

Dragoș-Pătru Covei

Matematici aplicate în economie
(*Îndrumar pentru seminarii*)

**Editura Academica Brâncuși
Târgu-Jiu, 2009**

Cuprins

Prefață	3
1. Elemente de algebră liniară	4
1.1. Spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$. Produs scalar în $\mathbb{R}^n$. Norma euclidiană. Distanța în $\mathbb{R}^n$. Elemente ortogonale în $\mathbb{R}^n$	4
1.2. Segmente în $\mathbb{R}^n$. Dreapta în $\mathbb{R}^n$. Planul în $\mathbb{R}^3$. Subspații liniare. Varietăți liniare	20
1.3. Combinații liniare. Elemente liniar dependente. Elemente liniar independente. Baze. Transformări de coordonate	35
1.4. Metoda pivotului	52
1.5. Algoritmul Gramm-Schmit	57
1.6. Nucleul și imaginea unei aplicații liniare	63
1.7. Valori proprii și elemente proprii asociate unei matrice. Funcționale pătratică	67
1.8 Probleme propuse	74
2. Elemente de analiză matematică	76
2.1. Șiruri în $\mathbb{R}^n$	76
2.2. Limite de funcții în $\mathbb{R}^n$. Continuitate. Derivabilitate.....	78
2.3. Extremele funcțiilor de mai multe variabile ..	83
2.4. Probleme propuse	87
Bibliografie	88

Prefață

Oricine procedează la o examinare retrospectivă a dezvoltării mondiale va putea constata că matematica reprezintă un real suport pentru aceasta. Noile dezvoltări economice apar adesea ca rezultat al intersecției comunității științifice cu matematica.

Prezentul îndrumar acoperă programa analitică a seminarului de *Matematici aplicate în economie* ținut de autor studenților din anul întâi de la Facultatea de Științe Economice din cadrul Universității Constantin Brâncuși din Tg-Jiu.

Cartea se adresează nu matematicianului format, ci celui care vrea să-și făurească o cultură matematică riguroasă pentru a o folosi ulterior în domeniul în care va lucra. Ținând cont de aceasta autorul s-a străduit să dea un caracter cât mai accesibil problemelor rezolvate.

Autorul este recunoscător pentru orice observație sau sugestie ce va fi făcută asupra materialului.

În încheiere doresc să adresez mulțumiri domnului profesor universitar doctor Miodrag Iovanov și domnișoarei conferențiar universitar doctor Mădălina-Roxana Buneci pentru amabilitatea de a accepta calitatea de referent la această lucrare.

Asistent universitar: Dragoș - Pătru Covei
Târgu-Jiu, 2009

Capitolul 1. Elemente de algebră liniară

După parcurgerea acestui capitol ne propunem ca studenții să poată efectua operații cu elemente din $\mathbb{R}^n$, determine coordonatele unui element din $\mathbb{R}^n$ într-o bază, aplice metoda pivotului, utilizeze algoritmul Gramm -- Schmit, determine vectorii și valorile proprii ale unui operator liniar, determine nucleul și imaginea unui operator liniar, determine forma canonică a unei funcționale pătratice.

1.1. Mulțimea $\mathbb{R}^n$. Produs scalar în $\mathbb{R}^n$. Norma euclidiană. Distanța în $\mathbb{R}^n$. Elemente ortogonale în $\mathbb{R}^n$.

Problema 1.1.1. Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $(3, \alpha, -1)^T = (3, 2, \beta)^T$.

Soluție:

Din egalitatea a două elemente din $\mathbb{R}^3$ obținem $\alpha = 2$ și $\beta = -1$.

Problema 1.1.2. Să se determine $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} -\alpha + \beta + \gamma \\ \alpha - \beta + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

Datele problemei conduc la sistemul

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 3 \end{cases}$$

cu soluția

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2},$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 2,$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}.$$

Problema 1.1.3. În spațiul $\mathbb{R}^4$ se consideră elementele $x = (-3, 1, 2, -1)^T$, $y = (2, -1, 4, 3)^T$, $z = (-1, 2, -3, -5)^T$.

- (a) Să se scrie vectorii $-x, -y, -z$;
- (b) Să se calculeze $x + y, x - z, x + y + z, x - y + z$;
- (c) Să se calculeze $2x, -3y, 4z$;
- (d) Să se calculeze $4x + 3y, 3x - 2z, 5x - 4y + 3z$.

Soluție:

a) Observăm că

$$-x = (3, -1, -2, 1)^T, -y = (-2, 1, -4, -3)^T, -z = (1, -2, 3, 5)^T.$$

b) Calcule simple conduc la

$$x + y = (-3 + 2, 1 - 1, 2 + 4, -1 + 3)^T = (-1, 0, 6, 2);$$

$$x - z = (-3 + 1, -1 - 2, -2 + 3, 1 + 5)^T = (-2, -3, 1, 6)^T;$$

$$x + y + z = (-3 + 2 - 1, 1 - 1 + 2, 2 + 4 - 3, -1 + 3 - 5)^T = (-2, 2, 3, -3)^T;$$

$$x - y + z = (-3 - 2 - 1, 1 + 1 + 2, 2 + 4 - 3, -1 - 3 - 5)^T = (-6, 4, -5, -9)^T.$$

c) Raționamente similare punctelor a) și b) implică

$$2x = 2(-3, 1, 2, -1)^T = (-6, 2, 4, -2)^T;$$

$$-3y = -3(2, -1, 4, 3)^T = (-6, 3, -12, -9)^T;$$

$$4z = 4(-1, 2, -3, -5)^T = (-4, 8, -12, -20)^T.$$

d) Obținem

$$4x + 3y = (-6, 1, 20, 5)^T;$$

$$3x - 2z = (-7, -1, 12, 7)^T;$$

$$5x - 4y + 3z = (-26, 15, -15, -32)^T.$$

Problema 1.1.4. Să se determine $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha(1, 1, 1)^T + \beta(1, -1, 0)^T + \gamma(1, 0, 0)^T = (3, -1, 2)^T.$$

Soluție: Relația din enunț se mai scrie

$$(\alpha + \beta + \gamma, \alpha - \beta, \alpha)^T = (3, -1, 2)^T,$$

indeplinită dacă

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha - \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

sistem cu soluția $\alpha = 2, \beta = 3$ și $\gamma = -2$.

Problema 1.1.5. În spațiul $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele

$$x = (1, -2, 3)^T, y = (-2, 1, 4)^T, z = (1, -2, 9)^T.$$

a) Să se calculeze $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle$;

b) Să se calculeze $\|x\|, \|y\|, \|z\|, \|x + y - z\|$;

c) Să se determine elementul $u = (\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^3$ astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

$$\langle x, u \rangle = 0, \langle y, u \rangle = 0, \langle z, u \rangle = 1.$$

Soluție:

a) Avem

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 8;$$

$$\langle x, z \rangle = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 9 = 32;$$

$$\langle y, z \rangle = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 9 = 32.$$

b) Observăm că

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14};$$

$$\|y\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21};$$

$$\|z\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 9^2} = \sqrt{86};$$

$$\|x + y - z\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

c) Condițiile ce trebuie să fie îndeplinite se transformă astfel:

$$\begin{cases} \langle x, u \rangle = 0 \\ \langle y, u \rangle = 0 \\ \langle z, u \rangle = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 9\gamma = 1 \end{cases}$$

de unde deducem că:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{-18} = \frac{11}{18},$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-18} = \frac{5}{9},$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

Problema 1.1.6. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14}.$$

Soluție:

Relația din enunț devine

$$\sqrt{3^2 + (-2)^2 + \alpha^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

care conduce la ecuația $\alpha^2 = 0$ cu soluția $\alpha = 0$.

Problema 1.1.7. Să se arate că în $\mathbb{R}^m$ sunt adevărate următoarele afirmații:

- a) $(x^T)^T = x$;
- b) $(x + y)^T = x^T + y^T$;
- c) $(\lambda x)^T = \lambda x^T$;
- d) $x^T y = y^T x$;
- e) $x^T (y + z) = x^T y + x^T z$;

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ și orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Fie

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ și } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

aparținând lui $\mathbb{R}^m$.

a)

$$(x^T)^T = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \right)^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x;$$

b)

$$\begin{aligned} (x + y)^T &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}^T = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = x^T + y^T; \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 (\lambda x)^T &= \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}^T = \\
 &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda (x_1, x_2, x_3) = \lambda x^T
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 x^T y &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\
 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \\
 &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y^T x;
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 x^T (y + z) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ y_3 + z_3 \end{pmatrix} \\
 &= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + x_3 (y_3 + z_3) \\
 &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + x_3 y_3 + x_3 z_3 \\
 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = x^T y + x^T z
 \end{aligned}$$

Problema 1.1.8.

(a) Să se scrie cu ajutorul coordonatelor inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^m$;

(b) Dacă $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, atunci să se arate că

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$$

pentru orice $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$;

(c) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$, atunci să se arate că $|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq 1$;

(d) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1$, atunci să se arate că

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) \geq 1.$$

Soluție:

a) Fie

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

elemente din $\mathbb{R}^m$. Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^m$ este

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

În coordonate, este echivalentă cu

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_m\beta_m| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_m^2};$$

b) De la punctul a) observăm că inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^2$ scrisă cu ajutorul coordonatelor este

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Înlocuind în această inegalitate $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ obținem ceea ce trebuia demonstrat.

c) Se înlocuiește

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$$

în inegalitatea lui Cauchy-Schwarz pentru $\mathbb{R}^2$ și obținem concluzia;

d) Analog ca b) și c), în sensul că se scrie inegalitatea lui Cauchy-Schwarz în $\mathbb{R}^2$ și se folosește faptul că

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1.$$

Problema 1.1.9.

(a) Cu ajutorul coordonatelor să se scrie inegalitatea lui Minkowski în $\mathbb{R}^m$;

(b) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1,$$

atunci să se arate că

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \geq \sqrt{2};$$

(c) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1,$$

atunci să se arate că

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 \leq 4.$$

Soluție:

a) Fie

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

elemente din $\mathbb{R}^m$. Inegalitatea lui Minkowski în $\mathbb{R}^m$ este

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

care cu ajutorul coordonatelor se transformă în

$$\sqrt{(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \dots + (\alpha_m + \beta_m)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2} + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_m^2}.$$

b) Pentru $\mathbb{R}^2$ inegalitatea lui Cauchy-Schwarz scrisă cu ajutorul coordonatelor este

$$\sqrt{(\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Înlocuind în această inegalitate

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1$$

obținem ceea ce trebuia demonstrat.

c) Se înlocuiește $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ în inegalitatea lui Minkowski pentru $\mathbb{R}^2$ și se obține concluzia.

Problema 1.1.10. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât elementele $x = (1, 3, \alpha)^T$ și $y = (2, -1, 3)^T$ din spațiul $\mathbb{R}^3$ să fie ortogonale. Cu α astfel determinat, să se calculeze $\cos(\widehat{x, y})$.

Soluție

Punem condiția $\langle x, y \rangle = 0$ și obținem

$$2 - 3 + 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Deoarece

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \text{ și } \langle x, y \rangle = 0$$

avem $\cos(\widehat{x, y}) = 0$.

Problema 1.1.11. În $\mathbb{R}^2$ se consideră mulțimea

$$A = \{(\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2; \alpha - 3\beta = 0\}$$

și elementul $x = (1, -3)^T \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că $x \perp A$; b) Să se determine $A^\perp$.

Soluție:

a) Deoarece

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha - 3\beta = 0, \forall y = (\alpha, \beta)^T \in A$$

deducem că $x \perp A$;

b) Se știe că $A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 | x \perp y, \forall y \in A\}$. Fie

$x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ și $y = (\alpha, \beta)^T \in A$. Condiția $x \perp y$, $\forall y \in A$ este echivalentă cu $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A$, adică $x_1\alpha + x_2\beta = 0$. Pe de altă parte, din $y \in A$ avem $\alpha - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$ relație care conduce la $3\beta x_1 + x_2\beta = 0$.

Făcând în această relație abstracție de β obținem

$$A^\perp = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 3x_1 + x_2 = 0\}.$$

Problema 1.1.12. În $\mathbb{R}^3$ se consideră mulțimea

$$A = \{(\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^3; \alpha - \beta + 2\gamma = 0\}$$

și elementul $x = (1, -1, -1)^T \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se determine două elemente ortogonale ale mulțimii $A \setminus \{\theta\}$;

b) Să se arate că $x \perp A$;

c) Să se determine $A^\perp$.

Soluție

a) Se dau valori la două dintre variabile (nu ambele nule), se obțin spre exemplu $a = (1, 1, 0)^T$ și $b = (-1, 1, 1)$;

b) Deoarece

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + 2\gamma = 0, \forall y = (\alpha, \beta, \gamma)^T \in A$$

deducem că $x \perp A$;

c) Se știe că

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \perp y, \forall y \in A\}$$

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ și $y = (\alpha, \beta, \gamma)^T \in A$. Condiția $x \perp y$, $\forall y \in A$ este echivalentă cu $\langle x, y \rangle = 0$, $\forall y \in A$, adică $x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = 0$. Pe de altă parte, din $y \in A$ avem

$$\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta - 2\gamma$$

relație care conduce la $x_1(\beta - 2\gamma) + x_2\beta + x_3\gamma = 0$.

Făcând în această relație abstracție de β și γ obținem

$$A^\perp = \{x_1(\beta - 2\gamma) + x_2\beta + x_3\gamma = 0 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Problema 1.1.13. a) (Teorema lui Pitagora în $\mathbb{R}^m$) Dacă $x, y \in \mathbb{R}^m \setminus \{\theta\}$, atunci să se arate că $x \perp y$ dacă și numai dacă

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

b) Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$ sunt elemente ortogonale două câte două, atunci să se arate că:

$$\|x_1 + \dots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_m\|^2.$$

Soluție:

a) Avem

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

$\subset$ Dacă $x \perp y$ atunci $\langle x, y \rangle = 0$ și deci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

$\supset$ Relația $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ împreună cu

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

conduce la $2\langle x, y \rangle = 0$, relație care demonstrează că $x \perp y$.

b) Analog.

Problema 1.1.14. a) Dacă

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sunt elemente din spațiul $\mathbb{R}^3$, atunci să se calculeze $d(x, y)$, $d(x, z)$, $d(y, z)$.

b) Dacă

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sunt elemente din spațiul $\mathbb{R}^3$, atunci să se determine mulțimea U a elementelor

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

pentru care avem $d(x, u) = d(y, u) = d(z, u) = 1$.

Soluție:

a)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{98};$$

$$d(x, z) = \|x - z\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11};$$

$$d(y, z) = \|y - z\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11.$$

b) Relația $d(x, u) = d(y, u) = d(z, u) = 1$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} (-\alpha)^2 + (1 - \beta)^2 + (1 - \gamma)^2 = 1 \\ (1 - \alpha)^2 + (-\beta)^2 + (1 - \gamma)^2 = 1 \\ (1 - \alpha)^2 + (1 - \beta)^2 + (-\gamma)^2 = 1 \end{cases}.$$

Înmulțind prima ecuație a sistemului și adunând-o la a doua obținem

$$(1 - \alpha)^2 - (1 - \beta)^2 + (-\beta)^2 - (-\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha - 1 + \beta)(1 - \alpha + 1 - \beta) + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta - \alpha)(2 - \alpha - \beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow 2(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta = \alpha,$$

Cu un raționament analog obținem $\beta = \gamma$. Astfel că $\alpha = \beta = \gamma$, relație care conduce la

$$\alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}.$$

Am obținut

$$U = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k = \frac{4 \pm 2}{6} \right\}.$$

Problema 1.1.15. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime nevidă.

a) Să se arate că dacă $x \in A$ atunci $d(x, A) = 0$;

b) Să se găsească un exemplu de mulțime nevidă

$A \subset \mathbb{R}^m$ pentru care avem $d(x, A) = 0$, dar $x \notin A$.

Soluție:

a) Deoarece

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| \quad \text{și} \quad \|x - y\| \geq 0$$

deducem că $d(x, A) = 0$;

b) Dacă

$$A = \{1 + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R} \quad \text{și} \quad x = -1$$

atunci se observă că sunt îndeplinite ipotezele cerute.

Problema 1.1.16. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime nevidă și $x \in \mathbb{R}^m$.

a) Dacă $A \subset B$, atunci să se arate că

$$d(x, A) \geq d(x, B).$$

Soluție:

Avem

$$d(x, A) \geq d(x, B) \Leftrightarrow \inf_{y \in A} \|x - y\| \geq \inf_{z \in B} \|x - z\|.$$

Ținând cont că $B = (B \setminus A) \cup A$ avem

$$\inf_{z \in B} \|x - z\| = \begin{cases} \inf_{z_1 \in B \setminus A} \|x - z_1\| & \text{dacă } \inf_{z_1 \in B \setminus A} \|x - z_1\| \leq \inf_{z_2 \in A} \|x - z_2\| \\ \inf_{z_2 \in A} \|x - z_2\| & \text{dacă } \inf_{z_1 \in B \setminus A} \|x - z_1\| \geq \inf_{z_2 \in A} \|x - z_2\| \end{cases},$$

$$\text{deci } \inf_{y \in A} \|x - y\| \geq \inf_{z \in B} \|x - z\|.$$

Problema 1.1.17. În spațiul $\mathbb{R}^2$ se consideră mulțimea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha + \beta = 1 \right\}.$$

Să se calculeze $d(\theta, A)$.

Soluție:

Scriem

$$\begin{aligned} d(\theta, A) &= \inf_{y \in A} \|\theta - y\| = \inf_{y \in A} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \\ \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sqrt{\alpha^2 + (1 - \alpha)^2} &= \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Problema 1.1.18 Considerăm următoarele submulțimi ale lui $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se arate că $A + B = \mathbb{R}^2$.

Soluție: Prin definiție $A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$. Cum

$x + y$ este un element de forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ deducem că

$$A + B = \mathbb{R}^2.$$

Problema 1.1.19. Fie $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\theta\}$ un element dat și fie $A := \{-x, \theta, x\}$. Să se arate că există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât incluziunea $(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$ este strictă.

Soluție: Se observă că pentru $\lambda = 1$ și $\mu = -1$ incluziunea este strictă.

Problema 1.1.20. Fie A și B submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}^m$. Să se arate că:

$$a) \quad d(x, A) = d(-x, -A) \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^m;$$

$$b) \quad d(x, A + B) \leq d(x, A) + d(x, B) \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^m.$$

Soluție:

a) Avem

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| = \inf_{y \in A} \|-x - (-y)\| = \inf_{-y \in A} \|-x - (-y)\| = d(-x, -A).$$

b) Rezultă din regula paralelogramului.

1.2. Segmente în $\mathbb{R}^n$. Dreapta în $\mathbb{R}^n$. Planul în $\mathbb{R}^3$. Subspații liniare. Varietăți liniare.

Problema 1.2.1. În spațiul $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine lungimea segmentului $[x, y]$;

b) Să se determine care din următoarele puncte aparțin segmentului $[x, y]$ și care nu aparțin acestui segment:

$$z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix};$$

c) Să se determine mijlocul segmentului $[x, y]$;

d) Să se determine elementul $w \in [x, y]$ care împarte segmentul $[x, y]$ în raportul $\frac{4}{5}$.

Soluție: a) Lungimea segmentului $[x, y]$ este prin definiție

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{42}$$

b) Conform teoriei $z \in [x, y]$ dacă există $\alpha \in [0, 1]$ astfel încât $z = (1 - \alpha)x + \alpha y$, relație echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = (1 - \alpha) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(1 - \alpha) + 4\alpha \\ 3(1 - \alpha) - \alpha \\ 2(1 - \alpha) + 3\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 5\alpha \\ 3 - 4\alpha \\ 2 + \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \in [0, 1].$$

$u \in [x, y]$ dacă există $\alpha \in [0, 1]$ astfel încât $u = (1 - \alpha)x + \alpha y$, relație echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 5\alpha \\ 3 - 4\alpha \\ 2 + \alpha \end{pmatrix}$$

și deci $u \notin [x, y]$

$u \in [x, y]$ dacă există $\alpha \in [0, 1]$ astfel încât $u = (1 - \alpha)x + \alpha y$, relație echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 5\alpha \\ 3 - 4\alpha \\ 2 + \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \in [0, 1].$$

c) Un punct $w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ este mijlocul segmentului $[x, y]$,

dacă:

$$\begin{cases} w \in [x, y] \\ d(v, x) = d(v, y) \end{cases}$$

relații echivalente cu

$$\begin{cases} \text{există } \alpha \in [0, 1] \text{ astfel încât } v = (1 - \alpha)x + \alpha y, \\ \sqrt{(-1 - v_1)^2 + (3 - v_2)^2 + (2 - v_3)^2} = \sqrt{(4 - v_1)^2 + (-1 - v_2)^2 + (3 - v_3)^2}. \end{cases}$$

Din prima relație deducem că

$$\begin{cases} v_1 = -1 + 5\alpha \\ v_2 = 3 - 4\alpha \\ v_3 = 2 + \alpha \end{cases}$$

care înlocuite în a doua relație dă

$$(5\alpha)^2 + (4\alpha)^2 + (\alpha)^2 = (5 - 5\alpha)^2 + (4 - 4\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2$$

iar după efectuarea calculelor implică

$$84\alpha = 42 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Deci

$$\begin{cases} v_1 = -1 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ v_2 = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ v_3 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

d) Fie

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Condiția din enunț se scrie

$$\begin{cases} \text{există } \alpha \in [0,1] \text{ astfel încât } w = (1-\alpha)x + \alpha y \\ \frac{d(w, x)}{d(w, y)} = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Din prima relație deducem că

$$\begin{cases} w_1 = -1 + 5\alpha \\ w_2 = 3 - 4\alpha \\ w_3 = 2 + \alpha \end{cases}$$

care înlocuite în a doua relație dă

$$\begin{aligned} \sqrt{(5\alpha)^2 + (4\alpha)^2 + (\alpha)^2} &= \frac{4}{5} \sqrt{(5-5\alpha)^2 + (4-4\alpha)^2 + (1-\alpha)^2} \\ (5\alpha)^2 - 4(1-\alpha)^2 &= 0 \Leftrightarrow (5\alpha - 4 + 4\alpha)(5\alpha + 4 - 4\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{cases} w_1 = -1 + 5\frac{4}{9} = \frac{11}{9} \\ w_2 = 3 - 4\frac{4}{9} = \frac{11}{9} \\ w_3 = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}. \end{cases}$$

Problema 1.2.2. În $\mathbb{R}^2$ se consideră elementele

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine mulțimea $A \subset \mathbb{R}^2$ a punctelor egal departate de capetele segmentului $[x, y]$.

Soluție:

Fie $a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in A$. Din ipoteză trebuie ca $d(x, a) = d(y, a)$

relație echivalentă cu

$$\sqrt{(2-\alpha)^2 + (1-\beta)^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (2-\beta)^2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4.$$

Am obținut

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha + \beta = 4 \right\}.$$

Problema 1.2.3. În $\mathbb{R}^2$ se consideră punctul $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ și

vectorul $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Să se scrie ecuațiile parametrice și

ecuațiile canonice ale dreptei Δ ce trece prin punctul a și are vectorul director v .

Soluție:

Ecuațiile parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - 2\gamma \\ \xi_2 = -2 + 3\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ecuațiile canonice ale dreptei sunt

$$\frac{\xi_1 - 1}{2} = \frac{\xi_2 + 2}{3}.$$

Problema 1.2.4. În $\mathbb{R}^2$ se consideră punctul $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ și

$b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Să se scrie ecuațiile parametrice și ecuațiile

canonice ale dreptei Δ determinate de punctele a și b .

Soluție:

Ecuațiile parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{cases} \xi_1 = 2 + 6\gamma \\ \xi_2 = -3 - 2\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ecuațiile canonice ale dreptei sunt

$$\frac{\xi_1 - 2}{6} = \frac{\xi_2 + 3}{-2}.$$

Problema 1.2.5. În $\mathbb{R}^3$ se consideră punctul

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ și vectorul } v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

a) Să se scrie ecuațiile parametrice și ecuațiile canonice ale dreptei Δ ce trece prin punctul a și are vectorul director v ;

b) Să se scrie ecuațiile parametrice și ecuațiile canonice ale dreptei ce trece prin punctele a și b .

Soluție

a) Ecuațiile parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{cases} \xi_1 = -1 - 2\gamma \\ \xi_2 = 2 + 4\gamma \\ \xi_3 = -3 - 5\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ecuațiile canonice ale dreptei sunt

$$\frac{\xi_1 + 1}{-2} = \frac{\xi_2 - 2}{4} = \frac{\xi_3 + 3}{-5}.$$

b) Ecuațiile parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{cases} \xi_1 = -1 + 3\gamma \\ \xi_2 = 2 - \gamma \\ \xi_3 = -3 + 7\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ecuațiile canonice ale dreptei sunt

$$\frac{\xi_1 + 1}{3} = \frac{\xi_2 - 2}{-1} = \frac{\xi_3 + 3}{7}.$$

Problema 1.2.6. Să se arate că mulțimea

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})^T \mid x_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, m-1} \right\}$$

este subspațiu în $\mathbb{R}^m$.

Soluție: Arătăm că

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in S \Rightarrow \lambda x + \mu y \in S.$$

Dacă

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

sunt elemente din S atunci

$$\lambda x + \mu y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \dots \\ \lambda x_{m-1} + \mu y_{m-1} \end{pmatrix} \in S.$$

Problema 1.2.7. Dacă S este mulțimea punctelor de pe o dreaptă din $\mathbb{R}^2$ care conține punctul $\theta \in \mathbb{R}^2$, atunci să se arate că S este subspațiu în $\mathbb{R}^2$.

Soluție:

Arătăm că

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in S \Rightarrow \lambda x + \mu y \in S.$$

unde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mid \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Într-adevăr, dacă $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ și $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ sunt elemente din S

atunci

$$\lambda x + \mu y = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 \end{pmatrix} \in S,$$

deoarece $\lambda \alpha \xi_1 + \lambda \beta \xi_2 = 0$ și $\mu \alpha \eta_1 + \mu \beta \eta_2 = 0$ implică $\alpha(\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) + \beta(\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) = 0$.

Problema 1.2.8. Dacă S este mulțimea punctelor de pe o dreaptă din $\mathbb{R}^3$ care conține punctul $\theta \in \mathbb{R}^3$, atunci să se arate că S este subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

Soluție:

Arătăm că

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in S \Rightarrow \lambda x + \mu y \in S.$$

unde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mid \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma \xi_3 = 0, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Într-adevăr, dacă

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

sunt elemente din S atunci

$$\lambda x + \mu y = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \eta_3 \end{pmatrix} \in S,$$

deoarece

$$\begin{cases} \lambda \alpha \xi_1 + \lambda \beta \xi_2 + \lambda \gamma \xi_3 = 0 \\ \mu \alpha \eta_1 + \mu \beta \eta_2 + \mu \gamma \eta_3 = 0 \end{cases}$$

implică

$$\alpha(\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) + \beta(\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) + \gamma(\lambda \xi_3 + \mu \eta_3) = 0.$$

Problema 1.2.9. Dacă $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\theta\}$ este un element fixat, atunci să se arate că mulțimea $S = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ este subspațiu în $\mathbb{R}^m$.

Soluție:

Arătăm că $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, y, z \in S \Rightarrow \lambda y + \mu z \in S$.

Într-adevăr, dacă

$$\begin{cases} y = \alpha x_1 \\ z = \alpha x_2 \end{cases}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \text{ si } \alpha \in \mathbb{R}.$$

sunt două elemente din S atunci

$$\lambda y + \mu z = \lambda \alpha x_1 + \mu \alpha x_2 = \alpha (\lambda x_1 + \mu x_2) \in S$$

deoarece $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathbb{R}^m$.

Problema 1.2.10. În $\mathbb{R}^3$ se consideră mulțimile:

$$S_1 = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 = 0 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \right\}$$

a) Să se arate că S_1 și S_2 sunt subspații în $\mathbb{R}^3$;

b) Să se determine $S_1 \cap S_2$.

Soluție: a) Arătăm că $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in S_1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in S_1$.

Într-adevăr, dacă

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

sunt elemente din S atunci

$$\lambda x + \mu y = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \eta_3 \end{pmatrix} \in S,$$

deoarece

$$\begin{cases} 2\lambda \xi_1 - 3\lambda \xi_2 + 4\lambda \xi_3 = 0 \\ 2\mu \eta_1 - 3\mu \eta_2 + 4\mu \eta_3 = 0 \end{cases}$$

implică $2(\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) - 3(\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) + 4(\lambda \xi_3 + \mu \eta_3) = 0$.

Analog se demonstrează că S_2 este subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

b) $S_1 \cap S_2$ este mulțimea $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ din $\mathbb{R}^3$ ale caror coordonate satisfac sistemul

$$\begin{cases} 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Matricea acestui sistem este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un minor de ordinul 2 nenul este

$$MO_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

deci $\text{rang } A = 2 < \text{numărul necunoscute}$, ceea ce demonstrează că sistemul este compatibil simplu nedeterminat în care ξ_1, ξ_2 sunt necunoscute principale iar ξ_3 este necunoscută secundară.

Notăm ξ_3 prin α . Sistemul devine

$$\begin{cases} 2\xi_1 - 3\xi_2 = -\alpha \\ \xi_1 - \xi_2 = -2\alpha \end{cases}.$$

cu soluțiile

$$\xi_1 = -5\alpha \text{ și } \xi_2 = -3\alpha.$$

Am obținut $x = (-5\alpha, -3\alpha, \alpha)^T = \alpha(-5, -3, 1)^T$, astfel că

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \alpha(-5, -3, 1)^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Problema 1.2.11. În $\mathbb{R}^2$ se consideră mulțimile

$$S_1 = \left\{ (\alpha, 0)^T \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \right\}, S_2 = \left\{ (0, \beta)^T \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Să se arate că S_1 și S_2 sunt subspații complementare;

b) Să se arate că $S_1 \cup S_2$ nu este subspațiu în $\mathbb{R}^2$.

Soluție:

a) Deoarece $S_1 \cap S_2 = \{\emptyset\}$, rezultă că S_1, S_2 sunt sumanzi direcți, în plus $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^m$. Ultima relație ne spune că S_1 și S_2 sunt subspații complementare.

b) Observăm că $(1,0)^T, (0,1)^T \in S_1 \cup S_2$ dar $(1,0)^T + (0,1)^T = (1,1)^T \notin S_1 \cup S_2$, ori aceasta spune că $S_1 \cup S_2$ nu este subspațiu în $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.2.12. În $\mathbb{R}^3$ se consideră mulțimile

$$S_1 = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\xi_1}{2} = \frac{\xi_2}{-3} = \frac{\xi_3}{4} \right\}.$$

Să se arate că S_1 și S_2 sunt subspații complementare. Mai mult, să se arate că $S_1^\perp = S_2$.

Soluție:

$S_1 \cap S_2$ este mulțimea $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ din $\mathbb{R}^3$ ale caror coordonate satisfac sistemul

$$\begin{cases} 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 - 2\xi_3 = 0 \\ 4\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Un minor de ordinul 3 nenul este

$$MO_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -34,$$

deci $\text{rang } A = 3 =$ numărul necunoscutelor, ceea ce probează că sistemul este compatibil determinat. Rezultă $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Am arătat că $S_1 \cap S_2 = \{\theta\}$, deci S_1 și S_2 sunt subspații complementare.

Demonstrăm că $S_1^\perp = S_2$. Pentru aceasta observăm că $2\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0$ este un sistem omogen dublu nedeterminat, astfel ξ_1 este necunoscuta principală iar ξ_2, ξ_3 necunoscutele secundare. Deoarece $\xi_1 = \frac{3\xi_2 - 4\xi_3}{2}$ și

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\xi_2 - 4\xi_3}{2} \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obținem

$$S_1 = \left\{ \xi_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$Sp \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se știe că

$$S_1^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x \perp y, \forall y \in S_1 \right\}$$

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ și $y \in S_1$. Condiția $x \perp y$,

$\forall y \in S_1$ este echivalentă cu $\langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in S_1$. Obținem

$$\begin{cases} \frac{3}{2}y_1 + y_2 = 0 \\ -2y_1 + y_3 = 0 \end{cases}$$

sistem echivalent cu $\frac{\xi_1}{2} = \frac{\xi_2}{-3} = \frac{\xi_3}{4}$. Am demonstrat că

$$S_1^\perp = S_2.$$

Problema 1.2.13. Dacă $S \subset \mathbb{R}^m$ este subspațiu atunci să se arate că

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \perp S\}$$

este subspațiu al lui $\mathbb{R}^m$.

Soluție:

Arătăm că

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in S^\perp \Rightarrow \lambda x + \mu y \in S^\perp.$$

Într-adevăr, dacă $x, y \in S^\perp$ atunci

$$\begin{cases} \langle x, z \rangle = 0, \forall z \in S \\ \langle y, z \rangle = 0, \forall z \in S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \lambda x, z \rangle = 0, \forall z \in S \\ \langle \mu y, z \rangle = 0, \forall z \in S \end{cases}$$

relații care conduc la $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = 0, \quad \forall z \in S$. Ultima relație

implică $\lambda x + \mu y \in S^\perp$.

Problema 1.2.14. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Să se arate că subspațiul S al soluțiilor sistemului este o dreaptă în $\mathbb{R}^3$. Să se scrie ecuațiile parametrice ale acestei drepte.

Soluție: Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Un minor principal este

$$MO_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

deci $\text{rang } A = 2 < \text{numarul necunoscutelor}$, ceea ce probează că sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Considerăm α_3 necunoscuta secundară și o notăm prin a . Sistemul devine

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = -a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3a \end{cases}$$

cu soluția $\alpha_1 = \frac{4}{3}a$, $\alpha_2 = \frac{a}{3}$. Am demonstrat că $\alpha_1 = \frac{1}{3}a$, $\alpha_2 = \frac{4a}{3}$, $\alpha_3 = a$, ori aceasta ne spune că soluțiile sistemului reprezintă o dreaptă ce trece prin punctul $(0, 0, 0)^T$ și are vectorul director $v = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)^T$. Ecuațiile parametrice ale acestei drepte sunt

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{3}\gamma \\ \xi_2 = \frac{4}{3}\gamma \\ \xi_3 = \gamma. \end{cases}$$

Problema 1.2.15. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 6\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Să se arate că subspațiul S al soluțiilor sistemului este un plan în $\mathbb{R}^3$. Să se scrie ecuația generală a acestui plan.

Soluție:

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se observă că determinantul și toți minorii de ordinul 2 ai acestei matrici sunt nuli. Din acest motiv sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Fie α_1 necunoscuta principală iar α_2, α_3 necunoscute secundare. Notăm α_2, α_3 prin a respectiv b . Avem $\alpha_1 = 2a + c$. Deoarece soluțiile acestui sistem sunt de fapt soluțiile ecuației $\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ deducem că spațiul soluțiilor sistemului este un plan. Ecuația planului este $\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 = 0$.

Problema 1.2.16. *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Să se arate că varietatea liniară V al soluțiilor sistemului, reprezintă o dreaptă în $\mathbb{R}^3$. Să se scrie ecuațiile parametrice ale acestei drepte și să se determine subspațiul director al lui V .

Soluție:

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un minor principal este

$$MO_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

deci $\text{rang } A = 2 = \text{rangul matricii extinse}$ ceea ce spune că sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Considerăm α_3

necunoscuta secundară și o notăm prin a . Sistemul devine

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 = 1 - a \\ \alpha_1 - \alpha_2 = -2 - a \end{cases}$$

cu soluția $\alpha_1 = -a - \frac{7}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{3}{2}$. Am demonstrat că

$\alpha_1 = -a - \frac{7}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{3}{2}$, $\alpha_3 = a$, ori aceasta arată că soluțiile sistemului reprezintă o dreaptă ce trece prin punctul $(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 0)^T$ și are vectorul director $v = (-1, 0, 1)^T$. Ecuațiile parametrice ale acestei drepte sunt

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{7}{2} - \gamma \\ \xi_2 = -\frac{3}{2} \\ \xi_3 = \gamma. \end{cases}$$

Subspațiul director al lui V este $S = \{k(-1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}\}$.

1.3. Combinații liniare. Elemente liniar dependente. Elemente liniar independente. Baze. Transformări de coordonate.

Problema 1.3.1. În $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele $x_1 = (2, 1, -3)^T$, $x_2 = (-3, -1, 3)^T$, $x_3 = (-1, 2, 1)^T$ și $x = (3, 6, -4)^T$. Să se arate că elementul x este o combinație liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 .

Soluție: x este o combinație liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 dacă există numerele reale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ astfel încât $x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$, relație echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - 3\gamma_2 - \gamma_3 = 3 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_3 = 6 \\ -3\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = -4 \end{cases}$$

având soluția

$$\gamma_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1,$$

$$\gamma_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{7} = -1,$$

$$\gamma_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{14}{7} = 2.$$

Am găsit numerele reale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ cu proprietatea cerută.

Problema 1.3.2. În $\mathbb{R}^4$ se consideră elementele $x_1 = (1, 2, 1, 2)^T$, $x_2 = (1, -1, 4, 5)^T$, $x_3 = (1, -2, 5, 6)^T$ și $x = (2, -2, 8, 10)^T$. Să se arate că elementul x este o combinație liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 .

Soluție: x este o combinație liniară a elementelor x_1, x_2, x_3

dacă există numerele reale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ astfel încât

$$x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$

relație echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_3 = -2 \\ \gamma_1 + 4\gamma_2 + 5\gamma_3 = 8 \\ 2\gamma_1 + 5\gamma_2 + 6\gamma_3 = 10 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Avem un minor de ordinul 2 nenul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

iar toți minorii de ordinul 3 sunt nuli, deci $\text{rang } A = 2$.

Matricea extinsă este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

având rangul 2. Am demonstrat că $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$.

Conform teoremei Kronecker-Capelli sistemul este compatibil.

Notăm necunoscuta secundară γ_3 prin a și considerăm primele 2 ecuații ale sistemului, avem

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 2 - a \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 = -2 + 2a \end{cases}$$

cu soluția $\gamma_1 = \frac{a}{3}$, $\gamma_2 = \frac{6-4a}{3}$, $\gamma_3 = a$.

Am demonstrat că

$$x = \frac{a}{3}x_1 + \frac{6-4a}{3}x_2 + ax_3.$$

Problema 1.3.3. În $\mathbb{R}^4$ se consideră elementele

$$x_1 = (2, 1, 1, 4)^T, x_2 = (-3, 2, -12, -15)^T, x_3 = (1, -3, 11, 9)^T$$

și $x = (-1, 0, -1, 0)^T$. Să se arate că elementul x nu este o combinație liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 .

Soluție: x este o combinație liniară a elementelor x_1, x_2, x_3 dacă există numerele reale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ astfel încât

$$x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$

relație echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - 3\gamma_2 + \gamma_3 = -1 \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 - 3\gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - 12\gamma_2 + 11\gamma_3 = -1 \\ 4\gamma_1 - 15\gamma_2 + 9\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -12 & 11 \\ 4 & -15 & 9 \end{pmatrix}.$$

Avem un minor de ordinul 3 nenul:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 203,$$

deci $\text{rang } A = 3$.

Matricea extinsă este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -12 & 11 & -1 \\ 4 & -15 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

și are rangul 4. Am demonstrat că $\text{rang } A \neq \text{rang } \bar{A}$. Conform teoremei Kronecker-Capelli sistemul este incompatibil. În concluzie x nu se poate scrie ca o combinație liniară.

Problema 1.3.4. În $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele $x_1 = (-1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, -1, 1)^T$. Să se determine subspațiul generat de mulțimea $A = \{x_1, x_2\}$.

Soluție:

$x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \text{Sp}(A)$ dacă și numai dacă există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lambda x_1 + \mu x_2 = x$, adică

$$\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} -\lambda + \mu = \xi_1 \\ \lambda - \mu = \xi_2 \\ \lambda + \mu = \xi_3. \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului este 2, deci trebuie ca rangul matricei extinse să fie 2, echivalent cu

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \xi_1 \\ 1 & -1 & \xi_2 \\ 1 & 1 & \xi_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(\xi_1 + \xi_2) = 0.$$

Astfel

$$Sp(A) = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 = 0\}.$$

Problema 1.3.5. În $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele $x_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ și $x_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$.

a) Să se arate că vectorii x_1, x_2 sunt coliniari dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

b) Să se determine subspațiul generat de mulțimea $A = \{x_1, x_2\}$.

Soluție:

x_1, x_2 sunt coliniari dacă există $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $y = \lambda x$, adică

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix},$$

relație echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda \alpha_1 = \beta_1 \\ \lambda \alpha_2 = \beta_2 \\ \lambda \alpha_3 = \beta_3 \end{cases}$$

care este compatibil dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Acest lucru este mai ușor observabil dacă scriem matricea

sistemului $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$

și matricea extinsă a sistemului

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

b) Analog ca în exercițiul precedent se ajunge la faptul că $Sp(A)$ este planul de ecuație

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \xi_1 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \xi_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \xi_3 = 0,$$

care se scrie sub forma echivalentă

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \xi_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \xi_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 1.3.6. Să se arate că următoarele elemente din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependente:

a) $x_1 = (1, -2, 1)^T, x_2 = (2, 1, -1)^T, x_3 = (7, -4, 1)^T;$

b) $x_1 = (2, -3, 7)^T, x_2 = (2, 0, -6)^T, x_3 = (4, -3, 1)^T;$

c) $x_1 = (-1, 2, 1)^T, x_2 = (2, -4, -2)^T.$

Soluție: a) x_1, x_3, x_3 sunt liniar dependente dacă există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ numere reale nu toate nule astfel încât

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta$$

altfel scris

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

a cărui matrice are rangul $2 <$ numărul necunoscutelor (=numărul elementelor ce intră în combinație). În consecință sistemul admite și soluții diferite de soluția banală, ceea ce justifică cerința Problemei.

b) Privind cazul a) putem decide dacă x_1, x_2, x_3 sunt liniar dependente în funcție de rangul matricei formate din coordonatele acestor elemente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul nostru A are rangul 2 și deci obținem concluzia.

c) Matricea formată de coordonatele acestor elemente este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cu rangul $1 <$ numărul elementelor intrate în combinație și deci x_1, x_2 sunt liniar dependente.

Problema 1.3.7. *Să se arate că următoarele elemente din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependente:*

a) $x_1 = (1, 1, 1)^T, x_2 = (1, 2, 3)^T, x_3 = (2, -1, 1)^T;$

b) $x_1 = (-1, 1, 1)^T, x_2 = (1, -1, 1)^T, x_3 = (1, 1, -1)^T;$

c) $x_1 = (1, 2, -1)^T, x_2 = (2, -1, 3)^T.$

Soluție: a) x_1, x_2, x_3 sunt liniar independente dacă o combinație liniară a acestor elemente dă elementul nul rezultă toți scalarii nuli, adică

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

altfel scris

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

a cărei matrice are rangul 3 = numărul necunoscutelor (=numărul elementelor ce intră în combinație). În consecință sistemul admite doar soluția banală, ceea ce justifică cerința Problemeii.

b) Privind cazul a) putem decide dacă x_1, x_2, x_3 sunt liniar independente în funcție de rangul matricei formate din coordonatele acestor elemente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul nostru A are rangul 3 și deci concluzia.

c) Matricea formată de coordonatele acestor elemente este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

cu rangul 2 = numărul elementelor intrate în combinație și deci x_1, x_2 sunt liniar independente.

Problema 1.3.8. În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii liniar independenți u, v și w . Să se arate că vectorii: $x_1 = u + v$,

$x_2 = u - v$, $x_3 = u - 2v + w$, sunt linear independenți.

Soluție:

Realizăm o combinație lineară a elementelor x_1, x_2, x_3 :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(u + v) + \lambda_2(u - v) + \lambda_3(u - 2v + w) = \theta \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)v + \lambda_3 w = \theta,$$

și folosim faptul că u, v și w sunt linear independente, obținem sistemul:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

cu soluția $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ și, în consecință, faptul că x_1, x_2, x_3 sunt linear independente.

Problema 1.3.9. Să se determine rangul următoarelor sisteme de elemente din $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(-1, 1, 0)^T, (2, -1, 1)^T, (1, 0, 1)^T\} \\ S_2 &= \{(0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T\} \\ S_3 &= \{(1, 2, 1)^T, (-1, 1, -1)^T, (2, -1, 3)^T, (2, 2, 3)^T\} \\ S_4 &= \{(1, 2, -1)^T, (-1, -2, 1)^T, (2, 4, -2)^T\} \end{aligned}$$

Soluție:

A determina rangul unui sistem de elemente este echivalent cu a determina rangul matricei coordonatelor elementelor ce alcătuiesc sistemul, așadar

$$AS_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2 deci și S_1 are rangul 2.

$$AS_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

are rangul 3 deci și S_1 are rangul 3.

$$AS_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

are rangul 3 deci și S_3 are rangul 3.

$$AS_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

are rangul 1 deci și S_4 are rangul 1.

Problema 1.3.10. Să se pună în evidență elementele liniar independente din mulțimea $S = \{x_1, x_2, x_3\}$, unde

$$x_1 = (2, -1, -3)^T, x_2 = (-1, 2, 1)^T, x_3 = (1, 1, -2)^T.$$

Soluție:

Deoarece rangul matricei sistemului S este 2 deducem că nu putem avea elemente liniar independente decât 2 câte 2. Se observă că x_1 și x_2 ; x_1 și x_3 ; x_2 și x_3 verifică cerința problemei.

Problema 1.3.11. Să se arate că elementele $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, 1, 0)^T$, $x_3 = (1, 0, 0)^T$, constituie o bază B a spațiului $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele elementelor $x = (4, -3, 2)^T$ și $y = (a, b, c)^T$ în baza B .

Soluție:

x_1, x_2, x_3 este sistem liniar independent deoarece matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

coordonatelor acestor elemente are rangul 3.

x_1, x_2, x_3 este sistem de generatori deoarece dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este finită. Am demonstrat că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază.

Se știe că dacă există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unic determinate astfel încât

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

atunci $x_B = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B .

Relația din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ \lambda_1 = 2 \end{cases}$$

având soluția $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 7$, deci $x_B = (2, -5, 7)^T$.

Analog, dacă există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unic determinate astfel încât

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

atunci $y_B = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ reprezintă coordonatele elementului y în baza B .

Relația din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ \lambda_1 = c \end{cases}$$

având soluția $\lambda_1 = c, \lambda_2 = b - c, \lambda_3 = a - b$, deci

$$x_B = (c, b - c, a - b)^T.$$

Problema 1.3.12. Să se determine dimensiunea subspațiului

$$S = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in R^3 \mid \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0\} \subset R^m$$

și să se pună în evidență o bază a lui S . Să se determine coordonatele elementului $x = (1, 3, 2)^T \in S$ în baza B .

Soluție:

Sistemul $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0$ este compatibil dublu nedeterminat.

Presupunem ξ_1 necunoscuta principală și notăm necunoscutele secundare astfel: $\xi_2 = a$, $\xi_3 = b$, obținem

$$\xi_1 = a - b.$$

Deci

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T &= (a - b, a, b)^T = \\ &= a(1, 1, 0)^T + b(-1, 0, 1)^T. \end{aligned}$$

Atunci $B = \{(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T\}$ reprezintă o bază în S .

Dacă există numerele reale λ_1, λ_2 unic determinate astfel încât

$$y = \lambda_1(1, 1, 0)^T + \lambda_2(-1, 0, 1)^T$$

atunci $x_B = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B .

Relația din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

având soluția $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, deci $x_B = (3, 2)^T$.

Problema 1.3.13. Să se determine dimensiunea subspațiului $S \subset \mathbb{R}^3$ generat de elementele $x_1 = (1, -2, -1)^T$, $x_2 = (2, 3, -1)^T$, $x_3 = (3, 1, -2)^T$, $x_4 = (-1, -5, 0)^T$.

Soluție:

Matricea coordonatelor acestor elemente este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un minor de ordinul 2 nenul este:

$$MO_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$

Minorii de ordinul 3 ce se pot forma cu minorul de ordinul doi sunt:

$$MO_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad MO_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

avem că $\text{rang } A = 2$ și deci $\text{rang } S = 2$.

Problema 1.3.14. Să se găsească dimensiunea și o bază a subspațiului soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 + 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 + 5\alpha_5 = 0. \end{cases}$$

Soluție: Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

cu

$$MO_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 36 \neq 0.$$

Obținem că $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sunt necunoscute principale iar α_1, α_5 sunt necunoscute secundare. Le notăm prin a respectiv prin b .

Sistemul devine

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = -a - 3b \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = -a - b \\ 6\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 = -3a - 5b. \end{cases}$$

Cu soluția

$$\left\{ \alpha_2 = -\frac{11}{6}b - \frac{1}{2}a, \alpha_4 = \frac{2}{3}b, \alpha_3 = \frac{2}{3}b \right\}.$$

Am obținut $\dim(S) = 3$. Din

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

avem baza

$$B = \{x_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0)^T, x_2 = (0, -\frac{11}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)^T\}.$$

Problema 1.3.15. În $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele $x_1 = (2, -1, 1)^T$, $x_2 = (1, -1, 2)^T$, $x_3 = (-1, 2, -1)^T$.

a) Să se arate că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$;

b) Să se determine coordonatele elementului

$x = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ în baza B .

Soluție: a) x_1, x_2, x_3 este sistem liniar independent deoarece matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a coordonatelor acestor elemente are rangul 3.

x_1, x_2, x_3 este sistem de generatori deoarece dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este finită. Am demonstrat că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază.

b) Se știe că dacă există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unic determinate astfel încât

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

atunci

$$x_B = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$$

reprezintă coordonatele elementului x în baza B .

Relația din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = \alpha \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = \beta \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = \gamma \end{cases}$$

având soluția

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{4}\beta + \frac{3}{4}\alpha$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{4}\alpha,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}\gamma + \frac{3}{4}\beta + \frac{1}{4}\alpha,$$

deci

$$x_B = \left(-\frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{4}\beta + \frac{3}{4}\alpha, \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{4}\gamma + \frac{3}{4}\beta + \frac{1}{4}\alpha\right)^T.$$

Problema 1.3.16. În $\mathbb{R}^3$ se consideră subspațiul

$$S = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0\}$$

a) Să se determine o bază B a subspațiului S ;

b) Să se arate că $x = (-3, -1, 1)^T \in S$;

c) Să se determine x_B .

Soluție:

a) Sistemul $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0$ este compatibil dublu nedeterminat. Presupunem ξ_1 necunoscuta principală și notăm necunoscutele secundare astfel: $\xi_2 = a$, $\xi_3 = b$, obținem $\xi_1 = a - 2b$. Deci

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T &= (a - 2b, a, b)^T = \\ &= a(1, 1, 0)^T + b(-2, 0, 1)^T. \end{aligned}$$

Atunci $B = \{(1, 1, 0)^T, (-2, 0, 1)^T\}$ reprezintă o bază în S ;

b) Deoarece $-3 + 1 + 2 = 0$ deducem că $x \in S$;

c) Dacă există numerele reale λ_1, λ_2 unic determinate astfel încât

$$x = \lambda_1(1, 1, 0)^T + \lambda_2(-2, 0, 1)^T$$

atunci $x_B = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ reprezintă coordonatele elementului x în baza B .

Relația din care se determină aceste numere este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = -3 \\ \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

având soluția

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

deci

$$x_B = (-1, 1)^T.$$

1.4. Metoda pivotului.

Problema 1.4.1. Să se calculeze inversele următoarei matrice cu ajutorul metodei pivotului:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluție: a) Din tabelul:

Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	e_1	e_2	e_3
e_1	2	1	3	1	0	0
e_2	2	4	1	0	1	0
e_3	3	2	5	0	0	1
C_1^A	1	1/2	3/2	1/2	0	0
e_2	0	3	-2	-1	1	0
e_3	0	1/2	1/2	-3/2	0	1
C_1^A	1	0	11/6	2/3	-1/6	0
C_2^A	0	1	-2/3	-1/3	1/3	0
e_3	0	0	5/6	-4/3	-1/6	1
C_1^A	1	0	0	18/5	1/5	-11/5
C_2^A	0	1	0	-7/5	1/5	4/5
C_3^A	0	0	1	-8/5	-1/5	6/5

deducem că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18/5 & 1/5 & -11/5 \\ -7/5 & 1/5 & 4/5 \\ -8/5 & -1/5 & 6/5 \end{pmatrix}.$$

b), c) Analog obținem că

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -5/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5/2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.4.2. Să se rezolve sistemele următoare cu ajutorul metodei pivotului:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 7 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 4 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 7 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Soluție: Din tabelul:

	α_1	α_2	α_3	Termenul liber
e_1	1	1	1	8
e_2	1	2	-1	3
e_3	2	1	2	7
α_1	1	1	1	8
e_2	0	1	-2	-5
e_3	0	-1	0	-9
α_1	1	0	3	13
α_2	0	1	-2	-5
e_3	0	0	-2	-14
α_1	1	0	0	-8
α_2	0	1	0	9
α_3	0	0	1	7

obținem $\alpha_1 = -8, \alpha_2 = 9, \alpha_3 = 7$.

b) Analog se obține $\alpha_1 = 13/5, \alpha_2 = -2/5, \alpha_3 = 2/5$.

Problema 1.4.3. Folosind metoda pivotului, să se determine rangul următoarelor matrici:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluție: Din tabelul:

	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A
e_1	1	3	1	-2	-3
e_2	1	4	3	-1	-4
e_3	2	3	-4	-7	-3
e_4	3	8	1	-7	-8
C_1^A	1	3	1	-2	-3
e_2	0	1	2	1	-1
e_3	0	-3	-6	-3	3
e_4	0	-1	-2	-1	1
C_1^A	1	0	-5	-5	0
C_2^A	0	1	2	1	-1
e_3	0	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0

deducem că $\text{rang } A = 2$ (deoarece în bază au intrat 2 elemente);

b) Analog $\text{rang } B = 3$;

c) Analog $\text{rang } C = 2$.

Problema 1.4.4. Să se determine câte o soluție de bază nenegativă pentru sistemele:

$$a) \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 + 5\alpha_4 = 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 8. \end{cases}$$

Soluție: a) Calculele se organizează astfel

Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	e_1	e_2	b	b_k/a_{kj}
e_1	2	1	-4	5	1	0	4	$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{2}{1}\right\} = 2$
e_2	1	1	-2	2	0	1	2	$\Leftarrow \text{Tabel I}$
C_1^A	1	1/2	-2	5/2		0	2	$\min\left\{\frac{2}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$
e_2	0	1/2	0	-1/2		1	0	$\Leftarrow \text{Tabel II}$
C_1^A	1	0	-3	3			2	$\min\left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$
C_2^A	0	1	0	-1			0	$\Leftarrow \text{Tabel III}$
C_4^A	1/3	0	-1	1			2/3	$\Leftarrow \text{Tabel IV.}$
C_2^A	1/3	1	-1	0			2/3	

În tabelul I se pot introduce în bază oricare din elementele C_1^A, C_2^A sau C_4^A , dar nu C_3^A care are toate coordonatele

negative. Introducem în bază elementele C_1^A . Rapoartele $\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}$ fiind egale se poate scoate deci din bază e_1 sau e_2 .

Se obține o soluție de bază nenegativă degenerată.

În tabelul II obținem soluția de bază nenegativă degenerată $x = (2, 0, 0, 0)^T$. Eliminarea elementului C_2^A din baza $\{C_1^A, C_2^A\}$ nu modifică soluția. Singurul element care poate fi introdus în baza $\{C_1^A, C_2^A\}$ este C_4^A . Obținem astfel tabelul

IV și soluția de bază nenegativă $x = (0, 2/3, 0, 2/3)^T$, care este nedegenerată.

b) Analog.

Problema 1.4.5. Să se determine, cu ajutorul metodei pivotului, $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 3 \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 11\alpha_3 - 7\alpha_4 = 3 \end{cases}$$

să fie compatibil.

Soluție: Calculele se organizează astfel

Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	b
e_1	1	2	-3	1	1
e_2	3	1	1	-2	3
e_3	3	-4	11	-7	a
C_1^A	1	2	-3	1	1
e_2	0	-5	10	-5	0
e_3	0	-10	20	-10	a - 3
C_1^A	1	0	1	-1	1
C_2^A	0	1	-2	1	0
e_3	0	0	0	0	a - 3

Din tabel observăm că sistemul este compatibil dacă și numai

dacă $a = 3$ (în acest caz rangul matricei sistemului ar fi egal cu rangul matricei extinse).

Problema 1.4.6. Să se determine dimensiunea subspațiului $S \subset \mathbb{R}^3$ generat de elementele

$$x_1 = (1, -1, 2)^T, x_2 = (2, -3, 1)^T, x_3 = (3, -4, 3)^T, x_4 = (-1, 2, 1)^T, \\ x_5 = (2, -2, 4)^T$$

și să se pună în evidență o bază a lui S .

Soluție: Din tabelul

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	1	2	3	-1	2
e_2	-1	-3	-4	2	-2
e_3	2	1	3	1	4
x_1	1	2	3	-1	2
e_2	0	-1	-1	1	0
e_3	0	-3	-3	3	0
x_1	1	0	1	1	2
x_2	0	1	1	-1	0
e_3	0	0	0	0	0

deducem că dimensiunea lui S este 2 și că $B = \{x_1, x_2\}$.

1.5. Algoritmul Gramm-Schmit.

Problema 1.5.1 În $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, 1, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, 0)^T$.

a) Să se arate că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$;

b) Să se determine o bază ortonormată B' a lui $\mathbb{R}^3$,

obținută prin ortonormarea bazei B .

Soluție: a) x_1, x_2, x_3 sunt liniar independenți, deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

este nenul.

x_1, x_2, x_3 sunt sistem de generatori, deoarece dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este finită.

b) Determinăm $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ din relațiile:

$$f_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1$$

$$f_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2$$

$$f_3 = \frac{1}{\|g_3\|} g_3$$

cu

$$g_1 = x_1$$

$$g_2 = x_2 + ax_1$$

$$g_3 = x_3 + mx_2 + nx_1$$

a, m, n sunt numere reale ce se vor determina, din relația:

$$\langle g_i, g_j \rangle = 0, i \neq j.$$

f_1 se determină din

$$f_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$$

f_2 se determină din

$$\langle g_1, g_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_1, x_2 + ax_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle + a \langle x_1, x_1 \rangle = 0 \Rightarrow a = -\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = -\frac{2}{3}$$

adică $g_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$ conduce la

$$f_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3})^T = (\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{2}{\sqrt{6}})^T.$$

f_3 se determină din relațiile:

$$\begin{aligned} \langle g_1, g_3 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle x_1, x_3 + mx_2 + nx_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ \langle x_1, x_3 \rangle + m\langle x_1, x_2 \rangle + n\langle x_1, x_1 \rangle &= 0 \Leftrightarrow 1 + 2m + 3n = 0, \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \langle g_2, g_3 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle x_2 - \frac{2}{3}x_1, x_3 + mx_2 + nx_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ \langle x_2, x_3 \rangle + m\langle x_2, x_2 \rangle + n\langle x_2, x_1 \rangle - \frac{2}{3}\langle x_1, x_3 + mx_2 + nx_1 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \\ 1 + 2m + 2n - \frac{2}{3}(1 + 2m + 3n) &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3}m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Astfel, $m = -\frac{1}{2}$ și $n = 0 \Rightarrow g_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ și

$$f_3 = \frac{1}{\|g_3\|} g_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)^T = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T.$$

Problema 1.5.2. În $\mathbb{R}^3$ se consideră elementele $x_1 = (1, 2, -3)^T$, $x_2 = (1, -1, 2)^T$, $x_3 = (2, 1, 1)^T$ și $x = (4, 3, 5)^T$.

- Să se arate că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$;
- Să se determine coordonatele lui x în baza B ;
- Plecând de la baza B să se construiască o bază

ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

Soluție: Probăm că $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem liniar independent. Într-adevăr, din

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avem

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -3a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cu $\text{rang} A = 3$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

și

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

rezultat ce arată că sistemul este compatibil unic determinat. În consecință $a = b = c = 0$ și deci $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem liniar independent.

Rămâne să arătăm că $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem de generatori.

Într-adevăr, din

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = y \\ \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ și } \forall y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

avem

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} a + b + 2c = y_1 \\ 2a - b + c = y_2 \\ -3a + 2b + c = y_3. \end{cases}$$

Matricea extinsă a sistemului este

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & y_1 \\ 2 & -1 & 1 & y_2 \\ -3 & 2 & 1 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Din rezultatul de mai sus observăm că

$$\text{rang} A = \text{rang} \overline{A} = 3$$

și deci sistemul este compatibil. Am probat că $\{x_1, x_2, x_3\}$ este sistem de generatori. Ca o consecință a teoriei avem demonstrat și faptul că $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Coordonatele lui x în baza B se determină din

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = x \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

echivalent cu a rezolva sistemul

$$\begin{cases} a + b + 2c = 4 \\ 2a - b + c = 3 \\ -3a + 2b + c = 5. \end{cases}$$

Un calcul simplu arată că

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -2$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{8}{3}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{13}{3}.$$

Conform teoriei coordonatele lui x în baza B sunt

$$x_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Notăm prin $B_o = \{z_1, z_2, z_3\}$. Din teorie se cunoaște că

$$z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}, z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + \lambda_1 x_1 \\ y_3 = x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \end{cases}$$

iar $\lambda_{i=1,3} \in \mathbb{R}$ se determină din

$$\begin{cases} \langle y_1, y_2 \rangle = 0 \\ \langle y_1, y_3 \rangle = 0 \\ \langle y_2, y_3 \rangle = 0. \end{cases}$$

Observăm că

$$\begin{cases} \langle y_1, y_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_1, x_2 + \lambda_1 x_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \langle y_1, y_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \rangle = 0 \Rightarrow 14\lambda_3 - 7\lambda_2 + 1 = 0 \\ \langle y_2, y_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_2 + \lambda_1 x_1, x_3 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-7}{5}. \end{cases}$$

Înlocuind $\lambda_2 = \frac{-7}{5}$ în relația $14\lambda_3 - 7\lambda_2 + 1 = 0$ obținem

$$\lambda_1 = -\frac{27}{35}.$$

Uu calcul simplu arată că

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, z_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ și } z_3 = \frac{35}{6\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{35} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{18}{35} \end{pmatrix}.$$

1.6. Nucleul și imaginea unei aplicații liniare.

Problema 1.6.1. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

și $\bar{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatorul liniar asociat matricei A .

a) Să se calculeze $\bar{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) Să se determine $\text{Im } \bar{A}$ și $\text{Ker } \bar{A}$.

Soluție: a) Avem

$$\bar{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

b) Prin definiție

$$\text{Ker } \bar{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{A}x = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Din enunț $\bar{A}x = Ax$. Atunci

$$\bar{A}x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow Ax = 0_{\mathbb{R}^3}$$

sau echivalent cu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

cu $\text{rang} A = 2$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ iar } M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum $\text{rang} A = 2$ deducem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Avem

$$M_2 \text{ minor principal} \Rightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \text{ necunoscute principale} \\ x_3 \text{ necunoscută secundară } x_3 \stackrel{\text{not}}{=} \alpha. \end{cases}$$

Din sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3\alpha \\ x_1 - x_2 = -\alpha \end{cases}$$

rezultă $x_1 = \frac{\alpha}{3}, x_2 = \frac{4}{3}\alpha$ și

$$\text{Ker} \bar{A} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarcăm că

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \stackrel{\text{bază}}{\subset} \text{Ker} \bar{A}$$

și deci $\dim \text{Ker} \bar{A} = 1$.

Determinăm imaginea operatorului $\bar{A}$. Se cunoaște că

$$\text{Im} \bar{A} = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ astfel încât } \bar{A}x = y \right\}$$

Fie $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ și $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Relația $\bar{A}x = y$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_3. \end{cases}$$

Scriem

matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă a sistemului

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & y_1 \\ 1 & -1 & 1 & y_2 \\ 2 & 1 & -2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Din rezultatul de mai sus $\text{rang} A = 2$. Punem condiția ca $\text{rang} B = 2$ (deoarece trebuie să existe x cu proprietatea cerută). $\text{rang} B = 2$ atrage

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 1 & -1 & y_2 \\ 2 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

și

$$\text{Im } \bar{A} = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 - y_3 = 0 \right\}.$$

Observăm că

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 - y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

și deci

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \stackrel{\text{bază}}{\subset} \text{Im } \bar{A} \Rightarrow \dim \text{Im } \bar{A} = 2.$$

1.7. Valori proprii și elemente proprii asociate unei matrice. Funcționale pătratic.

Problema 1.7.1. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ și } x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine vectorii proprii și valorile proprii ale matricei A ;

b) Folosind metoda lui Jacobi să se aducă la forma canonică funcționala pătratică $g(x) = x^T A x$.

Soluție: a) Valorile proprii se determină din relația

$$|A - \lambda I_3| = 0$$

ori echivalent

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0.$$

Din schema lui Horner

	1	3	0	-4
1	1	4	4	0
-2	1	2	0	

deducem că ecuația $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ are soluțiile

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \lambda_3 = -2$$

și în același timp ele reprezintă valorile proprii.

Determinăm vectorii proprii. Prin definiție vectorii proprii sunt

$$VP_A(\lambda) = \left\{ u_\lambda \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda I_3)u_\lambda = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

Pentru $\lambda_1 = 1$ determinăm $u_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Avem

$$(A - \lambda_1 I_3)u_{\lambda_1} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

ori echivalent cu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cu $\text{rang} C = 2$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

și

$$M_3 = |C| = 0 \text{ deoarece } |(A - \lambda_1 I_3)| = 0.$$

Din cele de mai sus deducem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

$$M_2 \text{ minor principal} \Rightarrow \begin{cases} a, b \text{ necunoscute principale} \\ c \text{ necunoscută secundară} \Rightarrow c = \alpha. \end{cases}$$

Rezultă ușor că

$$u_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

și deci

$$VP_A(\lambda_1) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ obținem absolut analog că

$$VP_A(\lambda_{2,3}) = \left\{ \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid m + n + p = 0 \right\}.$$

b) Observăm că

$$\begin{aligned} g(x) &= x^T A x = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3. \end{aligned}$$

Aplicăm metoda lui Jacobi funcției g . Pentru aceasta observăm că

$$\Delta_1 = -1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \text{ și } \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

și deci

$$g(y) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 = -y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 - \frac{1}{2} y_3^2.$$

Problema 1.7.2. *Se consideră matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

și operatorul $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definit prin $T(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se determine $\text{Im}T$ și $\text{Ker}T$;

b) Să se determine dimensiunea subspațiului liniar $\text{Im}T$ și să se pună în evidență o bază în acest subspațiu;

c) Să se determine forma canonică a funcționalei pătratice $g(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$ și să se pună în evidență o bază în care g are această formă canonică.

Soluție:

Se cunoaște că

$$\text{Ker}T = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

Relația $T(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ este echivalentă cu $Ax = 0_{\mathbb{R}^3}$ și cu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de unde obținem sistemul
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistem cu matricea A . Un minor nenul de ordinul 2 al matricei A este

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

și deci $\text{rang} A \geq 2$. Pe de altă parte observăm că determinantul lui A este nul. Concludem că $\text{rang} A = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat. Necunoscuta secundară x_3 o notăm prin α . Observăm că sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = -\alpha \end{cases}$$

are soluția $x_1 = x_2 = \alpha$. Am obținut că

$$\text{Ker} T = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determinăm imaginea operatorului T . Prin definiție

$$\text{Im} T = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \text{există } x \in \mathbb{R}^3 \text{ cu } y = T(x) \right\}$$

Fie

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Relația $y = T(x)$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3. \end{cases}$$

Am văzut că rangul matricei este 2. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca rangul matricei extinse să fie egal cu rangul matricei sistemului (adică cu 2).

Matricea extinsă este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ -1 & 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

iar $\text{rang } \bar{A} = 2$ dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ -1 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

dacă și numai dacă $y_3 - y_1 - y_2 = 0$ ecuație ce reprezintă un sistem cu 3 necunoscute. Considerăm y_3 necunoscuta principală și notăm prin

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta \end{cases}$$

necunoscutele secundare. Atunci $y_3 = \alpha + \beta$ și deci

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Am obținut

$$\text{Im } T = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Din punctul a) observăm că $\dim \text{Im } T$ deoarece

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \stackrel{\text{bază}}{\subset} \text{Im } T.$$

c) Avem

$$g(x) = x^T A x = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_1 + 2x_2x_3.$$

Determinăm forma canonică a funcționalei pătratice g .

Etapa 1. Se grupează termenii care conțin x_1 și obținem

$$g(x) = x^T Ax = (x_1^2 - 2x_2x_1) + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3.$$

În grupul format scoatem factor forțat $\frac{1}{\text{coeficientul lui } x_1^2}$ (în

acest caz coeficientul lui x_1^2 este 1). Se formează pătrate în grupul de termeni ce conține x_1 după formula

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab \div b^2.$$

Avem

$$g(x) = x^T Ax = [(x_1 - x_2)^2 - x_2^2] + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases} \quad \text{unde } y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

și avem $g(y) = a^2 - b^2 \div 2b^2 \div c^2 \div 2bc = a^2 \div b^2 \div c^2 \div 2bc.$

Etapa 2. Se repetă raționamentul de la etapa 1 pentru a 2-a variabilă și avem

$$\begin{aligned} g(y) &= a^2 \div b^2 \div c^2 \div 2bc = a^2 \div 2bc \div b^2 \div c^2 \\ &= a^2 + (b+c)^2 - c^2 + c^2 \\ &= a^2 + (b+c)^2. \end{aligned}$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b \div c = \beta, z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ c = \gamma \end{cases}$$

și obținem

$$g(z) = \alpha^2 \div \beta^2$$

adică ceea ce trebuia.

Pentru determinarea bazei se parcurg schimbările de

coordonate de la ultima la prima înlocuindu-se datele astfel

$$\begin{cases} \alpha = a = x_1 - x_2 \\ \beta = b + c = x_2 + x_3 \\ \gamma = c = x_3 \end{cases}$$

sau echivalent cu

$$\begin{cases} \alpha = x_1 - x_2 \\ \beta = x_2 + x_3 \\ \gamma = x_3 \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

O bază este

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1.8. Probleme propuse.

Problema 1.8.1. Fie $\mathbb{R}_3[x]$ mulțimea polinoamelor de grad ≤ 3 , cu coeficienți reali. Să se arate că elementele x , $x+2$, $x^3+2 \in \mathbb{R}_3[x]$ sunt liniar independente.

Problema 1.8.2. Se consideră vectorii $a = (1, 1, 0)^T$, $b = (2, 0, 1)^T$ și $c = (3, 1, 15)^T$. Să se arate că ei formează o bază pentru $\mathbb{R}^3$ și să se determine $k \in \mathbb{R}$ dacă vectorul $d = (3, k, 2)^T$ aparține subspațiului $Sp(a, b)$ generat de a și b .

Problema 1.8.3. *Fie*

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Să se arate că W este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$ și să se determine o bază pentru W . Care este dimensiunea subspațiului W ? Dar coordonatele elementului $x = (-1, 1, 1)^T \in W$ în baza respectivă?

Problema 1.8.4. *Să se determine toate matricele nenule $A \in M_2(\mathbb{R})$ care au ca valori proprii*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ și } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.8.5. *Fie*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Să se arate că A, B au aceleași valori proprii. Dacă λ este una dintre ele și v_a, v_b vectorii proprii corespunzători pentru A și B să se arate că $v_a^T \cdot v_b = 0$.

Capitolul 2.

Elemente de analiză matematică

Ne propunem ca după parcurgerea acestui capitol studenții să fie familiarizați cu: calculul limitelor unor șiruri din spații de mai multe dimensiuni, limitele unor funcții de mai multe variabile, calculul derivatelor parțiale ale funcțiilor de mai multe variabile și determinarea extremelor funcțiilor de mai multe variabile.

2.1. Șiruri în $\mathbb{R}^n$.

Problema 2.1.1 *Utilizând lema lui Cesaró-Stoltz să se calculeze*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n}} \right)^T$$

unde $p \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

Vom nota prin

$$a_n := 1^p + 2^p + \dots + n^p \text{ iar } b_n := n^{p+1}.$$

Cum $(b_n)_{n \geq 1}$ este un șir crescător, nemărginit, putem aplica lema lui Cesaró-Stoltz șirului din enunț:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_p^0 n^p + C_p^1 n^{p-1} + \dots + C_p^p}{C_{p+1}^0 n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + \dots + C_{p+1}^{p+1} - n^{p+1}} \\
 &= \frac{1}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1}.
 \end{aligned}$$

Notăm prin

$$c_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n}.$$

Folosind criteriul lui Cauchy-D'Alembert vom obține

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{4}{e}.
 \end{aligned}$$

În concluzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n}} \right)^T = \left(\frac{1}{p+1}, \frac{4}{e} \right)^T.$$

Problema 2.1.2. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sin n, \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} \right)^T.$$

Soluție:

Vom folosi următoarea proprietate: "dacă a_n și b_n sunt șiruri de numere reale astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 0$ iar b_n este

mărginit atunci $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$."

În cazul nostru considerând $a_n := \frac{1}{n}$ iar $b_n := \sin n$ observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0.$$

Pentru cealaltă limită se observă ușor că

$$\sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \ln(n+1)$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \infty.$$

În concluzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sin n, \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} \right)^T = (0, \infty)^T.$$

2.2. Limite de funcții în $\mathbb{R}^n$. Continuitate. Derivabilitate.

Problema 2.2.1 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}.$$

Soluție:

Se știe că

$$x - 1 < [x] \leq x,$$

sau după împărțirea prin $x \neq 0$ avem

$$\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq \frac{x}{x}.$$

Trecând la limită în această ultimă inegalitate avem

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

și deci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$

Problema 2.2.2. Calculați

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}, \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \right)^T;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right), \frac{e^x}{x} \right)^T;$$

Soluție:

a) Amplificând cu conjugata avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

respectiv utilizând regula lui L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\cos x} = 1.$$

Din rezultatele de mai sus avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}, \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \right)^T = \left(\frac{1}{6}, 1 \right)^T.$$

b) Ca la punctul a) observăm că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)^{(\infty \cdot 0)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

respectiv că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

Am probat că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right), \frac{e^x}{x} \right)^T = (-1, \infty)^T.$$

Problema 2.2.3. *Calculați $f'(1)$ pentru funcția*

$$f(x) = \left(e^{-x^2} \frac{\ln x}{x}; x^2 + 1 \right).$$

Soluție:

Avem

$$f'(x) = \left(-e^{-x^2} \frac{2(\ln x)x^2 - 1 + \ln x}{x^2}, 2x \right)^T$$

și $f'(1) = (e^{-1}, 2)^T$ rezultă prin înlocuirea lui x cu 1 în relația anterioară.

Problema 2.2.4. *Fie*

$$A_n = \left(\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n} \right)^T, n \in N^*, \lambda \in R_+.$$

Să se determine parametrul real λ dacă punctul $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

este la distanța minimă de $(1, e^{-\lambda})^T$ în $\mathbb{R}^2$.

Soluție:

Observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}} \right]^\lambda = e^\lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = (e^\lambda, 1)^T$.

Pe de altă parte distanța de la punctul $(e^\lambda, 1)^T$ la punctul $(1, e^{-\lambda})^T$ este $\sqrt{(e^\lambda - 1)^2 + (e^{-\lambda} - 1)^2}$ iar problema revine la determinarea minimumului funcției de o variabilă

$$f(\lambda) = e^{2\lambda} - 2e^\lambda + e^{-2\lambda} - 2e^{-\lambda} + 2.$$

Cum

$$f'(\lambda) = 2e^{2\lambda} - 2e^\lambda - 2e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda}$$

și

$$2e^{2\lambda} - 2e^\lambda - 2e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

observăm ușor că $f(\lambda) \geq f(0) = 0$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Nu ne rămâne decât să observăm că

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \sqrt{e^{2\lambda} - 2e^\lambda + e^{-2\lambda} - 2e^{-\lambda} + 2} = 0.$$

Problema 2.2.5. Studiați continuitatea funcției

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = y = 0. \end{cases}$$

Soluție:

Un calcul simplu arată că

$$f(0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(0, y_n) = 0$$

pentru orice șiruri de numere reale $x_n \rightarrow 0$ și $y_n \rightarrow 0$. Vom demonstra că f nu este continuă în punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Într-adevăr, dacă

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$$

pe direcția a (în sensul $y_n = ax_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$), atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_n}{x_n}}{1 + \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2} = \frac{a}{a^2 + 1}.$$

Ultima limită depinde de direcția a și deci criteriul lui Heine ne asigură că funcția f este discontinuă în punctul $(0,0)$.

Problema 2.2.6. *Calculați*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Soluție:

Observăm că

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |x| \leq |x|$$

deoarece

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

și deci trecând la limită obținem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0,$$

adică ceea ce trebuia să aflăm.

2.3. Extremele funcțiilor de mai multe variabile.

Problema 2.3.1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = xy(1 - x - y).$$

Se cere

a) Să se calculeze

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{f(x, y)}{x};$$

b) Să se calculeze hessiana H_f în punctul $(2, -1)^T \in \mathbb{R}^2$;

c) Să se determine extremele funcției f .

Soluție:

a) Avem

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{f(x, y)}{x} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{xy(1 - x - y)}{x} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} y(1 - x - y) = 0. \end{aligned}$$

b) Prin definiție hessiana H_f este

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi. Pentru început

observăm că

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy(1-x-y)) = -y(2x+y-1);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy(1-x-y)) = -x(x+2y-1).$$

Suntem în măsură să calculăm derivatele parțiale de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \text{ și } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 - 2x - 2y \text{ și } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - 2x - 2y.$$

Atunci

$$H_f(2, -1)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Determinăm punctele critice

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(xy(1-x-y)) = -y(2x+y-1) \\ \frac{\partial}{\partial y}(xy(1-x-y)) = -x(x+2y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y(2x+y-1) = 0 \\ -x(x+2y-1) = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem următoarele puncte critice:

Cazul 1. $x = y = 0$; Caz 2. $x = 0$ și $y = 1$; Caz 3. $x = 1$ și $y = 0$; Caz 4. $x = y = 1/3$. Rămâne să cercetăm care din aceste puncte critice sunt puncte de extrem.

Cazul 2. Pentru $x = y = 0$ avem

$$H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

și deci $(0,0)$ nu este punct de extrem.

O discuție asemănătoare se face pentru Cazul 2 și Cazul 3.

Cazul 4. Pentru $x = y = 1/3$ avem

$$H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$\Delta_1 = -\frac{2}{3} < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

obținem că $x = y = 1/3$ este punct de maxim.

Problema 2.3.2. *Să se determine extremele funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2.$$

Soluție:

Determinăm punctele critice:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

sistem din care se obține $y^4 - y = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2 + y + 1) = 0$ și deci

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Am obținut punctele critice: $(x_1, y_1) = (0, 0)$ și $(x_1, y_1) = (1, 1)$.

Observăm că

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Cercetăm care din punctele critice determinate este punct de extrem. Pentru $H_f(0, 0)$ obținem $\Delta_1 = 0$ fapt ce probează

că $(0,0)$ nu este punct de extrem. Pentru $H_f(1,1)$ obținem

$$\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

relații ce arată că $(1,1)$ este punct de minim local.

Problema 2.3.3. *Să se determine extremele funcției*

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ pentru orice $x, y, z > 0$.

Soluție:

Considerăm funcția lui Lagrange

$$F_\lambda(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

și determinăm punctele critice ale acesteia

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F_\lambda(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_\lambda(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_\lambda(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} F_\lambda(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ 3z^2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem $\lambda = \frac{-3}{2}$ și $x = y = z = 1$.

Stabilim dacă punctul determinat este de extrem. Pentru aceasta calculăm hessiana lui F

$$H_{F_\lambda}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

și obținem

$$H_{F_\lambda}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6y + 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6z + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Înlocuind $\lambda = \frac{-3}{2}$ și $x = y = z = 1$ avem

$$H_{F_{\frac{-3}{2}}}(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$\Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

rezultă că $(1, 1, 1)$ este punct de minim local.

2.4. Probleme propuse.

Problema 2.4.1. Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + z).$$

Problema 2.4.2. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$$

condiționate de relația $x^2 + y^2 = 1$.

Bibliografie

- [1] Gh. Cenușe, ș.a. *Matematici pentru economiști*, Editura Cison, București, 2000.
- [2] R. Cristescu, *Matematici generale*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1969.
- [3] M. Nicolescu, N. Dinculescu, S. Marcus, *Analiză matametică*, vol.1, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- [4] A. Leonte, G. Vraciu, *Elemente de calcul material cu aplicații*, Editura Tehnică, București, 1975.
- [5] V. Lupulescu, *Elemente de Algebră Liniară și Analiză Matematică pentru economiști*, Ed. Axioma Teomsnic, Târgu-Jiu, 2004.
- [6] F. Reza, *Spatii liniare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [7] C.I. Radu, *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Editura ALL, București, 1998.
- [8] O. Stănășilă, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.