite aflarea c.m.m.d.c. fără descompunerea în factori primi, iar relația (1) permite aflarea c.m.m.m.c fără descompunerea în factori primi.

7.Exerciții

1.Să se înlocuiască literele prin cifre, știind că:

a)numărul $\overline{306a}$ este divizibil prin 6;

b)numărul $\overline{71b28c}$ este divizibil prin 45, dar nu prin 2.

2.Într-un anumit moment, planetele Mercur și Venus ocupă o anumită poziție. După cât timp se vor afla în aceeași poziție, știind că Mercur face ocolul Soarelui în timp de 88 de zile, iar Venus în 225 de zile?

3.Determinați numerele naturale n astfel încât:

$$[n, n+1]^{(11n+2, 4n+1)} = 2n^2(n+1)^2$$

4.Determinați numerele de trei cifre care au suma cifrelor 13 și sunt divizibile cu 11.

5.Fie $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ numere în baza 10 astfel încât $\overline{ab} > \overline{cd}$ și $\overline{ab} - \overline{cd} = 10$. Determinați a, b, c, d știind că $25 \mid \overline{abcd}$.

Capitolul IX. Mulțimea numerelor întregi

1. Construcția mulțimii numerelor întregi

Pe $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim relația " $\approx$ " prin:

$$(m, n) \approx (m_1, n_1) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} m + n_1 = m_1 + n \quad \forall m, m_1, n, n_1 \in \mathbb{N}$$

Arătăm că relația " $\approx$ " este o relație de echivalență pe E .

Într-adevăr,

din comutativitatea adunării numerelor naturale:

$$m + n = n + m \Rightarrow (m, n) \approx (m, n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ " $\approx$ " este reflexivă.

Din proprietatea de simetrie a semnului "=":

$$m + n_1 = m_1 + n \Leftrightarrow m_1 + n = m + n_1 \Rightarrow [(m, n) \approx (m_1, n_1) \Rightarrow (m_1, n_1) \approx (m, n)],$$

$$\forall m, n, m_1, n_1 \in \mathbb{N}$$

adică " $\approx$ " este simetrică.

De asemenea avem:

$$[(m, n) \approx (m_1, n_1) \text{ și } (m_1, n_1) \approx (m_2, n_2)] \Rightarrow (m, n) \approx (m_2, n_2) \quad \forall m, n, m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N},$$

deoarece:

$$(m, n) \approx (m_1, n_1) \Leftrightarrow m + n_1 = m_1 + n \quad (*)$$

$$(m_1, n_1) \approx (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \quad (**)$$

Înmulțind (*) cu -1 și adunând la (**) obținem

$$-m - n_1 + m_2 + n_1 = -m_1 - n + m_1 + n_2 \Leftrightarrow -m + m_2 = -n + n_2 \Leftrightarrow m + n_2 = m_2 + n$$

adică $(m, n) \approx (m_2, n_2)$ așadar " $\approx$ " este tranzitivă.

Relația " $\approx$ " definită mai sus, fiind o relație de echivalență determină o împărțire unică a lui $\mathbb{N}^2$ în clase de echivalență. Mulțimea tuturor claselor de echivalență $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \approx$ o notăm cu $\mathbb{Z}$ și o numim mulțimea numerelor întregi. Un element al acestei mulțimi se numește număr întreg.

Teoremă. Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Relația " $\approx$ " are proprietățile:

1⁰) $(m, m) \approx (0, 0)$ pentru orice număr natural m ;

2⁰) $(m, n) \approx (m - n, 0)$ pentru orice $m > n$;

3⁰) $(m, n) \approx (0, n - m)$ pentru orice $n > m$;

Teoremă. Dacă $(m, n) \approx (p, q)$ și $(r, s) \approx (u, v)$ oricare ar fi $m, n, p, q, r, s, u, v \in \mathbb{N}$ atunci:

1) $(m + r, n + s) \approx (p + u, q + v)$

2) $(mr + ns, ms + nr) \approx (pu + qv, pv + qu)$

Demonstrație.

Din $(m+q=p+n \text{ și } r+v=u+s) \Rightarrow m+r+q+v=p+u+n+s$ adică:
 $(m+r, n+s) \approx (p+u, q+v)$

Analog $\Rightarrow 2)$.

Cum $\mathbf{Z}$ este mulțimea claselor de echivalență în raport cu " $\approx$ ", vom nota cu $[m, n]$ numărul întreg determinat de (m, n) .

Consecință. Aplicațiile $+: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, \cdot: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ definite prin

$$[m, n] + [r, s] = [m+r, n+s]$$

respectiv

$$[m, n] \cdot [r, s] = [mr+ns, ms+nr]$$

sunt corect definite.

Astfel și $\cdot$ sunt operații binare pe mulțimea $\mathbf{Z}$ și le numim adunarea respectiv înmulțirea numerelor întregi.

***Teoremă.* $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ este un domeniu de integritate.**

Demonstrație.

1) $(\mathbf{Z}, +)$ este grup abelian.

$\forall m, n, p, q, r, s \in \mathbf{N}$ au loc:

-Asociativitatea:

$$\begin{aligned} [m, n] + ([p, q] + [r, s]) &= [m, n] + [p+r, q+s] = [m+p+r, n+q+s] = \\ &= [m+p, n+q] + [r, s] = ([m, n] + [p, q]) + [r, s] \end{aligned}$$

-Elementul neutru este $[0, 0]$:

$$[m, n] + [0, 0] = [m, n]$$

-Opusul $-[m, n]$ al numărului $[m, n]$ este $[n, m]$ deoarece
 $[m, n] + [n, m] = [m+n, m+n] = [0, 0]$

-Comutativitatea:

$$[m, n] + [p, q] = [m+p, n+q] = [p, q] + [m, n]$$

2) $\cdot$ este asociativă:

$$\begin{aligned} ([m, n] \cdot [p, q]) \cdot [r, s] &= [mp+nq, mq+np] \cdot [r, s] = \\ &= [mpr+nqr+mqs+nps, mps+nqs+mqr+npr] = [m, n] \cdot ([p, q] \cdot [r, s]) \end{aligned}$$

3) Elementul neutru față de $\cdot$ este $[1, 0]$:

$$[m, n] \cdot [1, 0] = [m, n]$$

4) $\cdot$ este comutativă:

$$[m, n] \cdot [p, q] = [mp+nq, mq+np] = [p, q] \cdot [m, n]$$

5) înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$\begin{aligned} [m, n] \cdot ([p, q] + [r, s]) &= [m, n] \cdot [p+r, q+s] = \\ &= [mp+mr+nq+ns, mq+ms+np+nr] = [m, n] \cdot [p, q] + [m, n] \cdot [r, s] \end{aligned}$$

6) Absența divizorilor lui zero:

Fie $[m, n] \cdot [p, q] = [0, 0]$. Presupunem că $m > n$, deci există $u \neq 0$ astfel încât $m = n + u$ de unde $[m, n] = [u, 0]$. Egalitatea inițială devine $[u, 0] \cdot [p, q] = [0, 0]$, adică $up = uq$ de unde $p = q$, adică $[p, q] = [0, 0]$. Am probat faptul că $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ este un domeniu de integritate.

Fie $z=[m,n] \in \mathbf{Z}$. Dacă $m=n$, atunci $z=0$ conform proprietății 1⁰).

Dacă $m < n$, atunci există $p \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $m+p=n$ (în acest caz convenim să notăm $p=n-m$ și astfel $m+(n-m)=n$ iar $z=[0,p]=-[p,0]$ se identifică cu numărul întreg $-p$).

Dacă $n < m$, atunci există $q \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $n+q=m$ și astfel $z=[q,0]$ identificându-se cu numărul natural q .

Ținând cont de acestea putem scrie pe $\mathbf{Z}$ sub forma

$$\mathbf{Z} = (-\mathbf{N}) \cup \mathbf{N} \cup \{0\}$$

unde $-\mathbf{N} = \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Astfel:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +n, \dots\}$$

Mulțimea $-\mathbf{N}$ (respectiv $\mathbf{N}^*$) se notează cu $\mathbf{Z}_-$ (respectiv $\mathbf{Z}_+$) și se numește mulțimea numerelor întregi strict negative (respectiv mulțimea numerelor întregi strict pozitive).

Teoremă. Următoarele afirmații au loc:

$$1) \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$$

2) Orice număr întreg aparține uneia și numai uneia din mulțimile $\mathbf{Z}_-, \mathbf{Z}_+, \{0\}$.

Demonstrație.

- 1) Rezultă din definițiile mulțimilor $\mathbf{Z}_-, \mathbf{Z}_+, \{0\}$.
- 2) Fie $[m,n]$ un număr întreg oarecare și (m,n) un reprezentant al său.

Dacă $(m,n) \approx (p,q)$ și $m > n$, atunci $p > q$, deoarece $m+q=p+n$ și $m+q > n+q \Rightarrow p+n > n+q \Rightarrow p > q$. Deducem că $m > n$ nu depinde de reprezentanți, ci numai de numărul întreg $[m,n]$. Folosindu-ne de mulțimea numerelor naturale, avem sau $m > n$ și atunci $[m,n] \in \mathbf{Z}_+$, sau $m=n$ și atunci $[m,n]=0$ sau $m < n$ și atunci $[m,n] \in \mathbf{Z}_-$, având loc o singură situație.

Observație. Uneori notăm $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$

2. Ordonarea numerelor întregi

Definiție. Se spune că numărul întreg m este mai mic decât numărul întreg n dacă diferența $n-m \in \mathbf{Z}_+$. Vom nota această relație prin semnul $<$ și vom pune $m \leq n$ dacă $m < n$ sau $m=n$.

Teoremă. Mulțimea $(\mathbf{Z}, \leq)$ este total ordonată.

Demonstrație.

Reflexivitatea: $m \leq m \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}$ – adevărat.

Antisimetria: $(m \leq n \text{ și } n \leq m) \Rightarrow m=n, \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}$ – adevărat deoarece:

$$m \leq n \Rightarrow n-m \in \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow k_1 \in \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \text{ astfel încât } n-m=k_1$$

$$n \leq m \Rightarrow m-n \in \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow k_2 \in \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \text{ astfel încât } m-n=k_2$$

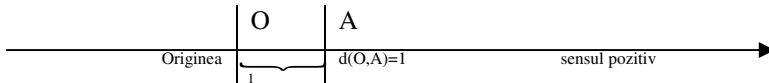
Relații care conduc la $k_1+k_2=0 \Leftrightarrow k_1=k_2=0 \Rightarrow m=n$.

Tranzitivitatea: exercițiu !

Relația de ordine $\leq$ este totală – adevărat deoarece:

Pentru m, n numere întregi, deducem din rezultatele de mai sus că numărul întreg $m-n$ aparține fie lui $\mathbf{Z}$, fie lui $\mathbf{Z}_+$, fie lui $\{0\}$, dar numai uneia dintre aceste mulțimi disjuncte. Dacă acest număr aparține lui $\mathbf{Z}_+$ atunci $n < m$. Dacă el este zero, atunci $m = n$. Dacă acest număr aparține lui $\mathbf{Z}$ atunci $n > m$.

Axa numerelor întregi. Axa numerelor este o dreaptă pe care fixăm un punct O (numit origine), un sens pozitiv (indicat de săgeată) și o unitate de măsură.



$d(O,A)$ reprezintă lungimea segmentului cuprins între O și A , fiind aleasă ca unitate de măsură.

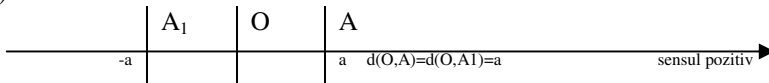
Definiție. Distanța măsurată pe axa numerelor între origine și punctul corespunzător numărului întreg a se numește *modulul* lui a și se notează $|a|$. Spunem că a este abscisa punctului respectiv.

Teoremă. Următoarele afirmații sunt adevărate:

- 1) Pentru orice număr întreg a $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| = 0$ atunci și numai atunci când $a = 0$;
- 3) Pentru orice $a \in \mathbf{Z}$: $|-a| = |a|$
- 4) $|a| = \begin{cases} -a & \text{dacă } a < 0 \\ 0 & \text{dacă } a = 0 \\ a & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$

Demonstrație.

3)



Definiție. Două numere întregi se numesc *opuse* dacă sunt abscisele a două puncte simetrice de pe axa numerelor.

Dacă $a \in \mathbf{Z}$, notăm opusul lui a cu $-a$.

Exemplu. Opusul lui 20 este -20 ; opusul lui -10 este 10;

Teoremă. (Împărțirea numerelor întregi). Oricare ar fi $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}$ astfel încât $a = bq + r$ și $0 \leq r < |b|$.

Demonstrație.

Fie $A = \{a - qb \mid q \in \mathbf{Z}\}$ care evident conține și numere naturale. Fie acum $r = a - qb$ cel mai mic număr natural din A (cu $q \in \mathbf{Z}$). Avem $0 \leq r < |b|$ căci

dacă $r=a-qb \geq b$ am $0 \leq a-(q+1)b < r$, în contradicție cu r cel mai mic număr natural din A .

Observație. Numerele q, r cu proprietatea de mai sus poartă numele de câtul, respectiv restul împărțirii lui a la b , și sunt unice cu proprietatea respectivă. Într-adevăr, dacă am mai avea $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = bq_1 + r_1$ și $0 \leq r_1 < |b|$, atunci $bq + r = bq_1 + r_1$ care se mai scrie $b(q - q_1) = r_1 - r$, adică $b \mid (r_1 - r)$. Din $0 \leq r_1 < |b|$, cu presupunerea că $r_1 > r$, deducem $r_1 - r < |b|$, iar condiția $b \mid (r_1 - r)$ implică $r_1 - r = 0$ și de aici $r_1 = r$ și $q = q_1$.

Spunem că dacă a, b sunt numere întregi cu $b \neq 0$, câtul dintre a și b , notat $a:b$, este acel număr întreg q , în cazul în care el există, pentru care $a = bq$. Numărul a se numește deîmpărțit iar b împărțitor.

3. Divizibilitate pe $\mathbb{Z}$.

Definiție. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, spunem că a divide b (scriem $a \mid b$) dacă există $c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b = ac$.

Observație. Ca și în cazul lui $\mathbb{N}$ nu vom defini, nici în cazul lui $\mathbb{Z}$ divizibilitatea prin 0.

Numerele prime din $\mathbb{Z}$ se definesc ca fiind acele numere întregi p cu proprietatea că $p \neq -1, 0, 1$ iar singurii divizori ai lui p sunt $-1, 1, p, -p$. Deducem că numerele prime din $\mathbb{Z}$ sunt numerele de forma $-p, +p$, cu p număr prim în $\mathbb{N}$.

***Teoremă.* Fie a, b, c numere întregi. Atunci:**

1) $a \mid a$;

2) Dacă $(a \mid b$ și $b \mid a)$ atunci $(a=b$ sau $a=-b)$ adică relația de divizibilitate nu este antisimetrică;

3) Dacă $(a \mid b$ și $b \mid c)$ atunci $a \mid c$.

Demonstrăm spre exemplu 2):

- din $a \mid b$ deducem că există c număr întreg astfel încât $b = ac$ (1)

- din $b \mid a$ deducem că există k număr întreg astfel încât $a = bk$ (2)

Prin înmulțirea relațiilor (1) și (2) deducem că $ba = abck$ care prin simplificare devine $ck = 1$. Produsul a două numere întregi fiind 1 deducem că avem $(c=1$ și $k=1)$ sau $(c=-1$ și $k=-1)$ adică se verifică 2).

4. Exerciții

1. Suma mai multor numere întregi consecutive este 23. Aflați câte numere sunt dacă numerele pozitive sunt cu două mai multe decât numerele negative.

2. Să se afle cel mai mare număr întreg negativ x pentru care $441 \cdot x = n^3$.

3. Fie $n-2; n-1; n; n+1; n+2$ patru numere întregi.

a) Să se determine valorile pe care le poate lua suma lor în cazul când produsul lor este zero.

b) Să se determine valoarea produsului acestor numere în cazul în care suma lor este zero.

4. Este adevărată reciproca propoziției:

“Oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbf{Z}$ atunci $a+b$ și $a-b \in \mathbf{Z}$ ”?

5. Determinați perechile de numere întregi (x, y) cu $x \neq 0, y \neq 0$, pentru care $2 \leq x^2 + y^2 \leq 13$

Capitolul X. Mulțimea numerelor raționale

1. Construcția mulțimii Q

Notăm

$$E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ și } q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Pe mulțimea E definim relația " $\approx$ " prin:

$$(p, q) \approx (p_1, q_1) \stackrel{def}{\iff} pq_1 = qp_1$$

Teoremă. Relația " $\approx$ " este o relație de echivalență.

Demonstrație.

Reflexivitatea: $(m, n) \approx (m, n), \forall (m, n) \in E;$

Adevărat, din comutativitatea înmulțirii numerelor naturale $(m \cdot n = n \cdot m)$.

Simetria: $(m, n) \approx (m_1, n_1) \Rightarrow (m_1, n_1) \approx (m, n), \forall (m, n), (m_1, n_1) \in E;$

Din proprietatea de simetrie a semnului "=":

$$m \cdot n_1 = m_1 \cdot n \Leftrightarrow m_1 \cdot n = m \cdot n_1 \Rightarrow (m, n) \approx (m_1, n_1) \Rightarrow (m_1, n_1) \approx (m, n)$$

Tranzitivitatea:

$$[(p, q) \approx (p_1, q_1) \text{ și } (p_1, q_1) \approx (p_2, q_2)] \Rightarrow (p, q) \approx (p_2, q_2), \forall (p, q), (p_1, q_1), (p_2, q_2) \in E;$$

Într-adevăr,

$$(p, q) \approx (p_1, q_1) \Leftrightarrow pq_1 = qp_1 \quad (c)$$

$$(p_1, q_1) \approx (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1q_2 = q_1p_2 \quad (d)$$

Prin înmulțirea membru cu membru a relațiilor (c), (d) obținem $pq_1p_1q_2 = qp_1q_1p_2$, relație care simplificată prin p_1q_1 conduce la:

$$pq_2 = qp_2 \stackrel{def}{\iff} (p, q) \approx (p_2, q_2)$$

În concluzie " $\approx$ " este o relație de echivalență.

Relația " $\approx$ " determină pe mulțimea E, clase de echivalență.

Pentru $(p, q) \in E$ notăm prin $\frac{p}{q}$ clasa sa de echivalență în $E / \approx$.

Mulțimea tuturor claselor de echivalență determinate de mulțimea E în raport cu relația de echivalență " $\approx$ " se notează prin Q.

Deci:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* / \approx = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z} \text{ și } q \in \mathbf{Z}^* \right\}$$

Exemplu. În clasa $\frac{3}{5}$ se află toate perechile (p, q) , astfel încât $(p, q) \sim (3, 5) \Leftrightarrow p \cdot 5 = q \cdot 3$ cu $p \in \mathbf{Z}$ și $q \in \mathbf{Z}^*$, adică perechile $(6, 10)$; $(9, 15)$; $(12, 20)$; ...

Un element din $\mathbf{Q}$ îl numim număr rațional.

Perechile (p, q) aflate în relația de echivalență definită, le numim fracții și le notăm tot prin $\frac{p}{q}$.

Proprietățile aritmetice ale mulțimii $\mathbf{Z}$ ne permit să identificăm orice număr întreg n cu numărul rațional $\frac{n}{1}$. Prin urmare avem șirul de incluziuni $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Deci, mulțimea numerelor raționale este de fapt o extindere a mulțimii $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi.

Definiție. Numărul întreg q se numește *numitor* iar numărul întreg p se numește *numărător*. Linia orizontală " - " se numește *linie de fracție*. Dacă $p < q$ fracția se numește *subunitară*. Dacă $p > q$ fracția se numește *supraunitară*. În cazul $p = q$ fracția se numește *echiunitară*.

Definiție. Dacă $p \cdot q > 0$, p, q sunt numere întregi atunci $\frac{p}{q}$ se numește *număr rațional pozitiv* iar mulțimea lor se notează prin $\mathbf{Q}_+$, iar dacă $p \cdot q < 0$ atunci $\frac{p}{q}$ se numește *număr rațional negativ* iar mulțimea lor se notează prin $\mathbf{Q}_-$.

2. Egalitatea fracțiilor.

Fie $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ fracții. Spunem că $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ dacă $p \cdot s = r \cdot q$.

Exemplu.

$$\frac{3}{4} = \frac{1+1+1}{3+1} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{4-1}{5-1};$$

Teoremă. Egalitatea fracțiilor este o relație de echivalență.

Demonstrație.

Reflexivitatea: $\frac{p}{q} = \frac{p}{q}, \forall p \in \mathbb{Z} \text{ și } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q} \text{ deoarece } p \cdot q = q \cdot p$$

Simetria: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{p}{q}, \forall p, r \in \mathbb{Z} \text{ și } q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$

$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \text{ deoarece } p \cdot s = r \cdot q \Rightarrow r \cdot q = p \cdot s$

Tranzitivitatea: $\left(\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \text{ și } \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \right) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{m}{n}, \forall p, r, m \in \mathbb{Z} \text{ și }$

$q, s, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow p \cdot s = r \cdot q \quad (\text{e})$$

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} \Rightarrow r \cdot n = m \cdot s \quad (\text{f})$$

Din (e) și (f) obținem

$$psrn = rqms.$$

Împărțind prin sr pentru $r \neq 0$ obținem $pn = qm$, adică $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

Observăm că și în cazul $r = 0$ proprietatea rămâne adevărată.

3. Amplificarea fracțiilor.

A amplifica o fracție înseamnă a înmulți și numitorul și numărătorul prin același număr natural diferit de 1. Simbolic vom scrie:

$$\overset{n)}{\frac{p}{q}} = \frac{n \cdot p}{n \cdot q}; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Exemplu.

$$\begin{array}{l} 3) \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{12}{9} \\ 2) \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} \end{array}$$

4. Simplificarea fracțiilor.

A simplifica o fracție înseamnă a împărți și numitorul și numărătorul prin același număr natural diferit de 1 (atunci când este posibil).

Simbolic vom scrie:

$$\frac{p}{q} \stackrel{(n)}{=} \frac{p:n}{q:n}; \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Exemplu.

$$\begin{array}{l} \frac{9}{15} \stackrel{(3)}{=} \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5} \\ \frac{20}{25} \stackrel{(5)}{=} \frac{20:5}{25:5} = \frac{4}{5} \end{array}$$

Observație. Prin amplificarea și simplificarea unei fracții se obține o nouă fracție *egală* cu cea inițială.

Definiție. O fracție ce nu poate fi simplificată se numește *ireductibilă*.

Teoremă. Fracția $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ și $q \in \mathbb{Z}^*$), este ireductibilă dacă și

numai dacă $(p, q) = 1$.

Demonstrație.

-dacă $\frac{p}{q}$ este ireductibilă atunci nu există $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ astfel încât

$n \mid p$ și $n \mid q$ ceea ce conduce la $(p, q) = 1$.

-dacă $(p, q) = 1$ și există $d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d \mid p$, $d \mid q$ atunci $d \mid 1$,

deci $\frac{p}{q}$ este ireductibilă.

5. Relația de ordine pe mulțimea fracțiilor.

Fie $x = \frac{p}{q}$ cu $p \in \mathbf{Z}$ iar $q \in \mathbf{Z}^*$. Observăm că în cazul $q < 0$, putem

scrie $x = \frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$ și deci orice $x \in \mathbf{Q}$, se scrie sub forma $x = \frac{r}{s}$ cu $s = -q > 0$ (adică $s \in \mathbf{N}^*$).

Definiție. Fie $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, $\forall p, r \in \mathbf{Z}$ și $q, s \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

Definim pe $\mathbf{Q}$ relația " $\leq$ " prin $x \leq y \Leftrightarrow ps - qr \leq 0$.

Teoremă. Relația " $\leq$ " este relație de ordine totală pe $\mathbf{Q}$.

Demonstrație.

1) " $\leq$ " este reflexivă: $x \leq x$, $\forall x \in \mathbf{Q}$;

Fie $x = \frac{p}{q}$. Avem că $\frac{p}{q} \leq \frac{p}{q} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \cdot q - q \cdot p \leq 0$ ultima relație

fiind adevărată deducem că " $\leq$ " este reflexivă.

2) " $\leq$ " este antisimetrică: $(x \leq y \text{ și } y \leq x) \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in \mathbf{Q}$.

Într-adevăr,

Fie $x = \frac{p}{q}$ și $y = \frac{r}{s}$. Avem :

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \cdot s - r \cdot q \leq 0 \quad (\text{g})$$

$$\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} r \cdot q - p \cdot s \leq 0 \quad (\text{h})$$

Din relațiile (g) și (h) avem că $ps - rq = 0 \Leftrightarrow ps = rq \Leftrightarrow x = y$, deducem că " $\leq$ " este antisimetrică.

3) " $\leq$ " este tranzitivă: $(x \leq y \text{ și } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$, $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}$

Alegem în plus $z = \frac{m}{n}$ cu $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x \leq y$ și $y \leq z$, adică

$$ps - rq \leq 0 \text{ și } rn - ms \leq 0.$$

Cum $q, s, n \in \mathbf{N}^*$ deducem că $[(ps - rq)n \leq 0 \text{ și } (rn - ms)q \leq 0]$, adică $[psn - rqn \leq 0 \text{ și } rnq - msq \leq 0]$, deci $psn - msq \leq 0 \Leftrightarrow s(pn - mq) \leq 0 \Leftrightarrow pn - mq \leq 0 \Leftrightarrow x \leq z$, adică " $\leq$ " este tranzitivă.

Din 1), 2) și 3) deducem că " $\leq$ " este o relație de ordine pe $\mathbf{Q}$.
Faptul că relația " $\leq$ " este totală pe $\mathbf{Q}$ rezultă din aceea că ordinea naturală " $\leq$ " de pe $\mathbf{Z}$ este totală.

Observație.

$$q > 0, \frac{p}{q} > \frac{p'}{q} \Rightarrow p > p'$$

6.Operații fundamentale cu fracții.

Teoremă.

Fie $p, r, m, u \in \mathbf{Z}$ și $q, s, n, v \in \mathbf{Z}^*$ cu $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ și $\frac{m}{n} = \frac{u}{v}$.

Atunci
$$\frac{pn + mq}{nq} = \frac{rv + su}{sv} \text{ și } \frac{pm}{qn} = \frac{ru}{sv}.$$

Demonstrație.

Avem că $ps=rq$ și $mv=nu$ astfel că:

$$\frac{pn + mq}{nq} = \frac{rv + su}{sv} \Leftrightarrow$$

$$(pn+mq)sv=(rv+su)nq \Leftrightarrow pnsv+mqsv=rvnq+sunq \Leftrightarrow mqs v- sunq=rvnq- pns v \Leftrightarrow (mv-un)sq=(rq-ps)nv, \text{ adevărat deoarece } ps=rq \text{ și } mv=nu.$$

Prin înmulțirea membru cu membru a relațiilor $ps=rq$ și $mv=nu$

obținem: $psmv=nurq \Leftrightarrow \frac{pm}{qn} = \frac{ru}{sv}$

Aceast rezultat ne sugerează că $\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbf{Q}$ operațiile de adunare (+) și înmulțire ($\cdot$) definite prin prin:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs} \text{ și } \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

sunt corect definite.

Exemplu.

$$1) \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{26}{21}$$

$$2) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$$

7. Proprietățile adunării fracțiilor.

a) Adunarea este comutativă:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$$

b) Adunarea este asociativă:

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right)$$

c) Existența elementului neutru:

$$\exists \frac{0}{b} \in Q \text{ astfel încât } \forall \frac{a}{b} \in Q \text{ să avem:}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{0}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b};$$

d) Opusul unui număr rațional:

$$\forall \frac{a}{b} \in Q, \exists \left(-\frac{a}{b}\right) \in Q \text{ astfel încât:}$$

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = 0$$

Numărul $\frac{0}{b}$ s-a considerat 0.

8. Proprietățile înmulțirii fracțiilor

a) Înmulțirea este comutativă:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$$

b) Înmulțirea este asociativă:

$$\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}\right)$$

c) Elementul neutru:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

d) Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}$$

e) Inversul unui număr rațional:

$$\frac{p}{q} \neq 0, \text{ atunci } \frac{q}{p} \neq 0 \text{ are proprietatea } \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1$$

Deci, inversul lui $\frac{p}{q}$ este $\frac{q}{p}$.

Ce structură algebrică are $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$?

9. Împărțirea fracțiilor.

Definiție. Frația $\frac{q}{p}$ se numește *inversa* fracției $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}^*$.

Definiție. Împărțirea fracției $\frac{p}{q}$ prin $\frac{r}{s}$ ($s, q \neq 0$) este produsul

dintre $\frac{p}{q}$ și inversa fracției $\frac{r}{s}$.

Scriem:

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}$$

Exemplu.

$$\frac{7}{5} : \frac{2}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{10}$$

Observație. Relația de echivalență " $\approx$ " definită pe mulțimea fracțiilor ne permite să extindem toate rezultatele și în cazul mulțimii numerelor raționale.

Scrierea sub formă de numere zecimale.

Definiție. O fracție al cărei numitor este 10, 100, 1000 . . . , în general 10^n cu n număr natural oarecare se numește *fracție zecimală*.

O fracție zecimală este egală cu numărul zecimal care se obține astfel: se despart de la numărător, de la dreapta spre stânga atâtea cifre zecimale câte zerouri are numitorul. Dacă numărul cifrelor de la numărător este mai mic decât numărul zerourilor de la numitor, completăm cu zerouri adăugate la stânga.

Numărul $\frac{5}{10}$ (reprezintă 5 zecimi) îl notăm cu 0,5

Numărul $\frac{456}{1000}$ (reprezintă 456 miimi) îl notăm cu 0,456.

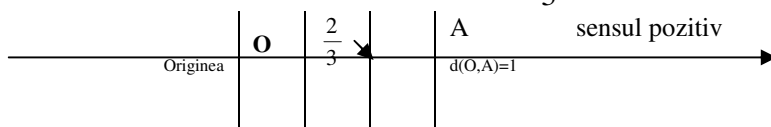
10.Reprezentarea pe axă a numerelor raționale.

Am văzut că axa numerelor este o dreaptă pe care fixăm un punct O (numit origine), un sens pozitiv (se indică printr-o săgeată) și o unitate de măsură.

A reprezenta pe axă un număr rațional, înseamnă:

- reprezentarea pe axă a numitorului;
- numărarea atâtea părți din numitor cât este numărătorul, de la origine spre direcția în care a fost reprezentat numitorul;
- figurarea în desen a numărului rațional în dreptul ultimei părți de la pasul precedent.

Să reprezentăm pe o axă numărul rațional $\frac{2}{3}$.



Analog cum s-a definit modulul pentru numere întregi, se definește și pentru numere raționale.

11.Operații de grad superior cu numere raționale.

Ridicarea la putere. În general, pentru numere întregi pozitive n

avem:

Putere	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factori } a, n > 0, \text{ întreg}} = a^n$	<i>Se citește ca a n-a putere a lui a, sau a la puterea n.</i>
--------	---	--

- a se numește bază,
- n se numește exponent

Ridicarea la putere reprezintă o înmulțire repetată a aceluiași număr. Este operație de gradul 3.

Deoarece $0 \cdot 0 = 0$, avem

$$0^n = 0$$

Asemenea, $1 \cdot 1 = 1$, deci

$$1^n = 1$$

Puteri a căror bază este cuprinsă între 0 și 1 devin mai mici la o

$$\text{majorare a exponentului: } \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \dots$$

Puterea unui număr negativ va avea o valoare pozitivă în cazul unui exponent par și o valoare negativă în cazul unui exponent impar.

Înmulțirea și împărțirea puterilor.

a) puteri cu același exponent. Din $(ab)^n = ab \cdot ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab$ (n factori) și aplicând proprietatea de comutativitate a înmulțirii deducem că

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ factori}} = a^n \cdot b^n.$$

$$\text{Reținem deci că } (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Analog, ridicarea la putere a unei fracții:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

b) puteri cu aceeași bază. Înmulțirea. Conform definiției puterii avem:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ factori}}$$

$$\text{Deci } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Împărțirea. Deoarece fiecare împărțire poate fi exprimată printr-o fracție, obținem la $a^m : a^n$ o fracție cu m factori a la numărător și n factori a la numitor.

Prin simplificare,

- dacă $m > n$, după simplificare vor rămâne $m-n$ factori a la numărător,
- dacă $m < n$, după simplificare vor rămâne $n-m$ factori a la numitor iar numărătorul va deveni 1,
- dacă $m=n$, după simplificare rezultatul va fi 1.

Așadar:

$m > n :$	$a^m : a^n = a^{m-n}$
$m < n :$	$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$
$m = n :$	$a^m : a^n = 1$

Dezvoltarea noțiunii de putere	$a^0 = 1$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
--------------------------------	-----------	--------------------------

Ridicarea la o putere a unei puteri. Pentru a calcula puterea unei puteri

$(a^m)^n$ avem: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \times n \text{ factori}}$. Deci,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Rădăcina pătrată. Prin rădăcina pătrată $x = \sqrt{a}$, din numărul nenegativ a înțelegem numărul nenegativ x , care înmulțit cu el însuși dă o valoare egală cu a .

$$x = \sqrt{a} \Rightarrow a = x^2$$

Deoarece rădăcina pătrată este operație inversă ridicării la putere vom putea stabili următoarele: rădăcina pătrată a unui număr format din $2n$ și $2n-1$ cifre va fi un număr format din n cifre.

Algoritmul extragerii rădăcinii pătrate. Împărțim cifrele numărului de sub radical în grupe de două cifre pornind de la virgulă și spre stânga și spre dreapta. Rezultatul va avea înaintea virgulei tot atâtea cifre câte grupe sunt înaintea virgulei, iar după virgulă tot atâtea cifre câte grupe sunt după virgulă.

De exemplu:

$$\sqrt{44\,44\,48,88\,89}$$

va fi un număr zecimal cu partea întreagă formată din 3 cifre, iar partea fracționară din 2 cifre.

$\sqrt{4\,41}$ va fi un număr de două cifre, adică de forma $a+b$, unde a este un multiplu de 10. Deci:

$\sqrt{4\,41} = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$. Această egalitate se folosește la extragerea rădăcinii pătrate făcând întâi scăderea lui a^2 și apoi a lui $b(2a+b)$:

$$\begin{array}{r} \sqrt{441} = \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 21 \\ \hline a+b \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{|c|} \hline -a^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -400 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 41 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{r} \begin{array}{|c|} \hline -b(2a+b) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -41 \\ \hline \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

Analog se calculează o rădăcină pătrată care va avea trei, patru ... cifre. Exemplificăm pentru 3 cifre:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5745,64} = \sqrt{70^2 + 5^2 + 0,8^2} = \sqrt{75,8^2} \\ -a^2 \quad -4900 \\ \hline 845 \\ -b(2a+b) \quad -725 \\ \hline 120,64 \\ -c(2a+2b+c) \quad -120,64 \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

În continuare, prezentăm proprietățile radicalilor de ordinul 2.

$$1. \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Operații cu radicali.

Scoaterea unui factor de sub semnul radical: se descompune numărul de sub radical în factori și se aplică proprietatea 1.

Introducerea unui factor sub semnul radical: Se introduce sub semnul radical puterea a 2-a a factorului.

Raționalizarea numitorului. Este operația de eliminare a radicalilor de la numitorul fracțiilor, prin amplificarea fie cu radicalul de la numitor, fie cu conjugatul numitorului.

Expresia $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ are conjugat expresia $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

12.Exerciții

1. Aduceți la o formă mai simplă expresia:

$$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{100^2 - 1} =$$

2.Să se simplifice fracția:

$$\frac{4+8+12+\dots+4\cdot n}{3+6+9+\dots+3\cdot n}$$

3. Arătați că $S=n+1+2(1+2+3+\dots+n)$ este pătrat perfect.

4. Să se determine numărul natural n pentru care numărul

$$p = \sqrt{\frac{n+6}{n-2}}$$
 este număr natural.

5. Calculați:

$$\left[\left(-\frac{1}{3} \right)^{n+2} - \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right] \cdot (-3^n), \text{ unde } n \in \mathbf{N}.$$

Capitolul XI. Frații zecimale

Frații zecimale finite. Fie $p = \overline{p_1 \dots p_s}$ scrierea zecimală a numărului natural p și $\frac{p}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ fracție.

Folosind operațiile din sistemul zecimal și operațiile cu fracții putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{p}{10^n} &= \frac{\overline{p_1 p_2 \dots p_s}}{10^n} = \frac{p_1 \cdot 10^{s-1} + p_2 \cdot 10^{s-2} + \dots + p_{s-1} \cdot 10 + p_s}{10^n} = \\ &= \frac{p_1 \cdot 10^{s-1}}{10^n} + \frac{p_2 \cdot 10^{s-2}}{10^n} + \dots + \frac{p_{s-1} \cdot 10}{10^n} + \frac{p_s}{10^n} = \frac{p_1}{10^{n-s+1}} + \dots + \frac{p_s}{10^n} \end{aligned}$$

În continuare:

$$\frac{p}{10^n} = \begin{cases} \overline{p_1 p_2 \dots p_i, p_{i+1} p_{i+2} \dots p_s}, & \text{daca } s - n = i \\ 0, \underbrace{0 \dots 0}_{i\text{-ori}} \overline{p_1 p_2 \dots p_s}, & \text{daca } n - s = i \end{cases}$$

și spunem că fracția $\frac{p}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ este sub formă de fracție zecimală finită.

Exemple.

$$\frac{4563789}{10^2} = 45637,89; \text{ deoarece } n = 2 \text{ iar } s = 7$$

$$\frac{23456}{10^5} = 0,23456; \text{ deoarece } n = 5 \text{ iar } s = 5$$

Observații.

1) Grupul de cifre aflat în stânga virgulei se numește *partea întreagă* a fracției, iar cel aflat în dreapta se numește *partea fracționară* a sa.

2) În scrierea unei fracții zecimale finite avem atâtea cifre după virgulă câte unități are exponentul lui 10 în fracția $\frac{p}{10^n}$.

Teoremă. Dacă numitorul unei fracții are ca factor prim numai pe 2 sau pe 5 atunci fracția admite scrierea zecimală cu un număr finit de cifre după virgulă.

Demonstrație.

Fie $\frac{p}{q}$ o fracție cu numitorul de forma $2^i \cdot 5^k$; $i, k \in \mathbb{N}$.

Prin amplificarea fracției obținem:

$$\frac{p}{2^i \cdot 5^k} = \begin{cases} \frac{a \cdot 5^{i-k}}{10^i}, & i \geq k \\ \frac{a \cdot 2^{k-i}}{10^k}, & k > i \end{cases}$$

relații care conduc la demonstrarea teoremei.

Exemplu.

$$\frac{7}{50} = \frac{7}{5^2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 2}{10^2} = \frac{14}{10^2} = 0,14$$

$$\frac{11}{16} = \frac{11}{2^4} = \frac{11 \cdot 5^4}{10^4} = \frac{11 \cdot 625}{10^4} = \frac{6875}{10^4} = 0,6875$$

Întrucât numerele zecimale reprezintă doar notații pentru numere cunoscute, proprietățile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire sunt cele arătate la numerele naturale, întregi și cele fracționare.

Exemplu.

$$1,678 + 22,34 = \frac{1678}{1000} + \frac{2234}{100} = \frac{1678 + 22340}{1000} = \frac{24018}{1000} = 24,018$$

Acest exemplu ne conduce la scrierea unele sub altele: unități sub unități, zeci sub zeci, . . . , zecimi sub zecimi, sutimi sub sutimi etc..	$ \begin{array}{r} 1,678+ \\ 22,34 \\ \hline 24,018 \end{array} $
---	--

$$1,678 \times 22,34 = \frac{1678}{1000} \times \frac{2234}{1000} = \frac{3748652}{1000000} = 3,748652$$

Se observă că înmulțirea fracțiilor zecimale finite se bazează pe următorul raționament: -se înmulțesc numerele ca și când nu ar avea virgule, apoi la rezultat punem virgula despărțind de la dreapta spre stânga atâtea cifre zecimale câte au avut deînmulțitul și înmulțitorul împreună.	$ \begin{array}{r} 1,678 \times \\ 2234 \\ \hline 6712+ \\ 5034 \\ \hline 3356 \\ 3356 \\ \hline 3,748652 \end{array} $
--	--

Considerăm împărțirea $67,32:3,7$. Scriind numerele date sub formă de fracții, avem:

$$67,32:3,7 = \frac{6732}{100} : \frac{37}{10} = \frac{6732 \cdot 10}{100 \cdot 37} = \frac{6732}{370}$$

Concluzionăm că împărțirea fracțiilor zecimale finite se reduce la o împărțire în $\mathbb{N}$

Se desprinde astfel următoarea regulă:

-pentru a împărți un număr zecimal la un număr întreg, procedăm la fel ca la împărțirea numerelor naturale, punem virgula la cât în momentul când coborâm la rest cifra zecimilor. Dacă este nevoie partea zecimală a deîmpărțitului o completăm cu zerouri, pentru a putea scoate cifre zecimale mai multe la cât.

-pentru a împărți un număr (întreg sau zecimal) la un număr zecimal, înmulțim și deîmpărțitul și împărțitorul cu 10 dacă împărțitorul are o zecimală, cu 100 dacă el are 2 zecimale, cu 1000 dacă are 3 zecimale etc.; în acest fel obținem o împărțire la care împărțitorul este număr întreg și care are același cât ca și împărțirea dată.

Fracții zecimale infinite.

Teoremă. Orice fracție $\frac{p}{q}$ ireductibilă și subunitară pentru

care numitorul se află în una din situațiile:

a) $(q,10)=1$;

b) există a prim diferit de 2 și 5 cu $(q,a) \neq 1$ și $(q,10) \neq 1$

nu se poate scrie sub formă de fracție zecimală finită.

Demonstrație.

Să presupunem că

$$\frac{p}{q} = 0, \overline{p_1 p_2 \dots p_s}, \text{ deci } \frac{p}{q} = \frac{\overline{p_1 p_2 \dots p_s}}{10^s} \text{ care este}$$

$$\text{echivalent cu } p \cdot 10^s = q \cdot \overline{p_1 p_2 \dots p_s} \Rightarrow q \mid p \cdot 10^s. \text{ Din } (q,10) = 1$$

deducem q nu este *divizor* al lui 10.

Am obținut astfel o contradicție. În concluzie există fracții care nu pot fi scrise sub formă de fracție zecimală finită.

Fracțiile zecimale care nu se pot scrie sub formă de fracție zecimală finită se numesc fracții zecimale infinite și se notează prin:

$$p_1 p_2 p_3 \dots$$

Exemplu. Frația $\frac{1}{7}$ nu poate fi scrisă sub formă de fracție

zecimală finită. Se observă că $(7,10)=1$ iar după teorema de mai sus deducem că $\frac{1}{7}$ nu poate fi scrisă ca fracție zecimală finită.

1. Frații zecimale periodice.

Fie fracția $\frac{p}{q}$ ireductibilă și subunitară în care numitorul satisface

una din condițiile teoremei precedente. Din teorema împărțirii cu rest pentru p și q se obțin cel mult $q-1$ resturi nenule $r_1, r_2, \dots, r_{q-1}$. Deoarece produsul acestor resturi este diferit de zero rezultă că algoritmul împărțirii lui a la b se continuă la infinit. Mulțimea $\{r_1, r_2, \dots, r_{q-1}\}$ fiind finită deducem că unele resturi se vor repeta periodic, rezultat care spune că există cifre care se repetă după cât.

Fie acum $p_0 p_1 p_2 p_3 \dots$ o fracție zecimală infinită cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $p_{a+m} = p_a, \forall a \geq n$. Mulțimea tuturor fracțiilor cu această proprietate alcătuiește o nouă clasă de fracții, numită clasa *fracțiilor zecimale periodice*.

Vom nota fracțiile zecimale periodice prin:

$$\overline{p_0, p_1 \dots p_{n-1}} \overline{\overline{p_n \dots p_{n+a-1}}}$$

Secvența $p_n p_{n-1} \dots p_{n+p-1}$ se numește *perioada* fracției zecimale.

Distingem două cazuri:

I. pentru $n=1$ perioada începe după virgulă iar fracția se numește fracție zecimală periodică *simplă*;

II. pentru $n>1$ spunem că fracția este fracție periodică *mixtă*.

2. Frații periodice simple.

Teoremă . Dacă $(q,10)=1$ fracția $\frac{p}{q}$ este periodică simplă.

Demonstrație.

Prin împărțirea lui p la q obținem aceleași resturi care se obțin prin împărțirea la q a numerelor:

$$p; \quad p \cdot 10; \quad p \cdot 10^2 \dots p \cdot 10^{q-1}; \quad p \cdot 10^q; \dots \quad (a)$$

Fie $r_p; \quad r_1; \quad r_2; \quad \dots \quad r_{q-1}; \quad r_q$; șirul resturilor (dacă $q < p, r_q = q$). Fie $p \cdot 10^{a+m}$ și $p \cdot 10^m$ două numere din șirul (a) care dau același rest prin împărțirea la q , deci $p \cdot 10^{a+m} - p \cdot 10^m = 10^m(p \cdot 10^a - p) = q \cdot k$ cu k număr natural. Cum $(q,10)=1$ deducem că $q \mid (p \cdot 10^a - p)$, iar din definiția relației " $\mid$ " deducem că $p \cdot 10^a - p = q \cdot k'$ cu k' număr natural. Ultima relație arată că există a astfel încât $p \cdot 10^a$ și p dau același rest prin împărțirea la q .

Concluzia este că printre resturile parțiale găsim repetat și primul rest. Dacă fracția ar fi periodică mixtă, primul rest care se repetă ar fi r_q , ci nu r_1 , sau $r_2, \dots$ sau r_i ($i \geq 2$), adică în șirul resturilor parțiale nu ar mai reapărea niciodată restul r_q . Deci fracția este periodică mixtă.

3. Frații periodice mixte.

Teoremă. Fie $\frac{p}{q}$ o fracție cu $q=2^i \cdot 5^j \cdot q_1$, unde $(q_1,10)=1$. În aceste

ipoteze $\frac{p}{q}$ se transformă în fracție zecimală periodică mixtă.

Demonstrație. Dacă $i > j$, avem

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^i \cdot 5^j \cdot q_1} = \frac{q \cdot 5^{i-j}}{10^n q_1} = \frac{1}{10^n} \cdot \frac{q \cdot 5^{i-j}}{q_1}$$

unde n este cel mai mare dintre i și j .

Fracția

$$\frac{q \cdot 5^{i-j}}{q_1}$$

conform teoremei din subcapitolul precedent, se transformă în fracție zecimală periodică simplă.

Prin înmulțirea cu $\frac{1}{10^n}$ se mută virgula spre stânga peste n cifre.

Aceste n cifre formează *partea periodică*.

Analog se tratează cazul $i < j$ (se amplifică cu 2^{j-i}).

Observăm că fracțiile periodice mixte se deduc din cele simple.

Se poate demonstra că orice număr rațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală infinită periodică, care nu are perioada 9, de asemenea că orice fracție zecimală periodică, care are perioada diferită de 9, reprezintă un număr rațional, care se obține prin algoritmul de împărțire.

4. Trecerea de la scrierea zecimală la scrierea cu linie de fracție

a) Transformarea fracțiilor zecimale finite.

Exemplu.

$$0,53 = \frac{5}{10} + \frac{3}{100} = \frac{50 + 3}{100} = \frac{53}{100}$$

$$5,32 = 5 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} = 5 + \frac{30 + 2}{100} \stackrel{\text{not}}{=} 5 \frac{32}{100} = \frac{5 \cdot 100 + 32}{100} = \frac{532}{100}$$

În general,

$$\overline{p_1 p_2 \dots p_s} = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \dots + \frac{p_s}{10^{s-1}} = p_1 + \frac{\overline{p_2 \dots p_s}}{10^{s-1}} \stackrel{\text{not}}{=} p_1 \frac{\overline{p_2 \dots p_s}}{10^{s-1}} = \frac{\overline{p_1 \dots p_s}}{10^{s-1}}$$

b) Transformarea fracțiilor zecimale infinite periodice simple.

Fie fracția zecimală

$$0,(\overline{p_1 p_2 \dots p_s})$$

și

$$\frac{p}{q} = 0,(\overline{p_1 p_2 \dots p_s})$$

scrierea ei cu linie de fracție.

Deci

$$10^s \cdot \frac{p}{q} = p_1 p_2 \dots p_s, (\overline{p_1 p_2 \dots p_s}) \quad (1).$$

Înmulțind relația (1) cu 10^s se obține

Prin scăderea acestei egalități cu egalitatea (i) avem:

$$(10^s - 1) \cdot \frac{p}{q} = \overline{p_1 \dots p_s}, \text{ de unde } \frac{p}{q} = \frac{p_1 \dots p_s}{\underline{9 \dots 9}} \\ \text{de } s \text{ ori}$$

Desprindem următoarea regulă:

O fracție zecimală periodică simplă subunitară se transformă în fracție astfel: scriem la numărător perioada, iar la numitor cifra 9 de atâtea ori câte cifre are perioada.

Exemplu.

$$0,(\overline{567}) = \frac{567}{999}, s = 3$$

c) Transformarea fracțiilor zecimale infinite periodice mixte.

Considerăm fracția zecimală

$$0, \overline{p_1 p_2 \dots p_i} (\overline{q_1 q_2 \dots q_j})$$

și $\frac{p}{q}$ scrierea ei cu linie de fracție.

Deci

$$\frac{p}{q} = 0, \overline{p_1 p_2 \dots p_i} (\overline{q_1 q_2 \dots q_j}) \quad (2)$$

Înmulțind relația (2) cu 10^{i+j} respectiv 10^i avem:

$$10^{i+j} \cdot \frac{p}{q} = \overline{p_1 p_2 \dots p_i q_1 q_2 \dots q_j}, (\overline{q_1 q_2 \dots q_j}) \quad (3)$$

$$10^i \cdot \frac{p}{q} = \overline{p_1 p_2 \dots p_i}, (\overline{q_1 q_2 \dots q_j}) \quad (4)$$

Prin scăderea relațiilor (3) și (4) avem:

$$10^i (10^j - 1) \cdot \frac{p}{q} = \overline{p_1 \dots p_i q_1 \dots q_j} - \overline{p_1 \dots p_i}$$

de unde

$$\frac{p}{q} = \frac{\overline{p_1 \dots p_i q_1 \dots q_j} - \overline{p_1 \dots p_i}}{\underline{99 \dots 99} \cdot 10^i} \\ \text{de } j \text{ ori}$$

Deci:

$$\frac{p}{q} = 0, \overline{p_1 p_2 \dots p_i (q_1 q_2 \dots q_j)} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{p_1 \dots p_i q_1 \dots q_j} - \overline{p_1 \dots p_i}}{99 \dots 99 \underbrace{00 \dots 00}_{\text{de } j \text{ ori}} - \underbrace{00 \dots 00}_{\text{de } i \text{ ori}}}$$

Desprindem următoarea regulă:

O fracție zecimală periodică mixtă subunitară se transformă în fracție astfel:

-la numărător: considerăm numărul începând de la virgulă până se termină prima perioadă; din el scădem partea neperiodică;

-la numitor: scriem de atâtea ori cifra 9 câte cifre are perioada, apoi în continuare de atâtea ori cifra 0 câte cifre are partea neperiodică.

Exemplu.

$$0, \overline{41(42)} = \frac{4142 - 41}{9900} = \frac{4101}{9900}$$

5.Exerciții

1.Pentru fracțiile zecimale, periodice următoare, să se găsească numărul rațional pe care-l reprezintă și să se verifice apoi prin algoritmul de împărțire că se obține fracția zecimală inițială:

a)2,11(2); b)0,(3); c)-0,(12); d)2,01(13).

2.Fie $x=2,31$ și $y=1,245$. Să se găsească primele trei cifre după virgulă ale sumei $x+y$.

3.Fie $x=1,734$ și $y=1,245$. Să se găsească primele două cifre după virgulă ale produsului x cu y .

4.Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită, numerele :

$$a) \frac{13}{7} ; b) \frac{1}{4} ; c) \frac{2}{3} .$$

5.Arătați că un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încât n este prim cu m și

cu 9, se reprezintă sub forma unei fracții zecimale a cărei perioadă reprezintă un număr multiplu de 9.

Capitolul XII. Mulțimea numerelor reale

Arătăm că nu există numere raționale care ridicate la pătrat să fie 2.
Într-adevăr,

presupunând contrariul ar exista $\frac{p}{q}$ număr rațional astfel încât

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Putem presupune că $(p,q)=1$.

$$\text{Din } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Cum $2q^2$ este par, deducem că și p^2 este par și deci p este par. Fie $p=2x$, x un număr întreg. Înlocuind $p=2x$ în relația precedentă obținem $(2x)^2=2q^2$, adică $2x^2=q^2$, deci și q este par. Din cele demonstrate deducem că q și p au divizor comun pe 2, care este contradictoriu cu $(p,q)=1$.

Astfel de exemple conduc la extinderea mulțimii numerelor raționale.

Definiție. Numim *număr irațional* (pozitiv sau negativ) un număr care poate fi reprezentat cu ajutorul unei fracții zecimale neperiodice, cu partea zecimală formată din numere care *nu se repetă periodic*.

Mulțimea tuturor numerelor iraționale se notează prin **I**.

Reunind mulțimea **Q** a numerelor raționale cu mulțimea **I** a numerelor iraționale, obținem o nouă mulțime care o notăm prin **R** și o numim mulțimea numerelor reale.

Elementele acestei mulțimi se numesc *numere reale*. Între mulțimile **N**, **Z**, **Q**, **R** există relația de incluziune:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

1.Ordonarea numerelor reale.

Fie $x=x_0,x_1x_2x_3 \dots$ și $y=y_0,y_1y_2y_3 \dots$ două numere reale, unde fracțiile $x_0,x_1x_2x_3 \dots$ și $y_0,y_1y_2y_3 \dots$ au perioada diferită de 9.

Spunem că $x=y$ dacă oricare ar fi $j=0, 1, 2, 3, \dots$ avem $x_j=y_j$.

Exemplu.

$2,345=2,345$ deoarece $x_0=y_0$; $x_1=y_1$; $x_2=y_2$; $x_3=y_3$.

$2,(9)=2,(9)$ deoarece $x_j=y_j$ oricare ar fi $j=0, 1, 2, \dots$

Definiție. Numărul real $x=x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$ este *mai mic* decât numărul real $y=y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$ și scriem $x < y$, dacă există un număr natural $k \geq 0$, astfel încât $x_k < y_k$ și $x_j = y_j$ pentru orice $j < k$.

În acest caz se mai spune că y este mai mare decât x și se scrie $y > x$.

Exemplu.

$7,823 \dots < 8,273 \dots$, deoarece $x_0=7 < 8=y_0$

$7,8234 \dots < 7,8235 \dots$, deoarece $x_0=y_0=7$; $x_1=y_1=8$; $x_2=y_2=2$; $x_3=y_3=3$; $x_4 < y_4$ ($4 < 5$).

Dacă $x < 0$ numărul real x se numește negativ, iar dacă $x > 0$ atunci x se numește pozitiv. Este clar că un număr real $x=x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$ este negativ dacă și numai dacă x_0 este un număr negativ.

Observăm că dacă x și y sunt numere reale, atunci este adevărată una și numai una din relațiile:

$$x > y, x < y, x = y$$

Definiție. Numărul real x este mai mic sau egal cu numărul real y , și scriem $x \leq y$ dacă $x < y$ sau $x = y$.

Relația " $\leq$ " are următoarele proprietăți:

1) este reflexivă: $x \leq x$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

2) este antisimetrică: $(x \leq y \text{ și } y \leq x) \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$;

3) este tranzitivă: $(x \leq y \text{ și } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

Din proprietățile 1), 2) și 3) și observația de mai sus deducem că " $\leq$ " este o relație de ordine totală pe mulțimea numerelor reale.

2. Aproximări zecimale ale numerelor reale.

Fie x un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită. Aproximările zecimale prin lipsă ale numărului x se definesc ca fiind numerele care se obțin prin înlăturarea succesivă a tuturor cifrelor sale așezate după virgulă, începând cu prima cifră, apoi cu cea de-a doua, după aceea cu cea de-a treia etc.

Exemplu.

Pentru numărul $x=3,456217 \dots$, aproximările zecimale prin lipsă vor fi:

3; 3,4; 3,45; 3,456; 3,4562; 3,45621; 3,456217; $\dots$

Dacă la ultimul număr de după virgulă al fiecărei aproximări zecimale prin lipsă a numărului x se adaugă 1, atunci se obțin aproximările (valorile aproximative) zecimale prin adaos ale numărului x .

De exemplu, pentru numărul 3,456217 . . . , astfel de aproximări vor fi:

4; 3,5; 3,457; 3,4563; 3,45622; 3,456218;

Având în vedere relația de ordine pe mulțimea numerelor reale, introdusă mai sus deducem că numărul x este cuprins între:

1) 3 și 4; reținem $4-3=1$;

2) 3,4 și 3,5; reținem $3,5-3,4=0,1$;

3) 3,45 și 3,46; reținem $3,46-3,45=0,01$ etc.

aceste aproximări zecimale sunt, respectiv, cu o eroare mai mică decât 1, $0,1=10^{-1}$ respectiv $0,01=10^{-2}$ etc.

În general pentru un număr real pozitiv reprezentat sub formă de fracție zecimală definită, adică $x=x_0,x_1x_2x_3 \dots x_n \dots$ aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n} sunt:

-pentru numere reale pozitive:

i) prin lipsă: $x'_n=x_0,x_1x_2x_3 \dots x_n$

ii) prin adaos: $x''_n=x_0,x_1x_2x_3 \dots x_n+10^{-n}$

-pentru numere reale negative:

i) prin lipsă: $x''_n=x_0,x_1x_2x_3 \dots x_n-10^{-n}$

ii) prin adaos: $x'_n=x_0,x_1x_2x_3 \dots x_n$

Astfel că numărului x i-au asociat aproximările sale zecimale:

-prin lipsă: $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \dots$,

-prin adaos: $x''_0, x''_1, x''_2, x''_3, \dots$,

astfel încât:

$$x'_0 \leq x < x''_0$$

$$x'_1 \leq x < x''_1$$

$$x'_2 \leq x < x''_2$$

.

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real x sunt totdeauna numere raționale.

3. Adunarea și înmulțirea numerelor reale.

Fie x, y două numere reale reprezentate sub formă de fracție zecimală definită și fie aproximările zecimale prin lipsă și adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n} . Atunci:

$$x'_n \leq x < x''_n$$

$$y'_n \leq y < y''_n$$

Cum x'_n, x''_n, y'_n, y''_n sunt raționale deducem că au sens sumele $x'_n + y'_n$ și $x''_n + y''_n$ pentru orice n .

Definiție. Se numește suma numerelor reale x și y un număr real s , care pentru orice număr natural n , satisface inegalitățile:

$$x'_n + y'_n \leq s < x''_n + y''_n$$

Exemple.

a) Să găsim primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor

$$x = \sqrt{3} \quad \text{și} \quad y = \sqrt{7} \quad .$$

Avem:

$1 \leq \sqrt{3} < 2$	$2 \leq \sqrt{7} < 3$
$1,7 \leq \sqrt{3} < 1,8$	$2,6 \leq \sqrt{7} < 2,7$
$1,73 \leq \sqrt{3} < 1,74$	$2,64 \leq \sqrt{7} < 2,65$
$1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$	$2,645 \leq \sqrt{7} < 2,646$
$1,7320 \leq \sqrt{3} < 1,7321$	$2,6457 \leq \sqrt{7} < 2,6458$
$1,73205 \leq \sqrt{3} < 1,73206$	$2,64575 \leq \sqrt{7} < 2,64576$

Deci $x'_5 + y'_5 = 4,3778 \leq s = \sqrt{3} + \sqrt{7} < x''_5 + y''_5 = 4,37782$ de unde
 $c = 4,3778$

b) Să se găsească primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $x = -7,43562 \dots$ și $y = 5,34187 \dots$

Avem:

$$x'_5 + y'_5 = -2,09376 \leq x + y < x''_5 + y''_5 = -2,09374$$

Astfel putem scrie patru cifre după virgulă pentru suma

$$x + y = -2,0937$$

Produsul numerelor reale pozitive se definește asemănător ca suma numerelor reale pozitive, adică:

Definiție. Se numește *produsul* numerelor reale pozitive x și y , un număr real p , care pentru orice număr natural n , satisface inegalitățile:

$$x'_n \cdot y'_n \leq p < x''_n \cdot y''_n$$

Observație.

1. Analog se definește modulul (valoarea absolută) unui număr real;
 2. Dacă unul sau ambele numere sunt negative, atunci se înmulțesc valorile lor absolute și apoi se ține seama de regula semnelor:

a) produsul este pozitiv dacă ambii factori au același semn și atunci:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y|$$

b) produsul este negativ dacă semnele factorilor sunt diferite și atunci:

$$x \cdot y = -|x| \cdot |y|$$

Considerăm că sunt suficiente exemplele pentru suma a două numere reale, pentru produsul lor se face un raționament analog.

4. Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

1) *Adunarea* este asociativă și comutativă.

2) Există numărul real 0 (zero) astfel încât $x+0=x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$

3) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există numărul $-x \in \mathbf{R}$ astfel încât $x+(-x)=0$.

Observăm că dacă mai există $0' \in \mathbf{R}$ cu $x+0'=x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ atunci pentru $x=0$, rezultă $0+0'=0$ și pe de altă parte din 2) pentru $x=0'$ rezultă $0'+0=0'$, așadar $0=0'$ de unde deducem unicitatea elementului 0.

Analog rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există un unic element y astfel încât $x+y=0$, anume $y=-x$; în plus, $-(-x)=x$. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci se notează $x-y = x+(-y)$ și se numește diferența numerelor x și y .

4) *Înmulțirea* este asociativă și comutativă.

5) Există numărul real 1 ($1 \neq 0$) astfel încât $x \cdot 1 = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

6) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ există numărul x^{-1} (notat și $\frac{1}{x}$) din $\mathbf{R}$,

astfel încât $x \cdot x^{-1} = 1$. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ și reprezintă

câtul numerelor x și y .

7) *Înmulțirea* este distributivă în raport cu adunarea, adică $x(y+z) = xy+xz$, pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Din proprietățile enunțate deducem că 1 este unic, având proprietatea 5) și, de asemenea, pentru $x \neq 0$ dat inversul x^{-1} este unic.

Apoi $x \cdot 0 = 0$ [Deoarece $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, conform cu 7);
notând $x \cdot 0 = y$ rezultă $y = y + y$, deci $y = 0$]

Demonstrăm că dacă $x \cdot y = 0$, atunci $x = 0$ sau $y = 0$. Într-adevăr, dacă $x \cdot y = 0$ și $x \neq 0$, atunci există x^{-1} și înmulțind relația anterioară cu x^{-1} rezultă $x^{-1}(xy) = 0$, adică $(x^{-1}x)y = 0$, $1 \cdot y = 0$, deci $y = 0$.

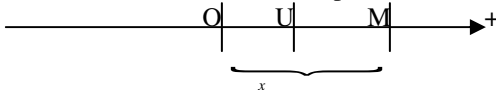
Exercițiu. Ce structură algebrică are $(\mathbf{R}, +, \cdot)$?

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbf{R}$.

Mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale va fi identificată cu mulțimea punctelor de pe axa numerelor. Această identificare a punctelor de pe dreaptă cu elementele din $\mathbf{R}$, justifică faptul că mulțimea $\mathbf{R}$ este uneori numită *dreapta reală*, iar numerele reale se mai numesc *puncte*.

Considerăm o axă având originea O, alegem: o unitate de măsură având lungimea segmentului $OU=1$ și un sens pozitiv notat "+".

Fie P mulțimea punctelor axei, definim aplicația $f: \mathbf{R} \rightarrow P$ care asociază oricărui număr real x acel unic punct $M \in P$ astfel încât $OM=x$.



Așadar $f(x)=M$ și în particular $f(0)=O, f(1)=U$.

Aplicația f este bijectivă și se numește reprezentarea geometrică a lui $\mathbf{R}$ pe $\mathbf{P}$; inversa ei $f^{-1}:\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$ asociază oricărui punct al lui $\mathbf{P}$ abscisa acestui punct, adică x .

5.Exerciții

1.Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ sunt astfel încât $a+b = -a^3 b^3$ atunci

$$|a \cdot b| \leq -\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right)$$

2.Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbf{R}$ sunt numere reale strict pozitive atunci:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

(citește: media armonică $\leq$ media geometrică $\leq$ media aritmetică)

3.Fie numerele:

$$A = \frac{2a + \sqrt{3} + 1}{a\sqrt{3} - a + 1}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad a \neq \frac{-1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$B = \frac{2b + \sqrt{3} - 1}{b\sqrt{3} - b + 1}, \quad b \in \mathbf{R}, \quad b \neq \frac{-1}{\sqrt{3} - 1}$$

Aflați media aritmetică și media geometrică a numerelor date.

4.a) Să se arate că numărul $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ este irațional;

b) Să se extragă $\sqrt{3\sqrt{4}}$ cu două zecimale exacte.

5.Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, determinați echivalența propozițiilor:

$$p_1: a-b+c-d=0 \text{ și } a^2-b^2+c^2-d^2=0;$$

$$p_2: a^n-b^n+c^n-d^n=0, \quad \forall n \in \mathbf{R}.$$

Capitolul XIII. Ecuații și inecuații de gradul I. Sisteme de ecuații și inecuații de gradul I

1. Ecuații de gradul I.

Definiție. Predicatul

$$p(x): "ax=b; a,b \in \mathbf{R}" \quad (1)$$

se numește *ecuație de gradul I* în necunoscuta x .

O valoare a variabilei x pentru care egalitatea este verificată se numește *soluție* (rădăcină) a ecuației. A rezolva o ecuație înseamnă a-i găsi mulțimea soluțiilor.

Considerăm ecuația $ax=b$; $a,b \in \mathbf{R}$.

Pentru rezolvarea ecuației distingem cazurile:

a) $a=0$ și $b \neq 0$ caz în care ecuația nu are soluții.

b) $a=0$ și $b=0$ caz în care ecuația are ca soluție orice număr real.

c) $a \neq 0$ caz în care ecuația are soluția $x = \frac{b}{a}$.

Observație. Nu toate ecuațiile se prezintă sub forma (1), însă se pot aduce la ecuații de acest tip.

Exemple. a) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația

$$(x+3)(x-2)=(x+1)(x+2)+2$$

Rezolvare. Avem

$$(x+3)(x-2) = (x+1)(x+2)+2 \Leftrightarrow x^2-2x+3x-6 = x^2+2x+x+2+2 \Leftrightarrow x^2-2x+3x-x^2-2x-x = 6+2+2 \Leftrightarrow -2x=10.$$

Ultima ecuație are soluția -5 și este echivalentă cu prima.

b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $mx+3m=2x+6$, unde m este un parametru real.

Rezolvare.

$$mx+3m=2x+6 \Leftrightarrow mx-2x=6-3m \Leftrightarrow (m-2)x=3(2-m) \quad (2)$$

Coefficientul necunoscutei x poate fi și 0 (anume, atunci când $m=2$). Se impune deci să facem o analiză a cazurilor ce pot apărea.

Cazul $m \neq 2$. În acest caz împărțim ambii membri ai ecuației (2) cu numărul nenul $m-2$ și obținem ecuația: $x = -3$ care are soluția -3 .

Cazul $m = 2$. În acest caz ecuația inițială se scrie

$$2x + 3 \cdot 2 = 2 \cdot x + 6 \Leftrightarrow 0 = 0$$

în concluzie mulțimea soluțiilor este $\mathbf{R}$.

2. Inecuații de gradul I.

Definiție. Predicatul

$$p(x): ax + b > 0; a, b \in \mathbf{R} \quad (1')$$

se numește *inecuație de gradul I* în variabila x .

O valoare a variabilei x pentru care (1') este verificată se numește *soluție (rădăcină)* a inecuației. A rezolva o inecuație înseamnă a-i găsi mulțimea soluțiilor. Notăm mulțimea valorilor variabilei x prin S .

Considerăm inecuația $ax + b > 0; a, b \in \mathbf{R} \Leftrightarrow ax > -b$

Atunci:

a) dacă $a > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$, mulțimea valorilor soluțiilor este:

$$S = \left(-\frac{b}{a}, \infty \right).$$

b) dacă $a = 0 \Rightarrow 0 > -b$, scriem că $S = \Phi$ (dacă $b < 0$) sau $S = \mathbf{R}$ (dacă $b > 0$);

c) dacă $a < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$, scriem că $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right)$;

Observație. Nu toate inecuațiile se prezintă sub forma (1'), însă se pot aduce la aceasta.

Exemplu.

Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația:

$$\frac{x}{3} - \frac{2-x}{4} + \frac{1+x}{6} \geq 0$$

Rezolvare. După aducerea la același numitor inecuația devine:

$$\frac{4x - 3(2-x) + 2(1+x)}{12} \geq 0$$

Cum $12 \geq 0$ punem condiția ca $4x - 3(2-x) + 2(1+x) \geq 0$

Desfacem parantezele și reducem termenii; atunci: $9x - 4 \geq 0$

aflându-ne în cazul a) deducem că $S = \left[\frac{4}{9}, +\infty \right)$.

3. Sisteme de ecuații de gradul I .

Definiție. Predicatul

$p(x,y): "ax+by=c \text{ și } dx+ey=f" \text{ (a, b, c, d, e, f} \in \mathbf{R}) \text{ (1'')}$

se numește *sistem de ecuații de gradul I* cu două necunoscute.

Simbolic relația (1'') se scrie:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

a și d se numesc *coeficienții* lui x; b și e se numesc *coeficienții* lui y, iar c și f sunt numiți *termeni liberi*.

A rezolva un sistem de două ecuații cu două necunoscute înseamnă a găsi mulțimea perechilor $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ care verifică (1'').

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuații de gradul I cu două necunoscute prezentăm 2 metode:

I. *Metoda substituției* care constă în:

a1) " scoatem " dintr-una din ecuațiile sistemului o necunoscută în funcție de cealaltă;

b1) o înlocuim în cealaltă ecuație a sistemului, obținând astfel o ecuație cu o necunoscută pe care o rezolvăm;

c1) având " valoarea " unei necunoscute, obținem soluția sistemului.

Exemplu. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

Rezolvare. Din $2x-y=2$ deducem că $y=2x-2$.

Din $3x+2y=10$ și $y=2x-2$ deducem prin înlocuire $3x+2(2x-2)=10$, adică $7x=14$. Deci $x=2$. Apoi $y=2 \cdot 2 - 2 = 2$.

Deci, dacă (x,y) este o soluție a sistemului, atunci

$$x=2 \text{ și } y=2.$$

II. *Metoda reducerii* care constă în:

R1) Înmulțind ecuațiile, respectiv, cu e și -b, în așa fel încât prin adunare termenii în y să se reducă, obținem:

$$aex-bdx=ce-fb \text{ echivalent cu } (ae-bd)x=ce-fb$$

R2) Înmulțind acum în mod convenabil, pentru ca termenii în x să se reducă, obținem: $(ae-bd)y=af-cd$

R3) Observăm că dacă $ae-bd \neq 0$, atunci sistemul are o soluție

$$\text{unică: } \begin{cases} x = \frac{ce - fb}{ae - bd} \\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

Exemplu. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x - 5y = -16 \end{cases}$$

în mulțimea numerelor reale.

Rezolvare. Reducem pe y . Pentru aceasta observăm că y are în prima ecuație coeficientul 2, iar în a doua ecuație coeficientul -5 . Vom înmulți ambii membri ai primei ecuații cu 5, iar ai celei de-a doua cu 2; în acest fel obținem sistemul echivalent

$$\begin{cases} 15x + 10y = 70 \\ 4x - 10y = -32 \end{cases}$$

Adunând membru cu membru ecuațiile obținem $19x=38$, de unde $x=2$. Reducem acum pe x . Observăm că x are în prima ecuație coeficientul 3, iar în a doua coeficientul 2. Vom înmulți prima ecuație cu 2, iar a doua cu -3 , obținându-se sistemul echivalent

$$\begin{cases} 6x + 4y = 28 \\ -6x + 15y = 48 \end{cases}$$

Adunând ecuațiile membru cu membru vom obține $19y=76$, de unde $y=4$.

Sistemul are soluția $x=2$ și $y=4$.

4. Sisteme de inecuații de gradul I.

Definiție. Predicatul

$P(x,y)$: " $ax+b>0$ și $cx+d>0$ " ($a,b,c,d \in \mathbf{R}$) ($1'''$)

se numește *sistem de inecuații de gradul I*.

Simbolic relația ($1'''$) se scrie:

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$$

A rezolva un sistem de inecuații de gradul I înseamnă:

-a determina mulțimile de soluții ale inecuațiilor componente;
 -a determina intersecția acestor mulțimi de soluții, obținându-se astfel mulțimea soluțiilor sistemului.

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2-x}{4} + \frac{1+x}{6} \geq 0 \\ 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

Rezolvare. Fie S mulțimea soluțiilor primei inecuații din sistem, S_1 mulțimea soluțiilor celei de-a doua inecuații din sistem.

Am văzut că $S = \left[\frac{4}{9}, +\infty \right)$.

Determinăm S_1 .

Avem $2x-5 \leq 0$ echivalent cu $2x \leq 5$, deci

$$S_1 = \left(-\infty, +\frac{5}{2} \right]$$

Cum $\frac{4}{9} < \frac{5}{2}$ deducem că

$$S \cap S_1 = \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{2} \right]$$

reprezintă mulțimea soluțiilor sistemului.

5.Exerciții

1.Aflați $x \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$(n+1) \cdot x + 2 \cdot (1+2+\dots+n) \cdot x = (n+1)^2, n \in \mathbf{N}$$

2.Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$x^2 - m^2 = 0$$

în funcție de valorile parametrului real m .

3.Rezolvați în $\mathbf{N}$ ecuația:

$$x + yz = 3 + xyz$$

4.Rezolvați în mulțimea numerelor naturale sistemul:

$$\begin{cases} (2x - y) \cdot x = 2 \\ (3x + 2y) \cdot y = 10 \end{cases}$$

5.Rezolvați în $\mathbf{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - \frac{2-x}{4} + \frac{1+x}{6}\right) \cdot x \geq 0 \\ 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

Capitolul XIV. Mușimea numerelor complexe

Fie

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

Definim adunarea "+" (" $+: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ") și înmulțirea "·" (" $\cdot: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ") prin :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1)$$

și

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2)$$

Definiție. Elementele mulțimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pe care sunt definite cele două operații precedente (1) și (2), se numesc *numere complexe*.

Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = (x, 0)$ este bijectivă, rezultat ce permite să identificăm orice pereche de forma $(a, 0)$ prin numărul real a .

Observăm că

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \text{ și } (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Notăm cu $\mathbf{C}$ mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ împreună cu operațiile "+" și "·" și o numim *mulțimea numerelor complexe*.

1. Proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor complexe.

1⁰) Adunarea este asociativă:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$$

2⁰) Înmulțirea este asociativă:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$$

3⁰) Adunarea este comutativă:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$$

4⁰) Înmulțirea este comutativă:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$$

5⁰) $\forall z \in \mathbf{C}$ avem $z + 0 = 0 + z = z$ (0 este element neutru la adunare).

6⁰) $\forall z \in \mathbf{C}$ avem $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (1 este element unitate la înmulțire).

7⁰) Orice număr complex are un opus în raport cu adunarea, mai exact $\forall z \in \mathbf{C}, \exists$ numărul, notat $-z$ astfel încât:

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

8⁰) Orice număr complex diferit de 0 are un invers în raport cu înmulțirea:

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ există un număr complex notat z^{-1} , astfel încât $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

9⁰) Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică oricare ar fi z_1, z_2, z_3 din $\mathbb{C}$, avem $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Demonstrăm proprietatea 1⁰)

Fie

$$z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \text{ și } z_3 = (x_3, y_3).$$

Avem:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \quad (*) \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \quad (**) \end{aligned}$$

Din (*) și (**) obținem 1⁰).

Demonstrăm proprietatea 4⁰)

Fie

$$z_1 = (x_1, y_1) \text{ și } z_2 = (x_2, y_2).$$

Avem:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) = \\ &= (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = z_2 \cdot z_1. \end{aligned}$$

Am folosit proprietățile mulțimii $\mathbb{R}$.

Demonstrăm proprietatea 8⁰)

Fie

$$z = (a, b) \text{ diferit de } (0, 0).$$

Dacă (x, y) este un număr complex astfel încât $(a, b)(x, y) = 1$ deducem că:

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0).$$

Din egalitatea a două perechi avem că:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Sistem cu soluțiile:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Folosind și proprietatea de comutativitate a numerelor complexe avem că:

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Uneori se scrie $\frac{1}{z}$ în loc de z^{-1}

Împărțirea a două numere complexe z, z_1 se notează prin $\frac{z}{z_1}$ și se definește

prin:

$$\frac{z}{z_1} \stackrel{\text{def}}{=} z \cdot \frac{1}{z_1}$$

2. Forma algebrică a numerelor complexe.

Fie $z=(x,y)$ un număr complex.

Am văzut că

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1)$$

Vom nota $(0,1)$ cu i și îl vom numi *unitate imaginară*, iar perechile $(x,0)$ și $(y,0)$ le identificăm prin numerele reale x respectiv y .

Avem așadar $(x,y)=x+y\cdot i$ deci $\mathbf{C}=\{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}=\{x+y\cdot i \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Numărul $x+y\cdot i$ va fi notat prin z iar expresia $z=x+y\cdot i$ se numește *forma algebrică a numărului complex z* . Numerele de forma $y\cdot i$ se numesc *imaginare* iar y *coeficientul părții imaginare* (se va nota $y=\text{Im}z$). Numărul x se numește *partea reală a numărului complex* (se notează $x=\text{Re}z$).

Fie $z_1=x_1+y_1\cdot i$ și $z_2=x_2+y_2\cdot i$ două numere complexe reprezentate sub forma lor algebrică. Observăm că

$$z_1\cdot z_2=(x_1+y_1\cdot i)\cdot(x_2+y_2\cdot i)=x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cdot i$$

și că

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\cdot i$$

Adică, suma a două numere complexe este un număr complex a cărui parte reală, respectiv imaginară, este suma părților reale, respectiv imaginare, ale numerelor date.

3. Numere complexe conjugate.

Fie $z=x+iy$ un număr complex.

Numărul $x-iy$ se numește *conjugatul lui z* și se notează prin

$$\bar{z} \text{ sau prin } \overline{x+iy}.$$

Se observă că dintre toate numerele complexe, numerele reale sunt egale cu conjugatele lor.

Observație.

Când nu există pericolul de confuzie, în loc de $x+i\cdot y$ scrie $x+iy$.

Proprietăți.

1⁰) Suma a două numere complexe conjugate este un număr complex;

2⁰) Conjugatul sumei (respectiv produsului) a două numere complexe este egal cu suma (respectiv produsul) conjugatelor numerelor respective (proprietatea rămâne adevărată și pentru un număr oarecare de numere complexe).

4. Modulul unui număr complex.

Modulul unui număr complex $z=x+iy$ se definește ca fiind numărul real $\sqrt{x^2 + y^2}$ notat prin $|z| = |x+iy|$.

Exemplu.

$$a) |2+3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Proprietăți:

Fie z, z_1 două numere complexe, atunci:

$$1^0) |z| = 0 \Leftrightarrow z=0$$

$$1^0) |zz_1| = |z| |z_1|;$$

$$2^0) |z| - |z_1| \leq |z+z_1| \leq |z| + |z_1|$$

5. Puterile numărului i

Am văzut că $i^2=-1$. Avem că $i^3=i^2i=-i$; $i^4=i^3i=-i \cdot i=-i^2=-(-1)=1$.

Observăm că pentru un număr oarecare n avem:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 4k \\ i, & \text{pentru } n = 4m + 1 \\ -1, & \text{pentru } n = 4p + 2 \\ -i, & \text{pentru } n = 4q + 3 \end{cases}, \forall k, m, p, q \in \mathbb{N}$$

Exemple.

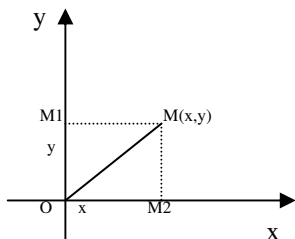
$$i^{12}=i^{4 \cdot 3}=1$$

$$i^{23}=i^{4 \cdot 5+3}=-i$$

6. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe.

Am văzut că mulțimea numerelor complexe este de fapt produsul cartezian al lui $\mathbb{R}$ cu el însuși. Deducem că fiecărui număr complex $z=x+iy$ îi corespunde un punct M din plan de coordonate (x,y) . Punctul M se numește *imagea* numărului complex $x+iy$ iar numărul $x+iy$ se numește *afixul* punctului M .

Fie XOY un sistem de coordonate, $M_1(0,y)$ și $M_2(0,x)$.



Cum $\triangle OMM_2$ este dreptunghic $\Rightarrow$

$$OM^2 = OM_1^2 + MM_2^2 =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

și deci lungimea segmentului OM este egală cu modulul lui z .
Observăm că fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex, lucru ce explică interpretarea geometrică a numerelor complexe.

7.Exerciții

1.Să se găsească numerele x și y din ecuația:

$$(5x+4yi)+(3y-5xi)=2-i$$

2.Să se calculeze:

$$(i-1)^4 + (i-1)^6 + \dots + (i-1)^{2n}$$

$\forall n \in \mathbf{N}$, număr par.

3.Să se reprezinte în plan numerele complexe:

a) $3+5i$;

b) $2+7i$;

4.Dacă $x+yi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z=x+iy$, astfel încât $z^2=x+iy$.

5.Să se determine perechile (x,y) din plan pentru care:

$$\left| \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y - 4} \cdot i \right| = \sqrt{10}$$

Capitolul XV. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică

Noțiunea de problemă are un conținut vast și poate fi definită ca fiind totalitatea obstacolelor întâmpinate de gândire în activitatea practică sau teoretică pentru care se caută un răspuns.

Rezolvarea oricărei probleme se realizează în mai multe etape, în care datele problemei apar în combinații noi, reorganizarea lor la diferite nivele ducând către soluția problemei.

Cu toată varietatea lor, problemele de matematică nu sunt independente, izolate, ci fiecare problemă se încadrează într-o anumită categorie care se rezolvă printr-o anumită metodă.

Organizarea activității de rezolvare a problemelor se fundamentează pe cinci etape principale și momentul de efort mintal pe care îl parcurg elevii, anume :

- cunoașterea enunțului problemei
- înțelegerea enunțului problemei
- analiza și schematizarea problemei
- rezolvarea propriu-zisă a problemei
- verificarea rezolvării problemei și punerea rezolvării sub formă de exercițiu, formularea de alte probleme ce se rezolvă după același exercițiu, generalizarea etc.

1.Probleme tip

Prin problemă tip înțelegem acea construcție matematică a cărei rezolvare se realizează pe baza unui algoritm. O asemenea problemă se consideră teoretic rezolvată în momentul în care i-am stabilit tipul și suntem în posesia algoritmului de rezolvare.

Metoda figurativă.

Metoda figurativă este o metodă ce constă în reprezentarea prin desen a mărimilor necunoscute și fixarea în desen a relațiilor dintre ele și mărimile date în problemă.

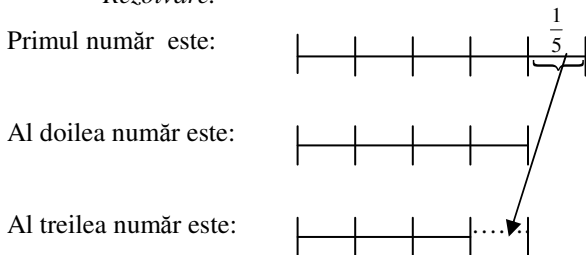
Figura reprezintă o schematizare a enunțului, pentru a se păstra în atenție relațiile matematice și nu toate aspectele concret. Rezolvatorul de probleme de aritmetică simte nevoia să-și *apropie* datele problemei, precum și relațiile dintre acestea. Pentru aceasta realizează un desen, o figură, un model, care să oglindească datele problemei. Dacă rezolvatorul este *la început de drum* desenul său este cât mai detaliat, iar pe măsură ce el își formează unele priceperi și deprinderi, figura devine cât mai abstractă, cât mai schematică, ea *prinzând* în cadrul modelului numai esențialul.

Problemele care se rezolvă prin metoda figurativă le putem împărți în probleme cu mărimi *discrete*, caz în care mărimile pot fi numărate și probleme cu marimi *continui*, caz în care, le figurăm prin segmente.

Exemple.

1) Suma a trei numere este 144. Dacă luăm $\frac{1}{5}$ din primul și o adăugăm la al treilea numerele devin egale. Care sunt numerele ?

Rezolvare.

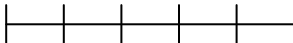


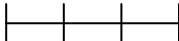
Avem în total 12 segmente a căror sumă este 144. În concluzie un segment reprezintă numărul $144:12=12$, deci:

- primul număr este $12:5=60$
- al doilea număr este $12:4=48$
- al treilea număr este $12:3=36$

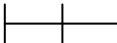
2) Un elev a participat la $\frac{3}{5}$ din numărul olimpiadelor desfășurate în 2005. Câte olimpiade s-au ținut în 2005 dacă elevul respectiv nu a participat la doar patru olimpiade ?

Rezolvare.

Numărul de olimpiade este: 

$\frac{3}{5}$ din acest număr este:  (adică numărul de

olimpiade la care a participat elevul).

Numărul de olimpiade la care nu a participat elevul este: 

(din problemă el fiind egal și cu cifra 4).

În concluzie, un segment este egal cu numărul $4:2=2$, deci numărul de olimpiade ținute în 2005 este $2 \cdot 5=10$.

3) Mihai îi spune lui Sorin:

-Dă-mi trei postere și o să avem același număr de postere.

Sorin la rândul său spune:

-Ba nu, dă-mi tu mie 5 postere și eu o să am de trei ori mai multe decât tine.

Câte postere avea Sorin ? Dar Mihai ?

Rezolvare.

Numărul de postere ale lui Mihai este:

Numărul de postere ale lui Sorin este:

Presupunem că Mihai îi dă lui Sorin 5 postere, deci Sorin va avea:



Din problemă deducem că lui Mihai îi rămân de trei ori mai puține postere, adică un număr de: $(5+3+3+5):2=8$ postere.

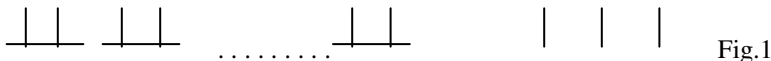
În concluzie Sorin avea $8+5+3+3=19$ postere iar Mihai $8+5=13$ postere.

4) Dacă elevii unei clase ar fi așezați câte 2 în bancă ar mai rămâne 3 elevi în picioare, iar dacă s-ar așeza câte 3 în bancă ar rămâne 2 bănci libere. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă ?

Rezolvare.

Figurăm băncile prin linii orizontale, iar elevii prin linii verticale.

În prima situație elevii și băncile pot fi figurate astfel:



În a doua situație se figurează astfel:



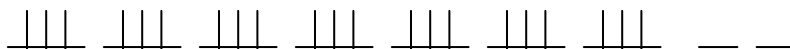
Distribuiți cei trei elevi rămași în picioare din Fig.1 câte unul în celelalte bănci cu 2 elevi:



Avem acum bănci cu câte trei elevi și cu câte 2 elevi.

Eliberăm acum 4 elevi din băncile cu câte 2 elevi în patru bănci cu câte 2 elevi. Fig. 2 ne spune că ne rămân 2 bănci libere iar restul băncilor cu câte 3 elevi.

Avem deci:

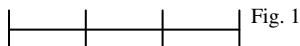


Deci, în clasă sunt 9 bănci și $3 \cdot 7 = 21$ de elevi.

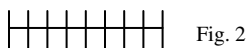
5) Să se găsească trei numere, știind că raportul dintre primul și al doilea este $3/2$, raportul dintre al doilea și al treilea este $8/5$, iar suma lor este 400.

Rezolvare.

Primul număr este:



Al doilea reprezintă $2/3$ din primul, adică:



Al treilea reprezintă $\frac{5}{8}$ din al doilea, adică:

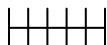


Fig. 3

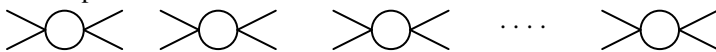
Un segment mic ca în Fig. 3 reprezintă numărul $400:(5+8+12)=16$.

În concluzie primul număr este $12 \cdot 16 = 192$; al doilea număr este $8 \cdot 16 = 128$; al treilea număr este $5 \cdot 16 = 80$.

6) Într-o grădină zoologică sunt iepuri și porumbei. În total sunt 22 de capete și 72 de picioare. Câți iepuri și câți porumbei sunt?

Rezolvare.

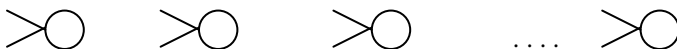
Figurăm iepurii în desenul alăturat:



Figurăm porumbeii în desenul alăturat:



Pentru rezolvarea problemei vom decupa două piciorușe ale iepurașilor, deci:



Problema ne spune că avem 22 de capete, în concluzie au rămas $22 \cdot 2 = 44$ de picioare.

Ne întrebăm acum câte picioare am decupat de la iepuri ?

Răspunsul este: $72 - 44 = 28$. Deoarece am decupat 2 picioare de la iepuri au mai rămas iepurilor tot 28 de picioare.

Putem afirma că iepuri sunt $(28 + 28) : 4 = 14$ iar găini $22 - 14 = 8$.

Metoda comparației.

În aritmetică sunt unele probleme, în care, pentru rezolvare, este nevoie să se compare între ele mărimile cunoscute.

Pe baza relațiilor ce se stabilesc între aceste mărimi, prin operații de adunare, scădere sau înlocuire, se înlătură pe rând câte una din mărimi, până când se stabilește o diferență între cele rămase, care duc la aflarea rezultatului.

Exemplu.

1) 3 kg de făină de calitate I și 4 kg de făină de calitate a II^a costă 55000 de lei. 5 kg de făină de calitate I și 2 kg făină de calitate a II^a costă 59000 de lei. Cât costă un kilogram de făină din fiecare calitate ?

Rezolvare:

Așezăm datele problemei astfel:

3 kg de făină (cal I) 4 kg de făină (cal a II^a) . . . 55000 de lei

5 kg de făină (cal I) 2 kg de făină (cal a II^a) . . . 59000 de lei

Presupunând că a doua oară am lua cantități de 2 ori mai mari, prețul va fi de două ori mai mare, deci vom avea:

3 kg de făină (cal I) 4 kg de făină (cal a II^a) . . . 55000 de lei

10 kg de făină (cal I) . . . 4 kg de făină (cal a II^a) . . . 118000 de lei

Observăm că avem aceeași cantitate de făină de calitate a II^a, deci diferența de prețuri se datorează diferenței cantităților de făină de calitate I.

Rezultă că un kilogram de făină de calitate I costă

$(118000 - 55000) : 7 = 63000 : 7 = 9000$ lei iar 1 kilogram de făină de calitate a II^a costă $(55000 - 3 \cdot 9000) : 4 = 28000 : 4 = 7000$ lei.

Metoda falsei ipoteze.

Problemele din această categorie sunt foarte numeroase. Orice problemă ale cărei date sunt mărimi proporționale poate fi rezolvată prin metoda falsei ipoteze. De regulă, se pleacă de la întrebarea problemei, în sensul că asupra mărimii ce o căutăm facem o presupunere complet arbitrară. După aceea, refacem problema pe baza presupunerii făcute. Deoarece mărimile sunt proporționale, rezultatele obținute pe baza presupunerii se translatează în plus sau în minus, după cum presupunerea făcută este mai mare, respectiv mai mică, decât rezultatul real. Refăcând problema, ajungem la un rezultat care nu concordă cu cel real din problemă. Este, fie mai mare, fie mai mic decât acesta.

În acest moment se compară rezultatul pe baza presupunerii cu cel real, din punct de vedere al câtului și observăm de câte ori am greșit când am făcut presupunerea. Obținem, așadar, un număr cu ajutorul căruia **corectăm** presupunerea făcută în sensul că o micșorăm sau o mărim de acest număr de ori.

Problemele a căror rezolvare se bazează pe metoda presupunerilor sau ipotezelor, a falsei ipoteze, se pot clasifica în două categorii:

a) Probleme pentru rezolvarea cărora este suficientă o singură ipoteză.

b) Probleme pentru rezolvarea cărora sunt necesare două sau mai multe ipoteze succesive.

Exemplu.

1) La un concurs de matematică candidații au avut de rezolvat 30 de probleme. Știind că pentru fiecare problemă bine rezolvată ei au primit 6 puncte, iar pentru o problemă greșit rezolvată li s-a scăzut 3 puncte, să se spună câte probleme a rezolvat un candidat care a primit 81 de puncte.

Rezolvare.

Presupunem: candidatul respectiv a rezolvat bine toate problemele. În această ipoteză el ar fi avut $6 \cdot 30 = 180$ de puncte. Diferența dintre acest punctaj și cel real se datorează faptului că fiecare problemă greșit rezolvată a fost înlocuită cu o problemă bine rezolvată. La fiecare înlocuire numărul punctelor crește cu 6 în loc să se scadă 3 puncte. Înseamnă: candidatul nostru a rezolvat greșit un număr de $(180 - 81) : (6 + 3) = 99 : 9 = 11$ probleme. Deci $30 - 11 = 19$ probleme a rezolvat corect.

Metoda mersului invers.

Această metodă constă în faptul că enunțul unei probleme trebuie urmărit de la sfârșit spre început. Analizând operațiile făcute în problemă și cele pe care le facem noi în rezolvarea problemei, constatăm că de fiecare dată, pentru fiecare etapă, facem operația inversă celei făcute în problemă. Deci, nu numai mersul este invers, ci și operațiile pe care le facem pentru rezolvare sunt operațiile inverse celor din problemă.

Exemplu.

1) Sorin, Alina și Mihai au împreună 3000000 de lei. Alina îi dă lui Sorin cât avea acesta și încă 100.000 iar acesta îi dă lui Mihai cât avea acesta și încă 150000 de lei. Știind că după o astfel de operație Mihai rămâne cu 2000000 de lei iar Alina cu 100000 de lei mai mult decât Sorin să se spună câți bani au avut fiecare la început.

Rezolvare.

La sfârșit Mihai avea

$(3000000 - 2000000 - 100000) : 2 = 900000 : 2 = 450000$ de lei iar Alina avea $450000 + 100000 = 550000$ de lei.

Folosim metoda mersului invers: înainte de a obține 2000000 Mihai avea $(2000000 - 150000) : 2 = 1850000 : 2 = 925000$ de lei. Cunoscând câți lei avea Mihai la început problema devine: *Alina și Sorin au împreună 3000000-925000=2075000. Alina îi dă lui Sorin cât avea acesta și încă 100000 de lei. Știind că după o astfel de operație Alina rămâne cu 925000-100000=825000 de lei mai puțin să se spună câți bani au avut fiecare la început.*

La sfârșit Alina avea $(2075000 - 825000) : 2 = 625000$ iar Sorin $625000 + 825000 = 1450000$ de lei. Înainte de avea acești bani Sorin avea

$(1450000-100000):2=1350000:2=675000$ de lei iar Alina $625000+675000+100000=1400000$.

În concluzie la început Sorin avea 675000 de lei; Alina 1400000 de lei; Mihai 925000 de lei.

Probleme cu mărimi proporționale.

Se pot grupa în mai multe categorii după structura și complexitatea lor:

a) *Probleme care se rezolvă prin regula de trei simplă.*

În această categorie de probleme se dau trei valori cu ajutorul cărora se găsește cea de a patra valoare:

Fie $A=\{a, b\}$ și $B=\{c, d\}$ astfel încât

a c (lui a îi corespunde c)

b d (lui b îi corespunde d)

și una din cele 4 valori este necunoscută.

Dacă mărimile A și B sunt direct proporționale, adică dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, putem scoate termenul necunoscut din această relație.

Dacă mărimile A și B sunt invers proporționale, adică dacă $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$, putem scoate termenul necunoscut din această relație.

Procedeul care se folosește pentru determinarea numărului necunoscut din două mulțimi de câte două numere între care există o proporționalitate directă sau o proporționalitate inversă se numește regula de trei simplă.

Exemple.

1) Un tren a parcurs distanța de 120 Km în 3 ore, considerând viteza constantă, să se afle distanța pe care o va parcurge în 5 ore.

Rezolvare. Formăm mai întâi mulțimea $\{3,5\}$, în care numerele exprimă orele parcurse de tren. Formăm, apoi, mulțimea $\{120,x\}$, în care numerele exprimă kilometri parcurși de tren. Între aceste două mulțimi există o proporționalitate directă, deoarece rapoartele

$$\frac{3}{5} \quad \text{și} \quad \frac{120}{x}$$

sunt egale valoarea lor comună fiind viteza de deplasare a trenului.

În concluzie

$$x = \frac{120 \cdot 5}{3} = 200 \text{ Km}$$

2) Știind că o echipă de 7 muncitori termină o lucrare în 8 zile, să se afle în câte zile termină aceeași lucrare 24 de muncitori.

Rezolvare.

Formăm mai întâi mulțimea $\{7, 28\}$, în care numerele exprimă muncitorii. Formăm, apoi, mulțimea $\{8, x\}$, în care numerele exprimă zilele lucrate de muncitori. Între aceste două mulțimi există o proporționalitate

inversă, deoarece rapoartele $\frac{7}{28}$ și $\frac{x}{8}$ reprezintă aceeași lucrare.

În concluzie

$$x = \frac{7 \cdot 8}{28} = 2 \quad (\text{două zile}).$$

b) *probleme care se rezolvă prin regula de trei compusă.*

Problemele din această categorie exprimă dependența direct sau invers proporțională a unei mărimi în funcție de alte două sau mai multe.

În cazul când în problemă intervin trei mărimi, avem schema:

Mărimile	x		
	A	B	C
Valorile	a	b	c

Procedul prin care o problemă se rezolvă prin aplicarea de mai multe ori a regulei de trei simplă se numește regula de trei compusă.

Exemple.

1) Un număr de 3 avioane pot transporta 432 de călători în 6 zile, făcând câte 2 transporturi pe zi. Câte zile sunt necesare pentru ca același număr de avioane să transporte 15120 de persoane dacă se fac zilnic 5 transporturi.

Rezolvare. Enunțul problemei îl scriem sub forma următoarei scheme:

3·2 avioane(făcând un transport pe zi) . . 432 de călători . . în 6 zile

3·5 avioane(făcând un transport pe zi). .15120 de călători . . în x zile

Notând cu y numărul de zile în care cele 15 avioane transportă același număr de persoane, avem:

3·2 avioane(făcând un transport pe zi) . . 432 de călători . . în 6 zile

3·5 avioane(făcând un transport pe zi) . . 432 de călători . . în y zile

Acum între mulțimile $\{6, 15\}$ și $\{6, y\}$ avem o proporționalitate inversă.

Deci, avem o problemă care se rezolvă prin regula de trei simplă. Cu metoda proporției obținute $\frac{6}{15} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = \frac{6 \cdot 6}{15} = \frac{36}{15}$

Știind că 3-5 avioane (făcând un transport pe zi) transportă 432 de călători în $\frac{36}{15}$ zile putem afla în câte zile transportă aceleași avioane (făcând un transport pe zi) un număr de 15120 de călători, făcând următoarea schemă:

15 avioane 432 de călători $\frac{36}{15}$

15 avioane 15120 de călători x zile

Între mulțimile $\{4320, 15120\}$ și $\{\frac{36}{15}, x\}$ există o proporționalitate

directă.

Avem o problemă care se rezolvă prin regula de trei simplă.

Deci:

$$x = \frac{36 \cdot 15120}{15 \cdot 432} = \frac{544320}{64800} = 84 \text{ zile}$$

15 avioane 15120 de călători 84 zile

Probleme de mișcare.

Sunt acelea în care se caută una din mărimile: spațiu (sau distanță notată prin d), viteză (notată prin v) sau timp (notat prin t). Pentru problemele de acest tip se utilizează formulele:

$$v = \frac{d}{t}; d = v \cdot t; t = \frac{d}{v}$$

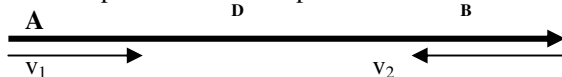
Se clasifică în:

- a) probleme de întâlnire, când deplasarea se face în sensuri opuse;
- b) probleme de întâlnire, când deplasarea se face în același sens;
- c) probleme care utilizează direct formulele;

În rezolvarea problemelor de mișcare se pot folosi metodele aritmetice folosite până în prezent.

a) de întâlnire (când deplasarea se face în sensuri opuse);.

Datele problemei se transpun ca în desenul:



Formula după care se calculează timpul de întâlnire într-o problemă de mișcare în sensuri contrare este $t = \frac{D}{v_1 + v_2}$.

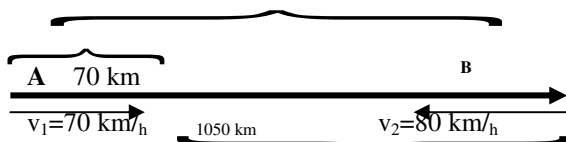
Exemplu.

Din orașul A pleacă la ora 7⁰⁰ un tren spre orașul B cu o viteză de 70 km/h. După o oră pleacă un al doilea tren din orașul B spre orașul A cu viteza de 80 km/h. Când și la ce distanță de orașul A se vor întâlni cele două trenuri știind că distanța dintre cele două orașe este de 1120 km?

Rezolvare.

Datele problemei se transpun ca în desenul:

D=1120 km



Până în momentul plecării din B a celui de-al doilea tren, primul parcurge 70 km. El se află la distanța de $1120 - 70 = 1050$ km față de trenul care pleacă din localitatea B.

Am redus astfel problema la o problemă de mișcare în sensuri contrare. În fiecare oră distanța dintre cele două se micșorează cu $70 + 80 = 150$ km.

Pentru ca trenurile să se întâlnească trebuie să treacă atâtea ore de câte ori se cuprinde 150 în 1050, adică $1050 : 150 = 105 : 15 = 7$ ore.

Deci cele două trenuri se întâlnesc după 7 ore de la plecarea celui din B, sau la $7 + 1 = 8$ ore după plecarea celui din A.

Trenurile se vor întâlni la ora $7 + 8 = 15^{00}$ la distanța de $8 \cdot 70 = 560$ km de orașul A.

b) probleme de întâlnire (când deplasarea se face în același sens)

Datele problemei se transpun ca în desenul:



Relația după care se calculează timpul de întâlnire într-o problemă

de mișcare în același sens este $t = \frac{D}{v_2 - v_1}$

Exemplu.

Un tren personal pleacă din orașul A cu o viteză de 70 km/h. După o oră pleacă tot din orașul A, în aceeași direcție, un tren accelerat, având

viteza de 80 km/h. În cât timp și la ce distanță de orașul A va ajunge trenul accelerat trenul personal ?

Rezolvare.

Fixăm datele problemei astfel:



Într-o oră trenul personal parcurge distanța de 70 km. Trenul accelerat parcurge în fiecare oră, în plus: $80-70=10$ km.

Cei 70 km vor fi recuperați în $70:10=7$ ore, timp după care trenul personal va fi ajuns.

Distanța de întâlnire va fi: $80 \cdot 7=560$ km.

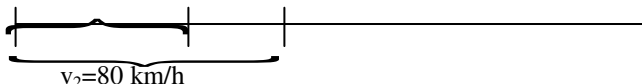
c) probleme care utilizează direct formulele.

Exemplu.

Două trenuri parcurg distanța de la A la B. Primul tren a sosit în B cu o oră mai târziu decât al doilea. Viteza primului tren este de 70 km/h iar a celui de-al doilea este de 80 km/h. Determinați distanța dintre cele două localități.

Rezolvare.

$v_1=70$ km/h



Avem că $v_2-v_1=10$ km/h.

Deci în fiecare oră, primul tren rămâne în urma celui de-al doilea cu 10 km. Până ce al doilea tren a ajuns în B, primul tren a rămas în urmă o distanță pe care a făcut-o într-o oră, adică:

$D=70 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ ore} = 70 \text{ km}$

Această rămânere în urmă s-a realizat într-un timp $t=70 \text{ km}:10 \text{ km/h}=7$ ore

Al doilea turist a parcurs o distanță de $6 \cdot 80=480$ km.

2.Probleme nonstandard.

O problemă care nu necesită aplicarea unei metode anume și care pune gândirea și imaginația rezolvitorului la creativitate se numește *problemă nonstandard*.

Exemple.

1) Să se ridice la pătrat fără hârtie și creion numărul 65.

Rezolvare.

Un calcul mintal

$$(10n+5)^2=100n^2+100n+25=n(n+1)100+25,$$

$$\text{deci } 65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25 = 4225.$$

2) La un turneu de fotbal de tip eliminator participă n echipe. Câte meciuri trebuie jucate (sau câştigate prin neprezentare) pentru a şti cine este câştigătorul? ^(turneu de fotbal)

Rezolvare.

În fiecare meci va exista un învins. Fiecare echipă (în afara echipei câştigătoare) trebuie să fie învinsă o dată. Vor fi $n-1$ echipe învinse şi ca atare vor fi $n-1$ meciuri.

3) Să se înmulţească 5746320819 cu 125. ^(înmulţire uşor de efectuat)

Rezolvare.

$$125 = 1000/8, \text{ deci } (5746320819)(125) = 5746329819000/8 = 718290102375.$$

4) Înmulţiţi 91 cu 109 mintal.

Rezolvare.

Aplicând identitatea $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, avem:

$$91 \cdot 109 = (100-9)(100+9) = 10000 - 81 = 9919$$

3.Exerciţii

1.O florăreasă a avut în coş un anumit număr de flori. La prima oră a dimineţii a vândut $\frac{1}{4}$ din ele; în a doua oră $\frac{2}{3}$ din cele rămase. Numărând pe cele din coş, a constatat că i-au mai rămas 5 flori. Câte flori au fost în coş?

2.Peste 3 ani tata lui Ionuţ va împlini 30 de ani. Câţi ani are Ionuţ atunci, dacă vârsta lui reprezintă acum $\frac{1}{3}$ din vârsta tatălui?

3.Câte găini sunt într-o curte dacă fiecare găină ouă din 2 în 2 zile câte un ou iar într-un interval de 10 zile 60 de ouă, toate?

4.Doi raci pornesc unul spre celălalt pe o distanţă de 10 m cu aceeaşi viteză. Cunoscând că unul din raci merge 3 m înainte şi 2 înapoi să se spună câţi metri a parcurs racul care merge doar înainte, până la întâlnire?

5. ^(Problema lui Newton) Pe întreaga întindere a luncii, iarba creşte uniform şi la fel de repede. Ştiind că 70 de vaci, ar putea paşte această iarbă în 24 de zile, iar 30 de vaci, în 60 de zile, câte vaci, ar fi păscut iarba de pe luncă în 96 de zile?

Capitolul XVI. Unități de măsură pentru lungime, volum, masă, timp

În curgerea vremii unitățile de măsură au fost structurate în trei categorii: mărimi fundamentale, mărimi derivate și mărimi suplimentare.

Mărimile fundamentale folosite în matematică sunt *metrul* (unitatea de măsură pentru lungime), *kilogramul* (unitatea de măsură pentru masă), *secunda* (unitatea de măsură pentru timp), *amperul* (unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric), *kelvinul* (unitatea de măsură pentru temperatură), *molul* (unitatea de măsură pentru cantitatea de substanță), *candela* (unitatea de măsură pentru intensitatea luminoasă).

Mărimile derivate sunt acele mărimi a cărei unitate de măsură depinde de una sau mai multe unități de măsură ale mărimilor fundamentale și se grupează în unități de măsură pentru: arii, volum și viteză.

Mărimile suplimentare sunt folosite în practică pentru a permite scrieri economice ca număr de cifre și spațiu.

1. Unități de măsură pentru lungime.

Strămoșii babilonienilor și ai altor popoare din antichitate și-au frământat mintea ca să stabilească o metodă de *măsurare* a lungimilor de care se foloseau în viața de toate zilele. La acest rezultat s-a putut ajunge abia după ce a fost stabilit un sistem de numerație și după ce oamenii s-au familiarizat cu linia dreaptă și proprietățile ei. După ce au știut că o parte din linia dreaptă se așază exact peste altă parte a ei, au înțeles că lungimile liniilor puteau fi comparate, stabilindu-se care este mai mare și chiar *de câte ori*.

Pentru această operație era de ajuns să stabilească o unitate de lungime, iar această unitate nu era greu de găsit : putea fi *palma*, *degetul*, *cotul*, *brațul întreg*, *piciorul*, *pasul*, unitatea aleasă fiind indicată de însăși mărimea ce trebuia măsurată. Numai că aceste unități de măsură deși aveau numiri asemănătoare în majoritatea zonelor, nu erau fixe și nici aceleași peste tot. Tocmai aceste deosebiri care îngreunau operațiile comerciale dintre diferite state au condus la introducerea unei unități internaționale de măsurare a lungimilor, unitate care a fost numită *metru*. Această nouă unitate de lungime, cu multipli și submultipli exprimați în sistemul de numerație zecimal, a fost introdusă mai întâi în Franța, în 1795, adică după

Revoluția franceză. Țara noastră a fost una dintre primele țări care au adoptat sistemul metric, anume prin legea din 1864, care urma să se aplice începând din anul 1866.

Dar chiar înainte de această dată, legăturile noastre culturale cu Franța au făcut ca, în cărțile tipărite la noi în țară, să fie explicată odată cu unitățile de măsură folosite din strămoși și noțiunea, foarte modernă pe atunci, de metru. Astfel în cartea de *Geometrie* tipărită de Gheorghe Asachi la Iași în 1838 găsim : « Unitatea legiută a măsurii pentru lungimi este stânjenul, deci a măsura o linie este a căuta câți stânjeni cuprinde, sau fracții ale stânjenului. Însă, deși guvernurile se îngrijesc de a păstra pururea aceeași lungime a stânjenului, totuși această măsură, neatârând de vreo bază statornică, se schimbă de la loc și epocă, de aceea urmează sminteli între numărătoarea măsurilor vechi și a celor noi. Pentru a se feri de asemenea sminteli vătămătoare, în epoca reformelor, în Franța s-a determinat o măsură neschimbătoare, în urma unor mari operații astronomice prin care s-a hotărât împrejurimea Pământului, împărțind depărtarea de la pol la ecuator, sau pătrariul de cerc, în zece milioane de părți din care una au luat-o drept metru ».

Se vorbește despre sistemul metric și în *Aritmetica* imprimată la București de Ion Heliade Rădulescu în 1832 și apoi în *Moș Pătru sau învățătorul de sat*, publicată de Alexe Marin, fără a-și menționa numele, în 1839, de unde cităm : « toată unimea de măsură trebuie să aibă o bază pe care să se razime, afară de aceasta, spre mai multă înlesnire a calcului, ar trebui să se supună acest stânjen și sistemii zecimale. De aceea până atunci, noi vom lua o măsură franțuzească, care este numai pe jumătatea acestui stânjen, numită metru, și a cărei lungime este atâta că înconjurând Pământul cu o ață ar fi tocmai de 40 000 000 de metruri ».

În scopul măririi preciziei de materializare a metrului, în anul 1983 au fost înlocuite definițiile date metrului prin următoarea:

"Metrul este lungimea drumului parcurs de lumină în vid în timp de 1/299.792.458 dintr-o secundă".

Vom nota prin litera *m* metru. Măsurătorile efectuate au urmat să se extindă și asupra lungimilor mai mici sau mai mari decât metru dând naștere la noi categorii de unități de măsură numite *submultiplii* metrului respectiv *multiplii* metrului.

Submultiplii metrului:

-decimetrul (*dm*) = 0,1 m

-centimetrul (*cm*) = 0,1 dm = 0,01 m

-milimetrul (*mm*) = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m

Multiplii metrului:

-decametrul (*dam*) = 10 m

-hectometrul (*hm*) = 10 dam = 100 m

-kilometrul (*km*) = 10 hm = 100 dam = 1000 m

Denumirile s-au alcătuit cu prefixele din limba greacă veche și latină: *deca* = zece, *hecto* = o sută, *kilo* = o mie, *deci* = o zecime, *centi* = o sutime, *mili* = o miime.

2.Unități de măsură pentru arie.

Unitatea de măsură pentru arie este aria unui pătrat cu latura de 1 m, arie numită un *metru pătrat* (se notează 1 m^2). Deoarece s-a stabilit ca unitatea de măsură a ariei să fie aleasă ca fiind aria unui pătrat de latură egală cu o unitate de lungime, spunem că aria este o mărime derivată, având la bază lungimea.

Multiplii sunt:

$$1\text{ dam}^2 = 100\text{ m}^2$$

$$1\text{ hm}^2 = 100\text{ dam}^2 = 10000\text{ m}^2$$

$$1\text{ km}^2 = 100\text{ hm}^2 = 10000\text{ hm}^2 = 1000000\text{ m}^2$$

Submultiplii sunt:

$$1\text{ dm}^2 = 0,01\text{ m}^2$$

$$1\text{ cm}^2 = 0,01\text{ dm}^2 = 0,0001\text{ m}^2$$

$$1\text{ mm}^2 = 0,01\text{ cm}^2 = 0,0001\text{ dm}^2 = 0,000001\text{ m}^2$$

3.Unități de măsură pentru volum.

Unitatea de măsură pentru volum este volumul unui cub cu muchia de 1 m, volum numit un *metru cub* (se notează 1 m^3)

Analog definim multiplii și submultiplii metrului cub, adică:

Multiplii sunt:

$$1\text{ dam}^3 = 1000\text{ m}^3$$

$$1\text{ hm}^3 = 1000\text{ dam}^3 = 1\,000\,000\text{ m}^3$$

$$1\text{ km}^3 = 1000\text{ hm}^3 = 1\,000\,000\text{ dam}^3 = 1\,000\,000\,000\text{ m}^3$$

Submultiplii sunt:

$$1\text{ dm}^3 = 0,001\text{ m}^3$$

$$1\text{ cm}^3 = 0,001\text{ dm}^3 = 0,000001\text{ m}^3$$

$$1\text{ mm}^3 = 0,001\text{ cm}^3 = 0,000001\text{ dm}^3 = 0,000000001\text{ m}^3$$

Cum determinăm volumul unui corp solid, cu aproximație?

Se scufundă corpul într-un vas gradat cu lichid, astfel încât să fie acoperit complet. Se citește pe gradația de nivel volumul lichidului înainte și după scufundare; diferența dintre aceste volume este chiar volumul corpului respectiv.

4. Unități de măsură pentru capacitate

Unitatea de măsură pentru capacitate este *litru* l și este echivalentul unui dm^3 de apă. Prin notația 1 l înțelegem un litru. Avem deci egalitatea $1 l = 1 dm^3$.

Multiplii sunt:

$$1 \text{ decaltru (1 dal)} = 10 \text{ l}$$

$$1 \text{ hectoltru (1 hl)} = 100 \text{ l}$$

$$1 \text{ kiloltru (1 kl)} = 1000 \text{ l}$$

Submultiplii sunt:

$$1 \text{ decilitru (1 dl)} = 0,1 \text{ l}$$

$$1 \text{ centilitru (1 cl)} = 0,1 \text{ dl} = 0,01 \text{ l}$$

$$1 \text{ mililitru (1 ml)} = 0,1 \text{ cl} = 0,01 \text{ dl} = 0,001 \text{ l}$$

5. Unități de măsură pentru masă.

Masa unui centimetru cub de apă distilată, la temperatura de 4^0 Celsius s-a considerat ca fiind 1 *gram* și s-a notat prin 1 g. S-a știut că la această temperatură densitatea apei este maximă. Cantitățile mai mari decât gramul dau naștere următoarelor categorii:

Multiplii gramului:

$$10 \text{ g} = 1 \text{ decagram (se notează 1 dag)}$$

$$100 \text{ g} = 1 \text{ hectogram (se notează 1 hg)}$$

$$1000 \text{ g} = 1 \text{ kilogram (se notează 1 kg)}$$

$$100000 \text{ g} = 1 \text{ chintal (se notează 1 q)}$$

$$1000000 \text{ g} = 1 \text{ tonă (se notează 1 t)}$$

Submultiplii gramului:

$$1 \text{ g} = 10 \text{ decigrame (se notează 10 dg)}$$

$$= 100 \text{ centigrame (se notează 100 cg)}$$

$$= 1000 \text{ miligrame (se notează 1000 mg)}$$

6. Unități de măsură pentru timp.

Ziua solară este intervalul de timp care trece din momentul când soarele trece la meridianul locului (când are înălțimea deasupra orizontului maximă, ceea ce popular se zice amiază) până a doua zi când trece din nou la meridianul locului.

Ziua siderală este intervalul de timp scurs între două treceri consecutive ale unei stele fixe la meridianul locului și este egală cu timpul unei rotații complete a Pământului în jurul axei polilor.

Între ziua solară și cea siderală este o diferență de aproximativ 4 minute. Această diferență, cu trecerea mai multor zile, se acumulează și se ajunge la situația ca într-o zi soarele să treacă la meridian (să fie miezul

zilei) la ora siderală 12, pentru ca după șase luni, tot la ora siderală 12 soarele să fie la meridian în partea cealaltă, adică să fie miezul nopții.

Ziua solară mijlocie se poate defini ca fiind intervalul de timp în care un mobil se mișcă uniform (mișcarea unui mobil este uniformă dacă între diferite intervale de timp egale parcurge distanțe egale) astfel încât este când înaintea, când în urma soarelui (în intervale de timp nu prea mari).

O zi solară mijlocie se împarte în *24 de ore*; ora în *60 de minute*; minutul în *60 de secunde*; intervalele mai mici ca o secundă se măsoară cu zecimea, sutimea etc., de secundă. Această împărțire pentru unitățile de timp, păstrează împărțirea sexagesimală, rămasă de la babilonieni.

Șapte zile alcătuiesc *săptămâna*, 4 săptămâni alcătuiesc *luna*, 12 luni alcătuiesc *anul*, care este intervalul de timp în care Pământul face o rotație completă în jurul Soarelui. El are 365,2422 zile. Deoarece nu are un număr întreg de zile s-a stabilit ca anul calendaristic să aibă 365 de zile iar din 4 în 4 ani să aibă 366 de zile. Anul cu 366 de zile se mai numește și an *bisect*. Lunile : ianuarie, martie, mai, iulie, august, octombrie și decembrie au câte 31 de zile ; lunile : aprilie, iunie, septembrie și noiembrie au câte 30 zile, iar luna februarie are 28 de zile (în anul bisect 29 zile)

Globul Pământesc se împarte în 24 de fusuri orare, un fus fiind cuprins între două meridiane ale căror longitudine diferă prin 15^0 .

X X
X

Pare de neînțeles faptul că, deși prima Comisie internațională pentru introducerea sistemului metric în cele mai multe țări din Europa și din celelalte continente s-a întrunit în anul 1875, abia în 1960 a fost fixat în mod definitiv, sistemul internațional de măsuri, bazat pe sistemul zecimal, având ca unități fundamentale metrul, kilogramul, secunda, etc.

Anglia a recunoscut, în mod oficial, abia în anul 1065 că „vechiul sistem de unități de măsură a fost depășit de dezvoltarea tehnică actuală” și, în consecință „urmează să se pregătească în timp de 10 ani condițiile necesare pentru folosirea sistemului metric”.

7.Exerciții

1.Renumiți matematician Arhimede a murit în anul 212 î.e.n. Câte secole și câți ani au trecut de la data morții lui Arhimede până în ziua de astăzi?

2.Un ceas merge înainte cu 13 minute și 20 de secunde și arată ora 2,5 minute și 30 de secunde. Ce oră este în realitate?

3. Un balot de stofă are 138 m și 5 dm. Din el se taie bucăți de câte 285 cm, fiecare bucată pentru un costum. Câte costume vor ieși și ce bucată rămâne?

4. O platformă de beton armat are 36 m^3 . La fiecare metru cub de beton armat s-au folosit 6 saci de câte 50 Kg de ciment și 110 Kg de fier. Cât costă materialul platformei, dacă 1 Kg de ciment costă 3000 lei, iar 1 Kg de fier costă 50000 lei?

5. Câte căruțe sunt necesare ca să transporte pământul scos prin săparea unei gropi care are o lungime de 7 m, o lățime de 2,5 m și o adâncime de 3,5 m, dacă 1 m^3 de pământ cântărește 2 t și fiecare căruță încarcă în medie 350 Kg?

Capitolul XVII. Probleme date la examene și concursuri pentru învățători (institutori)

1.Probleme date la concursul pentru ocuparea catedrelor vacante

-Februarie 1972-

1.Mulțimea A are trei elemente, numere naturale, două din ele fiind 1 și 2, al treilea necunoscut. Mulțimea B are tot trei elemente, numere naturale, două din ele fiind 3 și 4, al treilea necunoscut. Să se afle cele două elemente necunoscute, știind că:

$$\{1, 3\} \times \{2\} \subset A \times B$$

(Semnul $\times$ este folosit pentru produsul cartezian al mulțimilor).

Rezolvare. Fie $A=\{1, 2, x\}$, $B=\{3, 4, y\}$.

Din ipoteză

$$\{1, 3\} \times \{2\} = \{(1, 2), (3, 2)\} \subset$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, y), (2, 3), (2, 4), (2, y), (x, 3), (x, 4), (x, y)\}$$

relație care conduce la $x=3$ și $y=2$.

2.Un turist călătorește 4 ore și 30 minute cu trenul și 2 ore cu automobilul, parcurgând 565 Km. În altă călătorie parcurge 706 Km, mergând 3 ore și 12 minute cu automobilul și 5 ore cu trenul. Știind că atât automobilul cât și trenul nu și-au modificat viteza medie, să se calculeze:

- a)Viteza medie a trenului și viteza medie a automobilului;
- b)Distanța parcursă cu automobilul de fiecare dată;
- c)Cât la sută din distanța parcursă în fiecare din cele două călătorii a mers cu automobilul.

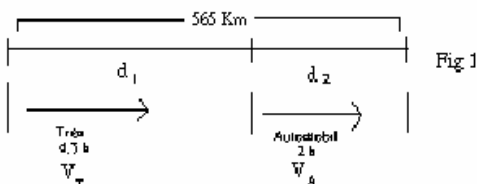
Rezolvare. Transpunem datele din problemă:

Notății

d_1 (respectiv d_2): distanța parcursă cu trenul în prima călătorie (respectiv cu automobilul în prima călătorie);

V_T (V_A): viteza medie a trenului (respectiv viteza medie a automobilului)

Desenul



d_3 (respectiv d_4): distanța parcursă cu automobilul în a doua călătorie călătorie (respectiv cu trenul în a doua călătorie);

V_T (V_A): viteza medie a trenului (respectiv viteza medie a automobilului)

a) Din Fig. 1 avem:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = v_T \cdot 4,5 \\ d_2 = v_A \cdot 2 \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 + d_2 = v_T \cdot 4,5 + v_A \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$565 = v_T \cdot 4,5 + v_A \cdot 2 \quad (1)$$

Din Fig. 2 avem:

$$\left. \begin{array}{l} d_3 = v_A \cdot 3,2 \\ d_4 = v_T \cdot 5 \end{array} \right\} \Rightarrow d_3 + d_4 = v_T \cdot 5 + v_A \cdot 3,2 \Leftrightarrow$$

$$706 = v_T \cdot 5 + v_A \cdot 3,2 \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă sistemul:

$$\begin{cases} v_T \cdot 4,5 + v_A \cdot 2 = 565 \\ v_T \cdot 5 + v_A \cdot 3,2 = 706 \end{cases}$$

cu soluția $v_T=90$ Km/h, $v_A=80$ Km/h.

b)

$$d_1 = 90 \cdot 4,5 = 405 \text{ Km};$$

$$d_2 = 80 \cdot 2 = 160 \text{ Km};$$

$$d_3 = 80 \cdot 3,2 = 256 \text{ Km};$$

$$d_4 = 90 \cdot 5 = 450 \text{ Km}.$$

c)

Distanța parcursă cu automobilul este:

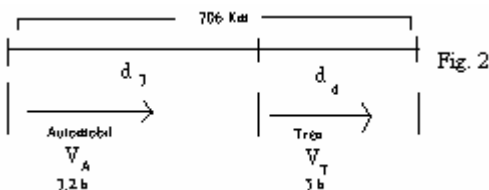
$$d_2 + d_3 = 160 + 256 = 416$$

Distanța totală parcursă cu cele două mijloace de transport este:

$$706 + 565 = 1271;$$

$$\text{Cu automobilul a mers } \left(\frac{416}{1271} \approx 0,32 \right) 32\%.$$

3. Pe distanța de 6,885 Km sunt așezate 980 conducte, unele de 8,25 m și altele de 5,75 m fiecare. Câte conducte, de fiecare fel, sunt folosite?



Rezolvare. Presupunem: pe distanța de 6,885 Km=6885 m sunt așezate conducte numai de 8,25 m. În această ipoteză am avea conducte pe distanța $980 \cdot 8,25 = 8085$ m. Diferența dintre această distanță și distanța reală se datorează faptului că fiecare conductă de 5,75 m a fost înlocuită cu o conductă de 8,25 m. La fiecare înlocuire distanța pe care sunt așezate cele 980 conducte crește cu $8,25 - 5,75 = 2,5$ m. Înseamnă că avem $(8085 - 6885) : 2,5 = 480$ conducte de 5,75 m și $980 - 480 = 500$ conducte de 8,25 m.

-Martie 1974-

1. Să se afle ce număr trebuie pus în locul lui x pentru a avea egalitatea:

$$\left\{ \left[\left(7\frac{2}{5} - 3\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{45}{56} - 2 + \frac{4}{5} \right] : \frac{3}{5} + 10 \right\} : x = 13$$

Rezolvare.

$$\left\{ \left[\left(7\frac{2}{5} - 3\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{45}{56} - 2 + \frac{4}{5} \right] : \frac{3}{5} + 10 \right\} : x = 13 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{37}{5} - \frac{11}{3} \right) \cdot \frac{45}{56} - 2 + \frac{4}{5} \right] : \frac{3}{5} + 10 \right\} : x = 13 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{37}{5} - \frac{11}{3} \right) \cdot \frac{45}{56} - 2 + \frac{4}{5} \right] : \frac{3}{5} + 10 \right\} : x = 13 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\frac{56}{15} \cdot \frac{45}{56} - 2 + \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{5}{3} + 10 \right] : x = 13 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(1 + \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{5}{3} + 10 \right] : x = 13 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{9}{5} \cdot \frac{5}{3} + 10 \right) : x = 13 \Leftrightarrow$$

$$13 : x = 13 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Din același port pleacă la aceeași oră 3 vapoare; unul face cursa dus și întors în 72 ore, altul în 14 ore, iar cel de al treilea în 192 ore.

După câte zile vapoarele vor pleca din nou în aceeași zi și la aceeași oră?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă:

Notății

V_1 : primul vapor;

V_2 : al doilea vapor;

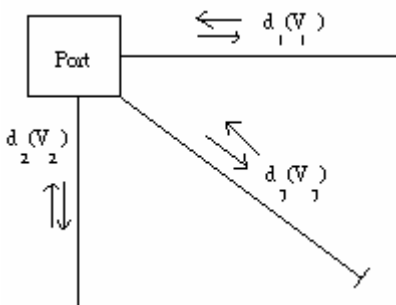
V_3 : al treilea vapor;

d_1 : distanța parcursă de V_1
până la destinație;

d_2 : distanța parcursă de V_2
până la destinație;

d_3 : distanța parcursă de V_3
până la destinație;

Desenul



Din ipoteză

V_1 parcurge până la întâlnire multiplii de 72 h;

V_2 parcurge până la întâlnire multiplii de 14 h;

V_3 parcurge până la întâlnire multiplii de 192 h;

Aceasta sugerează că vapoarele se vor întâlni după

$$\frac{[14, 72, 192]}{24} \text{ zile, adică după } \frac{4032}{24} = 168 \text{ zile.}$$

3. Într-un vas se pune apă $\frac{2}{3}$ din capacitatea sa. Se scoate apoi $\frac{1}{4}$

din conținut și mai rămân 75 litri. Care este capacitatea vasului?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă:

Desenul

Din ipoteză după ce se scoate

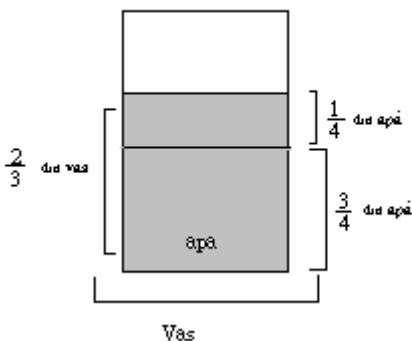
$\frac{1}{4}$ din apă rămân 75 l.

Deci s-au scos $75:3=25$ l de apă.

Astfel, în vas se află 100 l de apă, aceasta reprezentând $\frac{2}{3}$

din capacitatea vasului.

Concluzie: capacitatea vasului este $100+50=150$ l



4. Câte cărți a 4 lei și câte cărți a 10 lei se pot cumpăra cu 200 lei astfel ca în total să fie 32 cărți?

Rezolvare. Presupunem: se cumpără cărți a căror valoare este de 10 lei. În această ipoteză cărțile ar costa $32 \cdot 10 = 320$ lei. Diferența dintre această sumă și cea reală provine dela faptul că fiecare carte a 4 lei a fost înlocuită cu o carte a 10 lei. La fiecare înlocuire am pus la suma totală $10 - 4 = 6$ lei. Înseamnă că avem $(320 - 200) : 6 = 20$ cărți a 4 lei și $32 - 20 = 12$ cărți a 10 lei.

5. În 12 zile o echipă de muncitori ar efectua $\frac{2}{5}$ dintr-o lucrare, iar

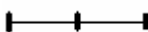
altă echipă $\frac{4}{9}$ din rest. În câte zile, lucrând împreună, ar termina lucrarea cele două echipe?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă

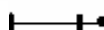
Lucrarea



Prima echipă ar efectua



A doua echipă ar efectua



Din figură deducem că în 12 zile cele două echipe ar efectua $3 \cdot 3 + 1 = 10$ segmente mici. Problema se reduce astfel, la rezolvarea unei probleme prin regula de trei simplă:

în 12 zile echipele efectuează 10 segmente mici

în x zile echipele efectuează $5 \cdot 3 = 15$ segmente mici

în care mărimile sunt direct proporționale.

Deci $x = \frac{5 \cdot 3 \cdot 12}{10} = 18$ zile.

-Martie 1975-

1. Două discuri metalice, de aceeași grosime, au razele de 3 cm și 4 cm. Ele se topesc la un loc și se face un disc cu o grosime de 4 ori mai mică. Care va fi diametrul noului disc?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă

Notății

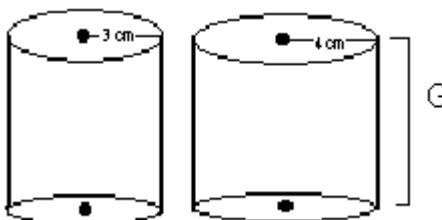
V_1 : volumul discului 1;

V_2 : volumul discului 2;

V_3 : volumul discului obținut după topirea celor două discuri, a cărui rază o notăm cu R ;

G : grosimea celor două discuri.

Desenul



Se știe că

$$V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{G}{4} \quad (1)$$

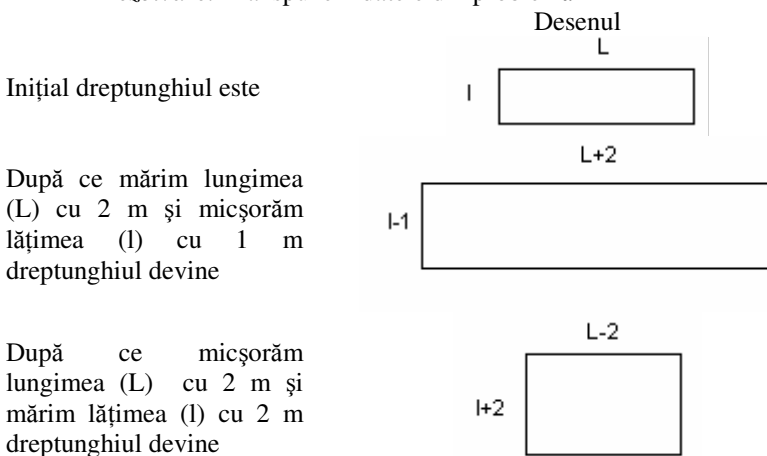
$$\text{Din ipoteză } V_3 = V_1 + V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot G + \pi \cdot 4^2 \cdot G = 25 \cdot \pi \cdot G \quad (2).$$

Din (1) și (2) avem:

$$\frac{R^2}{4} = 25 \Rightarrow R = 2 \cdot 5 = 10.$$

2. Dacă unui dreptunghi îi mărim lungimea cu 2 m și îi micșorăm lățimea cu 1 m, aria acestuia crește cu 1 m²; dacă se micșorează lungimea cu 2 m și se mărește lățimea cu 2 m, aria se micșorează cu 2 m². Care sunt dimensiunile inițiale ale dreptunghiului?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă



Din ipoteză:

$$\begin{cases} L \cdot l = (L + 2) \cdot (l - 1) - 1 \\ L \cdot l = (L - 2)(l + 2) + 2 \end{cases}$$

sistem care conduce la

$$\begin{cases} 2l - L = 3 \\ -2l + 2L = 2 \end{cases}$$

cu soluția $L=5$ m și $l=4$ m.

3. Trei bicicliști pornesc din același loc, în același timp și au viteze constante. Ei parcurg aceeași distanță în timpuri proporționale cu numerele 3, 4 și 5.

a)Știind că primul biciclist ajunge la destinație la ora 14, iar al doilea biciclist la ora 14 și 20 minute, să se afle la ce oră sosește al treilea ;

b)Dacă viteza celui de al doilea biciclist este de 30 Km/oră, să se afle vitezele celorlalți doi bicicliști.

Rezolvare.

Notatii

t_1 : timpul parcurs de primul biciclist;

t_2 :timpul parcurs de al doilea biciclist;

t_3 :timpul parcurs de al treilea biciclist;

v_1 :viteza primului biciclist;

v_2 :viteza celui de-al doilea biciclist;

v_3 :viteza celui de-al treilea biciclist.

Din ipoteză:

$$\frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{4} = \frac{t_3}{5} \quad (1)$$

a)Avem relația $t_2=t_1+0,(3)$, unde 0,(3) reprezintă 20 de minute, care

împreună cu relația $\frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{4}$ din (1) conduce la sistemul

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = -0,(3) \\ 4 \cdot t_1 - 3 \cdot t_2 = 0 \end{cases}$$

cu soluția $t_1=1$ h și $t_2=\frac{4}{3}$ h .

Cum $t_1=1$ h ora plecării celor 3 bicicliști este 13⁰⁰. Înlocuind $t_1=1$ h în (1)

obținem $t_3 = \frac{5}{3}$ h , deci al doilea biciclist sosește la ora 14 și 40 de minute.

b)Din ipoteză

$$v_2 = 30 \text{ Km/h} \Rightarrow d = 30 \cdot \frac{4}{3} = 40 \text{ Km} \Rightarrow v_3 = \frac{d}{t_3} = 24 \text{ Km/h}$$

$$\text{iar } v_1 = \frac{d}{t_1} = 40 \text{ Km/h} .$$

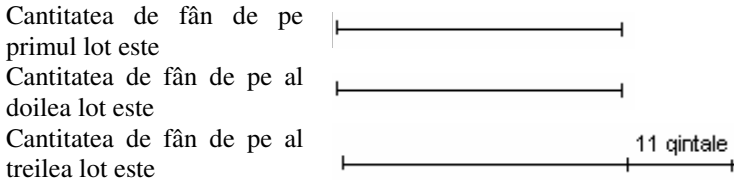
-Aprilie 1976-

1.De pe trei loturi ale unei ferme agricole s-au strâns 158 quintale de fân. De pe primele două s-au strâns cantități egale de fân, iar de pe al treilea

cu 11 qintale mai mult decât de pe fiecare din cele două. Cât fân s-a strâns de pe fiecare lot?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă

Desenul



Cum de pe toate loturile s-au strâns 158 qintale de fân rezultă că de pe primul și al doilea lot s-au strâns $(158-11):3=49$ qintale iar de pe al treilea $49+11=60$ qintale.

2. Pentru o grădiniță s-au cumpărat pachete cu brânză de 2,50 lei pachetul și pachete de unt de 8 lei pachetul, în total 23 pachete care au costat 74 lei. Câte pachete au fost din fiecare fel?

Rezolvare. Presupunem: s-au cumpărat numai pachete a 8 lei fiecare. În această ipoteză pachetele ar costa $23 \cdot 8 = 184$ lei. Diferența dintre această sumă și cea inițială se datorează faptului că fiecare pachet a 2,50 lei a fost înlocuit cu un pachet a 8 lei fiecare. La fiecare înlocuire suma inițială crește cu $8-2,5=5,5$ lei. Înseamnă că avem:

$(184-74):5,5=20$ pachete a 2,5 lei fiecare și $23-20=3$ pachete a 8 lei fiecare.

3. Să se efectueze:

$$\{31440+1040:[150-2400:(67+53)] \cdot 20\}:395+1001.$$

Rezolvare.

$$\{31440+1040:[150-2400:(67+53)] \cdot 20\}:395+1001=$$

$$[31440+1040:(150-2400:120) \cdot 20]:395+1001=$$

$$[31440+1040:(150-20) \cdot 20]:395+1001=$$

$$(31440+1040:130 \cdot 20):395+1001=$$

$$(31440+160):395+1001=$$

$$31600:395+1001=$$

$$80+1001=1081.$$

4. Să se efectueze

$$\left[1\frac{1}{10} + 7 : \left(3\frac{1}{12} - 1\frac{5}{8}\right)\right] \cdot 1\frac{1}{59}$$

Rezolvare.

$$\left[1\frac{1}{10} + 7 : \left(3\frac{1}{12} - 1\frac{5}{8}\right)\right] \cdot \frac{60}{59} =$$

$$\left[\frac{11}{10} + 7 : \left(\frac{37}{12} - \frac{13}{8} \right) \right] \cdot \frac{60}{59} =$$

$$\left(\frac{11}{10} + 7 : \frac{35}{24} \right) \cdot \frac{60}{59} =$$

$$\left(\frac{11}{10} + \frac{7 \cdot 24}{35} \right) \cdot \frac{60}{59} = \frac{413}{70} \cdot \frac{60}{59} = \frac{24780}{4130} = 6$$

**2.Probleme date la examenul de gradul II, învățători (institutori),
Universitatea Constantin Brâncuși din TG-Jiu
-August 2002-**

1. Metodologia predării-învățării unităților de măsură:

-mărimi și unități de măsură studiate;

-demersuri didactice specifice.

2. Suma a trei numere este 1988. Să se afle numerele știind că, dacă împărțim al doilea număr la primul număr obținem câtul 3 și restul 0, iar dacă împărțim pe al treilea la al doilea obținem câtul 2 și restul 108.

Rezolvare.

Transpunem datele din problemă

Desenul

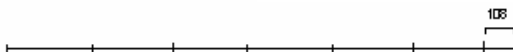
Primul număr este



Al doilea număr este



Al treilea număr este



Din ipoteză suma acestor nemere (segmente) este 1988.

Deci,

primul număr este $(1988-108):10=188$;

al doilea număr este $188 \cdot 3=564$;

al treilea număr este $564 \cdot 2+108=1236$.

3. Distanța dintre localitățile A și B este de 540 Km. Din A pleacă la ora 7 un automobil spre B, iar din B pleacă la ora 9 spre A un alt automobil, care are viteza cu 20 Km\ora mai mare. Cele două automobile se întâlnesc la ora 12. Să se afle vitezele celor două automobile și distanța parcursă de fiecare până când se întâlnesc.

Rezolvare.

Transpunem datele din problemă

Notății

A_1 :automobilul care pleacă din A spre B;

A_2 :automobilul care pleacă din B spre A;

v_1 :viteza lui A_1 ;

v_2 :viteza lui A_2 ;

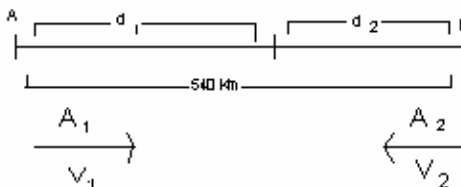
d_1 :distanța parcursă de A_1 până la întâlnire;

d_2 :distanța parcursă de A_2 până la întâlnire;

t_1 :timpul parcurs de A_1 ;

t_2 :timpul parcurs de A_2 .

Desenul



Din ipoteză

$$v_2 = v_1 + 20;$$

$$t_1 = 12 - 7 = 5 \text{ h};$$

$$t_2 = 12 - 9 = 3 \text{ h}.$$

Din figură $d_1 + d_2 = 540$.

Pe de altă parte

$$d_1 = v_1 \cdot t_1 = 5 \cdot v_1$$

$$d_2 = v_2 \cdot t_2 = 3 \cdot v_2$$

Scriem

$$d_1 + d_2 = 540 \Leftrightarrow 5 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = 540.$$

Ținând cont că $v_2 = v_1 + 20$ avem $8v_1 = 540 - 60$ deci, $v_1 = 60 \text{ Km/h}$ și $v_2 = 60 + 20 = 80 \text{ Km/h}$.

Astfel,

$$d_1 = 60 \cdot 5 = 300 \text{ Km}$$

$$d_2 = 80 \cdot 3 = 240 \text{ Km}.$$

-August 2003-

1.Evaluarea în cadrul lecțiilor de matematică:

-tipuri de evaluări;

-forme de evaluare;

-tehnici și instrumente.

2.Două eleve, Elena și Gabi, au depus la C.E.C. împreună o sumă

de bani. Elena a depus cu 306000 lei mai puțin decât $\frac{1}{2}$ din întreaga sumă,

iar Gabi a depus $\frac{3}{5}$ din rest și încă 904000 lei. Să se afle întreaga sumă depusă de ele și cât a depus fiecare.

Rezolvare.

Transpunem datele din problemă:

Suma depusă la C.E.C.
de cele două eleve este

Desenul

Elena a depus

Rămâne

Gabi a depus

Din figură, un segment mic este egal cu $904000:2=452000$ lei.

Deci,

Gabi a depus $5 \cdot 452000=2260000$ lei.

Jumătate din suma depusă este $2260000-306000=1954000$.

Elena a depus $1954000-306000=1648000$.

Întreaga sumă depusă de cele două eleve este $1954000+1954000=3908000$.

3.La un magazin de legume-fructe se aduce o cantitate de mere.

Jumătate din ea se vinde în trei zile astfel: în prima zi $\frac{1}{3}$ și încă 4 Kg, în a

doua zi $\frac{1}{2}$ din rest și încă 8 Kg, iar în a treia zi restul de 20 Kg. Cealaltă

jumătate se vinde în a patra și a cincea zi, iar raportul cantităților vândute
este $\frac{1}{2}$.

Ce cantități de mere s-au vândut în a patra și a cincea zi?

Rezolvare. Transpunem datele din problemă

Desenul

Jumătate din cantitatea
de mere este

În prima zi se vinde

Rămâne

În a doua zi se vinde

În a treia zi se vinde

Din desen

a doua zi se vinde $(20+8)+8=36$ Kg;
în prima zi se vinde $(28 \cdot 2+4):2+4=34$ Kg;
jumătate din cantitate este $30:3=90$ Kg;
în a patra zi se vând 30 Kg;
în a cincea se vând 60 Kg.

-August 2004-

1. Formarea la elevi a conceptului de număr natural

-etape;

-forme de realizare.

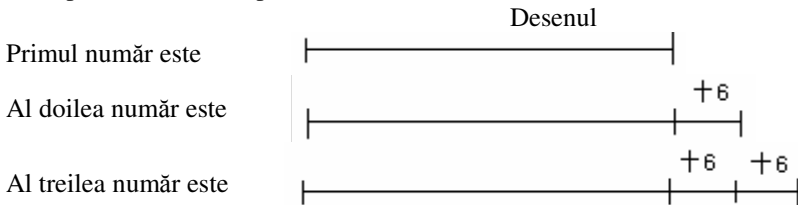
2. Rezolvați prin metoda figurativă:

Trei elevi au un număr de nuci. Dacă cel de-al treilea i-ar da primului 6 nuci, atunci toți elevii ar avea același număr de nuci. Dacă al doilea ar da primului trei nuci, numărul de nuci al primului elev ar fi un număr prim. Dacă al doilea elev ar da trei nuci celui de-al treilea, atunci numărul de nuci al acestuia ar fi tot un număr prim.

Cele două numere prime astfel obținute ar fi singurii divizori primi ai numărului $\overline{1aa}$, iar suma lor s-ar divide cu $\overline{1a}$. Câte nuci are fiecare elev?

Rezolvare.

Transpunem datele din problemă



Din figură, dacă x este primul număr atunci $x+6$ este al doilea număr, $x+12$ este al treilea număr.

Din ipoteză $x+3$ și $x+12+3=x+15$ ar fi numere prime.

Observăm că

$$\overline{1aa} \in \{100, 111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199\}$$

După scrierea divizorilor acestor numere ne convin doar divizorii primi ai lui 133, ei fiind 7 și 19.

De unde tragem concluzia că

$$x=4 \text{ (primul număr);}$$

$$x+6=10 \text{ (al doilea număr);}$$

$$x+12=16 \text{ (al treilea număr).}$$

3. Numerele 247, 297, 347 împărțite la același număr natural n dau resturile 7, 9, respectiv 11.

a) Determinați cel mai mare număr n care îndeplinește condițiile problemei.

b) Determinați cel mai mic număr n care îndeplinește condițiile problemei.

Rezolvare.

Din teorema împărțirii cu rest și ipoteză avem:

Există $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$ unici astfel încât

$$247 = nq_1 + 7, \quad 0 \leq 7 < n$$

$$297 = nq_2 + 9, \quad 0 \leq 9 < n \quad (1)$$

$$347 = nq_3 + 11, \quad 0 \leq 11 < n$$

a) Relațiile (1) se mai scriu

$$240 = nq_1, \quad 0 \leq 7 < n$$

$$288 = nq_2, \quad 0 \leq 9 < n$$

$$336 = nq_3, \quad 0 \leq 11 < n$$

Relații echivalente cu

$$2^4 \cdot 5 \cdot 3 = nq_1$$

$$2^4 \cdot 2 \cdot 3^2 = nq_2$$

$$2^4 \cdot 3 \cdot 7 = nq_3$$

Cerința este îndeplinită dacă $n = 2^4 \cdot 3$. Deci $n = 48$.

b) Cerința este îndeplinită dacă $n = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Bibliografie

- [1].Beifang Chen, *Combinatorial Analysis-Week*, 2004
- [2].Bobancu V., *Caleidoscop matematic*, Editura Albatros, 1979;
- [3].Dincă A. și colaboratorii, *Algebră pentru perfecționarea profesorilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
- [4].Ghioca A., Teodorescu N., *Culegere de probleme*, București, 1987;
- [5].Lupu C., *Metodica predării aritmeticii*, Editura Paralela 45, Pitești, 1989;
- [6].Lăzărescu D., *Paleoaritmetică și alte probleme de logică*, Editura Albatros, 1981;
- [7].Rusu E., *Bazele teoriei numerelor*, Editura tehnică, București, 1953;
- [8].Mihăileanu N. și colaboratorii, *Complemente de matematică pentru examenele de definitivat în învățământ*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970;
- [9].Schneider M., *Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică (I-IV)*, Editura Apollo, Craiova, 1981;
- [10].Sierpinsky W., *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime*, Editura Științifică, București, 1966;
- [11].Stănescu I., *Mulțimi de numere*, Editura Albatros, București, 1975;
- [12].Vladimirescu I., *Teoria probabilităților-Culegere de probleme*, Repografia Universității din Craiova, 2000.

CUPRINS

Prefață	3
Capitolul I. Elemente de logică matematică	5
1. Elemente de calculul propozițiilor	6
2. Elemente de calculul predicatelor	11
3. Teoremă directă, teoremă reciprocă. Metoda demonstrației prin reducere la absurd	14
4. Exerciții	16
Capitolul II. Elemente de teoria mulțimilor	17
1. Noțiunea de mulțime, relația de incluziune, egalitatea mulțimilor	17
2. Operații cu mulțimi	19
3. Exerciții	23
Capitolul III. Relații binare	24
Exerciții	27
Capitolul IV. Funcții	28
1. Noțiunea de funcție	28
2. Moduri de a defini o funcție	29
3. Compunerea funcțiilor	30
4. Graficul unei funcții	30
5. Funcții injective, surjective, bijective. Inversa unei funcții .	31
6. Funcții monotone, funcții pare, funcții impare	33
7. Exerciții	34
Capitolul V. Structuri algebrice	36
1. Lege de compoziție internă	36
2. Proprietățile operației interne	36
3. Tabla unei legi de compoziție	38
4. Structura de monoid	39
5. Structura de grup	40
6. Structura de inel	41
7. Structura de corp	43
8. Exerciții	45
Capitolul VI. Analiza combinatorie	46
1. Aranjamente	46
2. Permutări	47
3. Combinări	47
4. Principiul cuibului	48
5. Relația de probabilitate	49
6. Exerciții	50
Capitolul VII. Mulțimea numerelor naturale	51
1. Relația de echipotență. Cardinalul unei mulțimi	51
2. Axiomele lui Peano	52

3.	Operații cu numere naturale	53
4.	Relația de ordine în $\mathbf{N}$	55
5.	Împărțirea	57
6.	Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimi numărabile. Mulțimi nenumărabile	58
7.	Sisteme de numerație	59
8.	Exerciții	68
Capitolul VIII. Divizibilitate pe $\mathbf{N}$		69
1.	Teorema fundamentală a aritmeticii	69
2.	Criterii de divizibilitate	71
3.	Divizorii unui număr natural	72
4.	Divizori și multipli comuni a două sau mai multe numere naturale	74
5.	Algoritmul lui Euclid	75
6.	Cel mai mic multiplu comun	76
7.	Exerciții	77
Capitolul IX. Mulțimea numerelor întregi		78
1.	Construcția mulțimii numerelor întregi	78
2.	Ordonarea numerelor întregi	80
3.	Divizibilitate pe $\mathbf{Z}$	82
4.	Exerciții	82
Capitolul X. Mulțimea numerelor raționale		84
1.	Construcția mulțimii $\mathbf{Q}$	84
2.	Egalitatea fracțiilor	85
3.	Amplificarea fracțiilor	86
4.	Simplificarea fracțiilor	87
5.	Relația de ordine pe mulțimea fracțiilor	88
6.	Operații fundamentale cu fracții	89
7.	Proprietățile adunării fracțiilor	90
8.	Proprietățile înmulțirii fracțiilor	90
9.	Împărțirea fracțiilor	91
10.	Reprezentarea pe axă a numerelor raționale	92
11.	Operații de grad superior cu numere raționale	92
12.	Exerciții	95
Capitolul XI. Frații zecimale		97
1.	Frații zecimale periodice	100
2.	Frații periodice simple	101
3.	Frații periodice mixte	101
4.	Trecerea de la scrierea zecimală la scrierea cu linie de fracție ...	102
5.	Exerciții	104
Capitolul XII. Mulțimea numerelor reale		105
1.	Ordonarea numerelor reale	105

2.	Aproximări zecimale ale numerelor reale	106
3.	Adunarea și înmulțirea numerelor reale	107
4.	Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale	109
5.	Exerciții	110
Capitolul XIII. Ecuații și inecuații de gradul I. Sisteme de ecuații și inecuații de gradul I		111
1.	Ecuații de gradul I	111
2.	Inecuații de gradul I	112
3.	Sisteme de ecuații de gradul I	113
4.	Sisteme de inecuații de gradul I	114
5.	Exerciții	115
Capitolul XIV. Mușimea numerelor complexe		117
1.	Proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor complexe ...	117
2.	Forma algebrică a numerelor complexe	119
3.	Numere complexe conjugate	119
4.	Modulul unui număr complex	120
5.	Puterile numărului i	120
6.	Reprezentarea geometrică a numerelor complexe	120
7.	Exerciții	121
Capitolul XV. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică .		122
1.	Probleme tip	123
2.	Probleme nonstandard	133
3.	Exerciții	134
Capitolul XVI. Unități de măsură pentru lungime, volum, masă, timp		135
1.	Unități de măsură pentru lungime	135
2.	Unități de măsură pentru arie	137
3.	Unități de măsură pentru volum	137
4.	Unități de măsură pentru capacitate	138
5.	Unități de măsură pentru masă	138
6.	Unități de măsură pentru timp	138
7.	Exerciții	139
Capitolul XVII. Probleme date la examene și concursuri pentru învățători (institutori)		141
1.	Probleme date la concursul pentru ocuparea catedrelor vacante	141
2.	Probleme date la examenul de gradul II, învățători (institutori), Universitatea Constantin Brâncuși din TG-Jiu	149
Bibliografie		154