CAPITOLUL 1

SPAŢII VECTORIALE FINIT DIMENSIONALE

1.1 Definiţia spaţiilor vectoriale

Pentru a introduce noţiunea de spaţiu vectorial avem nevoie de noţiunea de *corp comutativ de caracteristică zero*. Aceasta este introdusă de definiţia de mai jos.

Definiţia 1.1.1 *Spunem că o mulţime K, dotată cu două operaţii, una notată aditiv (numită adunare) şi cealaltă notată multiplicativ (numită înmulţire), are o structură de corp comutativ dacă împreună cu adunarea este grup abelian, iar fată de înmulţire, K - {0} (unde 0 este elementul neutru la adunare) este grup comutativ şi sunt verificate axiomele:*

1. (distributivitate la dreapta) $x(y + z) = xy + xz$, oricare ar fi $x, y, z \in K$

2. (distributivitate la stânga) $(x + y)z = xz + yz$, oricare ar fi $x, y, z \in K$.

Definiţia 1.1.2 *Caracteristica corpului K este cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $na = 0$, oricare ar fi $a \in K$.*

Dacă $na = 0$, oricare ar fi $a \in K$, are loc numai pentru $n = 0$ atunci spunem că avem de a face cu un corp de *caracteristică zero.*

Fie K un corp comutativ de caracteristică zero. Vom conveni ca de aici înainte să folosim denumirea mai simplă de corp pentru un corp comutativ de caracteristică zero, dacă nu sunt făcute alte precizări. Acum putem introduce definiția spațiului vectorial.

Definiția 1.1.3 *Un spațiu vectorial (liniar) V peste corpul K este o mulțime nevidă prevăzută cu două operații: o operație internă* $+ : V \times V \to V$, $(x, y) \to x + y$, *numită adunarea vectorilor, împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică satisface axiomele:*

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, *oricare ar fi* $x, y, z \in V$ *(legea este asociativă);*

2. $x + y = y + x$ *oricare ar fi* $x, y \in V$ *(legea este comutativă);*

3. există în V un element 0, vectorul zero, astfel încât $x + 0 = 0 + x$ *oricare ar fi* $x \in V$ *(există element neutru);*

4. oricare ar fi $x \in V$ *există* $- x \in V$ *astfel încât* $x + (- x) = (-x) + x = 0$ *(orice element admite simetric)*

şi o operație externă $:K \times V \to V$, $(\alpha, x) \to \alpha x$ *(de înmulțire a vectorilor cu scalari) care satisface axiomele:*

a. dacă $1 \in K$ *este elementul neutru la înmulțire din K atunci* $1x = x$, *oricare ar fi* $x \in K$.

b. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ *oricare ar fi* $\alpha, \beta \in K$ *şi* $x \in V$;

c. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ *oricare ar fi* $\alpha, \beta \in K$ *şi* $x \in V$;

d. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ *oricare ar fi* $\alpha \in K$ *şi* $x, y \in V$.

După cum se subînțelege din cele spuse mai sus, elementele corpului K se vor numi *scalari* şi vor fi notate cu litere ale alfabetului grec, în timp ce elementele spaţiului vectorial V se vor numi *vectori* şi vor fi notate cu litere ale alfabetului latin. Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K se mai spune că *V este un K spaţiu vectorial*.

În cazul în care K este corpul numerelor reale se mai spune că V este un spaţiu vectorial real iar dacă K este corpul numerelor complexe atunci V este spaţiu vectorial complex.

Observaţia 1.1.1 Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K atunci $\alpha x = 0$ ($\alpha \in K$, $x \in V$) dacă şi numai dacă $\alpha = 0$ sau $x = 0$. În adevăr dacă $\alpha = 0$ atunci, deoarece $0 = 0 + 0$, aplicăm axioma c) din definiţia spaţiului vectorial şi avem $0x = 0x + 0x$. Adunând opusul lui $0x$ în ambii membrii ai egalităţii obţinem $0x = 0$. Raţionând asemănător putem arăta ca $\alpha 0 = 0$.

Reciproc, dacă $\alpha x = 0$, atunci presupunem prin absurd că $\alpha \neq 0$ şi $x \neq 0$. Înmulţim egalitatea precedentă, la stânga, cu inversul lui α şi obţinem $1x = \alpha^{-1}0$. Acum folosim rezultatul demonstrat mai sus şi axioma a) din Definiţia 1.1.3 şi obţinem $x = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$.

Observaţia 1.1.2 Conform celor stabilite în observaţia de mai sus avem $0 = 0x = ((-\alpha) + \alpha)x$. Deci $(-\alpha)x + \alpha x = 0$ sau $(-\alpha)x = -\alpha x$.

Observaţia 1.1.3 Spaţiul vectorial cu un singur element, care în mod evident este vectorul 0, se numeşte spaţiul nul şi se notează (0).

Exemplul 1.1.1 *Orice corp comutativ K are o structură de spaţiu vectorial peste el însuşi, dacă vom interpreta operaţiile de adunare şi înmulţire din K ca fiind operaţia internă, de adunare a vectorilor, respectiv operaţia de înmulţire cu scalari.*

Exemplul 1.1.2 *Fie K un corp comutativ şi* $V = K^n = K \times K \times \ldots \times K$ *(produsul cartezian al lui K cu el însuşi de n ori). Avem* $V = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) / \alpha_i \in K$, *oricare ar fi* $i \in \{1, 2, \ldots n\}\}$. *Dacă definim adunarea în V şi înmulțirea cu scalari din K în maniera de mai jos*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots, \alpha\alpha_n),$$

atunci este uşor de văzut că sunt îndeplinite condițiile cerute de definiția spațiului vectorial şi V este un K spațiu vectorial.

Într-adevăr, V împreună cu operația de adunare are o structură de grup abelian în care elementul neutru este n-uplul (0, 0,…, 0) iar opusul unui vector oarecare $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in V$ *este* $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. *Operația de înmulțire cu scalari satisface axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 şi rezultă concluzia.*

În cazul particular în care K= ***R*** *(respectiv K =* ***C****), obținem spațiul vectorial real (respectiv complex)* $\boldsymbol{R}^n$ *(respectiv* $\boldsymbol{C}^n$*).*

Exemplul 1.1.3 *Fie V mulțimea* $C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}, f \text{ continuă}\}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$. *Mulțimea V, împreună cu operațiile de adunare a funcțiilor şi de înmulțire a acestora cu numere reale, capătă o structură de spațiu vectorial real.*

Exemplul 1.1.4 *(* ***Complexificatul unui spațiu vectorial real****) Fie V un spațiu vectorial real. Fie mulțimea* $V^C = V \times V$ *şi corpul numerelor complexe* ***C****. Pe această mulțime introducem două operații, adunarea şi înmulțirea cu scalari, astfel*

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),\ x, z, u, v \in V;$$

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x), \text{ oricare ar fi } x, y \in V \text{ şi } \alpha + i\beta \in \boldsymbol{C}.$$

Conform operației de înmulțire cu scalari introdusă mai sus, avem (0, y) = i(y, 0). Deoarece elementele $x \in V$ pot fi identificate cu perechile (x, 0), putem face convenția că (0, y) = y şi (x, y) = x + iy. Condițiile din Definiția 1.1.3 sunt îndeplinite, după cum este uşor de verificat, şi putem afirma că V^C este un spațiu vectorial complex.

Exemplul 1.1.5 *Mulțimea polinoamelor în nedeterminata t, de orice grad, cu coeficienți reali, notată P(t) este spațiu vectorial real împreună cu operația de adunare a polinoamelor şi de înmulțire a acestora cu scalari.*

1.2 Combinații liniare. Sisteme liniar dependente şi liniar independente

În cele ce urmează vom conveni să numim familie de vectori o mulțime oarecare de vectori, iar prin sistem de vectori vom înțelege o mulțime cel mult numărabilă de vectori. Fie I o familie oarecare de indici.

Definiția 1.2.1 *Vectorul $x \in V$ este combinație liniară a familiei de vectori $(x_i)_{i \in I}$, dacă x se poate scrie sub forma $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$, unde numai un număr finit dintre coeficienții α_i sunt nenuli.*

Observația 1.2.1 Vectorul 0 este combinație liniară de orice familie de vectori, deoarece putem lua în relația din definiție $\alpha_i = 0$, $i \in I$.

Definiția 1.2.2 *Familia $G = (x_i)_{i \in I}$ de vectori din V este sistem de generatori pentru V dacă pentru orice vector $x \in V$ există* *familia finită $I_0 \subset I$ astfel încât* $x = \sum_{i \in I_0} \alpha_i x_i$.

Exercițiul 1.2.1 Dacă $G \subset V$ este sistem de generatori pentru V şi $G_1 \subset G$ este "sistem de generatori pentru G", adică orice vector din G_1 se poate scrie ca o combinație liniară de vectori din G, atunci G_1 este sistem de generatori pentru V.

Definiția 1.2.3 *Familia* $(x_i)_{i \in I}$ *de vectori din V este liniar independentă dacă vectorul nul se poate scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei numai cu scalari nuli, adică pentru orice familie* $I_0 \subset I$ *, finită avem "*$\sum_{i \in I_0} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$*,* $i \in I_0$ *".*

Observația 1.2.2 Orice submulțime a unei familii liniar independente este la rândul ei o familie liniar independentă.

Observația 1.2.3 O familie de vectori formată dintr-un singur vector x este liniar independentă dacă şi numai dacă $x \neq 0$. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$ atunci din $\alpha x = 0$ rezultă, conform Observației 1.1.1, $\alpha = 0$ şi deducem că familia este liniar independentă.

Reciproc, dacă $\{x\}$ este familie liniar independentă atunci este necesar ca $x \neq 0$ căci altfel, pentru $x = 0$, avem $\alpha 0 = 0$ pentru orice $\alpha \neq 0 \in K$, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiția 1.2.4 *Familia* $(x_i)_{i \in I}$ *de vectori din V este liniar dependentă dacă vectorul nul se poate scrie ca o combinație liniară* *de vectori ai familiei, cu scalari nu toți nuli, adică există $\alpha_i \in K$, $i\in I$ nu toți nuli astfel încât $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$.*

Observații. 1. Orice familie de vectori din V care conține vectorul nul este liniar dependentă . Într-adevăr dacă x_i, $i\in I$ sunt ceilalți vectori ai familiei atunci avem combinația nulă $1 \cdot 0 + \sum_{i\in I} 0x_i = 0$.

2. Mai general, orice familie de vectori din V care conține o familie liniar dependentă este liniar dependentă.

I. Caracterizări ale familiilor liniar dependente

Teorema 1.2.1 *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

a)familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, nenuli este liniar dependentă ;

b) există un indice $j \in\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât x_j se scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori din familie.

c) există un indice $2\le j\le m$ astfel încât x_j se scrie ca o combinație liniară de vectorii precedenți lui.

Demonstrație. "a) $\Rightarrow$ b)" Dacă familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar dependentă atunci există scalarii $\alpha_i\in K$, nu toți nuli (deci există indicele j astfel încât $\alpha_j \neq 0$) astfel încât

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + \alpha_j x_j + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Înmulțim relația de mai sus cu inversul lui α_j şi obținem succesiv

$$0 = (\alpha_j)^{-1}\alpha_1 x_1 + (\alpha_j)^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j-1}x_{j-1} + (\alpha_j)^{-1}\alpha_j x_j + (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + (\alpha_j)^{-1}\alpha_n x_n \text{ şi}$$

$$x_j = - (\alpha_j)^{-1}\alpha_1 x_1 - (\alpha_j)^{-1}\alpha_2 x_2 - \ldots - (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j-1}x_{j-1} -$$

$(\alpha_j)^{-1}\alpha_{j+1}x_{j+1}$ -…- $(\alpha_j)^{-1}\alpha_n x_n$.

Astfel, prima implicație a echivalenței "a) $\Leftrightarrow$ b)", a fost demonstrată. În continuare vom demonstra implicația "b) $\Rightarrow$ a)".

Dacă există $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi scalarii $\alpha_i \in K$ astfel încât

$$x_j = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n,$$

atunci avem combinația nulă cu scalari nu toți nuli $0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + (-1)x_j + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n$ şi, conform Definiției 1.2.4, deducem că familia este liniar dependentă. Implicația "c) $\Rightarrow$ b)" este evidentă.

Pentru a termina demonstrația este suficient să arătăm că "a) $\Rightarrow$ c)". Fie $1 \le p \le m$ cel mai mare indice cu proprietatea că familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar independentă. Existența indicelui p este asigurată de faptul că dacă $x_1 \neq 0$, atunci este clar că $\{x_1\}$ este familie liniar independentă şi fie $\{x_1, x_2\}$ este tot familie liniar independentă, caz în care se continuă procedeul de determinare a lui j, fie aceasta este liniar dependentă şi procedeul se termină cu alegerea p = 1.

Într-un număr finit de paşi (căci $p \le m$), procedeul de determinare al lui *p* se termină. În această situație familia $\{x_1, x_2,, \ldots, x_p, x_{p+1}\}$ este liniar dependentă şi, conform definiției, există scalarii $\alpha_i \in K$, i = 1, p+1, nu toți nuli astfel încât

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1}.$$

Este uşor de văzut că dacă $\alpha_{p+1} = 0$ atunci rezultă că familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar dependentă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha_{p+1} \neq 0$ şi înmulțind egalitatea de mai sus cu inversul lui α_{p+1} obținem:

$$0 = (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_1 x_1 + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_p x_p + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_{p+1}x_{p+1}$$

sau $x_{p+1} = -(\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_1 x_1 - (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_2 x_2 - \ldots -(\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_p x_p$. Demonstrația a fost încheiată.

Exemplul 1.2.1 *Dacă vom considera spațiul vectorial real* $\boldsymbol{R}^3$ *atunci este uşor de văzut că familia de vectori* $\{x_1 = (-1, 2, -3), x_2 = (0, 3, 4), x_3 = (-1, 5, 1), x_4 = (-2, 3, 4)\}$ *este liniar dependentă, deoarece* $x_3 = x_2 + x_1$ *şi se aplică teorema de mai sus.*

II. Caracterizări ale familiilor liniar independente

Teorema 1.2.2 *O familie de vectori* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *a K spațiului vectorial V este liniar independentă dacă şi numai dacă orice scriere a unui vector x din spațiu ca o combinație liniară cu vectori ai familiei se realizează în mod unic, adică dacă avem scrierea* $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in K$, $i = 1,\ldots,n$ *atunci coeficienții* α_i, $i = 1,\ldots,n$ *sunt unic determinați de x.*

Demonstrație. Presupunem că familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă şi mai presupunem că există $x \in V$ astfel încât x se scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei. Deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Presupunem prin absurd că mai există o altă scriere a lui x ca o combinație liniară de vectori ai familiei date. Fie scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ astfel încât $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ şi cel puțin pentru un indice $i \in \{1,2,\ldots n\}$ $\alpha_i \neq \beta_i$. Scăzând cele două relații de mai sus, membru cu membru, şi aplicând axiomele spațiului vectorial obținem

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_i - \beta_i)x_i + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)x_n,\ \alpha_i - \beta_i \neq 0.$$

Relația de mai sus contrazice Definiția 1.2.3, deci faptul că familia dată este liniar independentă. În concluzie, presupunerea că x nu se scrie în mod unic ca o combinație liniară de vectori ai familiei este falsă. Reciproc, dacă orice scriere a unui vector $x \in V$ ca o combinație liniară de vectori ai familiei considerate se realizează în mod unic, atunci observăm că $0 \in V$ şi $0 = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n$. Orice altă scriere $0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ conduce la şirul de relații $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Aplicăm Definiția 1.2.3. şi obținem concluzia.

În cazul familiilor finite de vectori din spațiul vectorial real $\mathbf{R}^n$ avem următoare teoremă de caracterizare a familiilor liniar independente.

Teorema 1.2.3 *O familie de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a spațiului vectorial real $\boldsymbol{R}^n$ este liniar independentă dacă şi numai dacă rangul matricei care are pe coloane componentele vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are rangul n.*

Demonstrație. Familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă dacă şi numai dacă avem "$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ implică $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$". Dacă $x_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ atunci afirmația de mai sus este echivalentă cu faptul că sistemul liniar şi omogen $X\alpha^T = 0$, unde prin α^T înțelegem transpusa*) matricei linie $\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ şi $X \in M_n(\mathbf{R})$**), $X = (x_{ij})_{i=1,n, j=1,n}$ admite numai soluția nulă. Acest lucru este posibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului, adică rangul matricei X este egal cu numărul de necunoscute. Sistemul având n necunoscute, rezultă concluzia.

---

* Dacă $A = (a_{ij})_{i=1,n, j=1,m}$ este o matrice cu elemente din corpul K atunci vom nota cu $A^T = (a_{ji})_{j=1,m\ i=1,n}$, transpusa matricei A.

** $M_n(\mathbf{R})$ (respectiv $M_{n,m}(\mathbf{R})$) este mulțimea matricelor pătrate de ordinul n (respectiv cu n linii şi m coloane) cu elemente reale.

Propoziția următoare este o consecință directă a acestei teoreme, motiv pentru care lăsăm demonstrația ca exercițiu pentru cititor:

Propoziția 1.2.1 *Familia de vectori* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \boldsymbol{R}^n$ *este liniar dependentă dacă şi numai dacă rangul matricei care are pe coloane (sau linii) componentele vectorilor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *are rangul k mai mic decât n. Mai mult, orice subfamilie a acesteia care conține vectori ce au componente într-un minor de ordinul k, nenul este liniar independentă. Numărul maxim de elemente al unei subfamilii liniar independente este egal cu rangul k al matricei despre care am vorbit mai sus.*

Observația 1.2.4 Afirmațiile Teoremei 1.2.3 rămân valabile dacă vom considera în loc de $\mathbf{R}^n$ spațiul K^n, unde K este un corp.

Exemplul 1.2.2 *Familia de vectori S={(-1, 3, 4, 0, 5), (2, 4, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0)} din* $\boldsymbol{R}^5$ *este liniar independentă deoarece rangul matricei asociate conform Teoremei 1.2.3 este egal cu numărul de vectori, adică cu 4.*

În schimb, familia de vectori F = {(-1, 3, 4, 0, 5), (2, 4, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 2), (3, 2, 4, 5, 6)} din acelaşi spațiu este liniar dependentă, conform aceleiaşi teoreme, deoarece rangul matricei asociate nu poate depăşi cea mai mică dimensiune a acesteia 5, iar numărul de vectori este 6.

1.3 Baza a unui spațiu vectorial. Dimensiune

Definiția 1.3.1 *Se numeşte bază a spațiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplineşte condițiile de mai jos:*

a) B este liniar independentă;

b) B este sistem de generatori pentru spațiul V.

Din definiția de mai sus şi din Teorema 1.2.2 putem deduce că orice vector $x \in V$ se poate scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei B (conform proprietății b) a bazei B) şi această scriere este unică.

Într-adevăr dacă $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V, atunci orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n .$$

Definiția 1.3.2 *Scalarii $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ din relația de mai sus se vor numi coordonatele vectorului x în baza B.*

Definiția de mai sus se extinde în mod natural şi la baze indexate după familii oarecare de indici. Astfel, scalarii ξ_i, coeficienții vectorilor u_i, $i \in I$ (I familie oarecare de indici) din scrierea unică a lui x ca o combinație liniară de vectori ai bazei B se vor numi coordonatele vectorului x în baza B.

Exemplul 1.3.1 *Considerăm spațiul vectorial de la Exemplul 1.1.5. Se observă că mulțimea infinită a monoamelor de orice grad, $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ este familie liniar independentă şi sistem de generatori pentru spațiul vectorial real P(t).*

Într-adevăr dacă vom considera o combinație liniară *nulă formată cu vectorii familiei B atunci avem 0 =* $\sum_{i\in N} \alpha_i t^i$*, unde numai un număr finit de coeficienți ai combinației sunt nenuli. Presupunem prin absurd că familia B nu este sistem liniar independent. Atunci în combinația liniară de mai sus există cel puțin un scalar* $\alpha_i \neq 0$*. Fie* r *cel mai mare indice pentru care* $\alpha_r \neq 0$*. Din relația* $0 = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_r t^r$*, adevărată pentru orice* $t \in \mathbf{R}$ *deducem că* $\alpha_i = 0$*, i = 1,..., r, (deoarece avem de a face cu un polinom de gradul r care este identic nul), ceea ce contrazice presupunerea făcută. În concluzie, B este liniar independentă. Faptul că B este sistem de generatori pentru P(t) rezultă observând că orice polinom* $f \in P(t)$ *de grad* k *este o combinație liniară de primele k monoame din familia B.*

Coordonatele vectorului $f = t^7 + 5t^3 - 4t^2 + 1$ *în baza B sunt (1, 0, -4, 5, 0, 0, 0, 1, 0, ..., 0,...).*

Exemplul 1.3.2 *Familia* $B = \{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 0, 0), u_4 = (1, 0, 0, 0)\}$ *a spațiului vectorial real* $\mathbf{R}^4$ *este o bază pentru acesta. Într-adevăr este ușor de constatat că rangul matricei A* $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *este 4 și, conform Teoremei 1.2.3, familia B este liniar independentă. Fie* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$*. Vom arăta că există scalarii reali* α_i*, i =1,...,4 astfel încât* $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$*. Ecuația de mai sus se scrie matricial*

$$A^T \alpha^T = x^T. \tag{1.3.1}$$

Acum este clar că existența scalarilor α_i*, i =1,...,4 este echivalentă cu faptul că sistemul (1.3.1) este compatibil determinat. Deoarece rang*

A^T = 4, deci matricea A^T este inversabilă se deduce uşor că sistemul (1.3.1) admite o soluție unică. De aici deducem, aplicând Definiția 1.2.2, că B este sistem de generatori pentru $\boldsymbol{R}^4$. În concluzie B este o bază pentru acesta. Coordonatele vectorului x în baza B sunt date de soluția sistemului (1.3.1). De exemplu, dacă x = (4, 3, 2, 1), atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Teorema 1.3.1 *Fie G= $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un sistem de generatori din spațiul vectorial V $\neq$ (0). Atunci există o bază B a lui V conținută în G.*

Demonstrație. Deoarece V ≠ (0), putem deduce că există $x_i \in G$, i = 1,…,m astfel încât $x_i \neq 0$. Într-adevăr dacă presupunem prin absurd că toți $x_i = 0$, atunci nici un vector $x \neq 0$ din V nu poate fi scris ca o combinație liniară de vectori ai familiei G (vezi Observația 1.1.1). Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $x_1 \neq 0$. Atunci familia $\{x_1\}$ este liniar independentă. Deci există sisteme liniar independente incluse în G. Fie $\Im(G)$ familia tuturor sistemelor de vectori liniar independenți din G şi fie $F \in \Im(G)$ astfel încât numărul de elemente din F să fie maxim. Vom arăta că F este o bază a lui V. Din construcție, F este sistem de vectori liniar independenți, deci este suficient să arătăm că F este sistem de generatori pentru V. Fie $x \in G$, $x \notin F$. Familia $F \cup \{x\}$ este liniar dependentă, căci altfel este contrazisă maximalitatea lui F (dacă familia $F \cup \{x\}$ ar fi liniar independentă ea ar avea un element în plus față de F şi am obține o contradicție). Deoarece $F \cup \{x\}$ este liniar dependentă, putem aplica Teorema 1.2.1 şi deducem că x este o combinație liniară a vectorilor din F. Deci orice vector din G este o combinație liniară de vectori ai familiei F. Deoarece G este sistem de generatori pentru V, putem deduce, conform

Exercițiului 1.2.1, că F este sistem de generatori pentru V, şi demonstrația este încheiată.

Teorema 1.3.2 *Dacă $G = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ este un sistem de generatori în V iar $F = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un sistem liniar independent atunci $n \le m$.*

Demonstrație. Deoarece G este sistem de generatori pentru V, atunci orice vector din V se scrie ca o combinație liniară de vectori din G, în particular şi vectorii din F. Deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ astfel încât

(1.3.1) $$v_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m.$$

Deoarece $v_1 \neq 0$ (altfel F nu ar mai fi familie liniar independentă), deducem că există $i \in \{1,\dots,n\}$ astfel încât $\alpha_i \neq 0$ şi putem presupune, eventual în urma unei renumerotări că $\alpha_1 \neq 0$. Prin adunarea în ambii membrii ai relației (1.3.1) a vectorului $- \alpha_1 x_1 - v_1$ şi prin înmulțirea relației rezultate cu $(- \alpha_1)^{-1}$, obținem

$$x_1 = (- \alpha_1)^{-1}(-v_1) + (- \alpha_1)^{-1}\alpha_2 x_2 + \dots + (- \alpha_1)^{-1}\alpha_m x_m.$$

Deci x_1 este o combinație liniară de vectori ai familiei $G_1 = \{v_1, x_2, \dots, x_m\}$. Aplicând Exercițiul 1.2.1 deducem că G_1 este un sistem de generatori pentru V. Continuăm procedeul de mai sus considerând în locul lui G sistemul G_1 şi următorul vector din familia F, dacă acesta există. La acest pas avem

(1.3.2) $$v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m.$$

şi este clar că cel puțin unul din coeficienții vectorilor $x_2, \dots, x_m$ este nenul. În caz contrar, aplicăm Teorema 1.2.1 şi deducem că F nu este liniar independentă, ceea ce contrazice ipoteza. Raționând ca mai sus vom înlocui în G_1 pe x_2 cu v_2 şi vom obține familia G_2 care va fi de asemenea sistem de generatori pentru V. Aplicăm procedeul descris mai sus în continuare şi, după un număr finit de paşi, putem întâlni următoarele situații: fie am folosit toți vectorii din F pentru a înlocui vectori din G, caz în care demonstrația este încheiată, căci rezultă că $n \leq m$, fie am înlocuit toți vectorii din G cu vectori din F şi mai avem încă vectori în F.

În acest caz, fie $x \in F$ care nu a fost încă înlocuit. Conform procedeului, în locul lui G avem acum o familie de vectori din F care este sistem de generatori pentru V. Deci acest x se va scrie ca o combinație liniară de vectori din F, ceea ce, conform Teoremei 1.2.1 contrazice faptul că F este familie liniar independentă. În concluzie acest ultim caz nu este posibil şi demonstrația a fost încheiată.

Corolarul 1.3.1 *Dacă o bază dintr-un spațiu vectorial are un număr finit de vectori atunci orice altă bază din acel spațiu va avea acelaşi număr de vectori.*

Demonstrație. Fie B şi B_1 baze în spațiul vectorial V. Presupunem că B este formată dintr-un număr (finit) de m vectori. Vom demonstra că şi B_1 are tot m vectori. Dacă ținem cont de faptul că B este în particular sistem de generatori şi B_1 este sistem liniar independent, aplicăm Teorema 1.3.2 şi deducem că numărul de vectori ai lui B_1 pe care îl vom nota k satisface inegalitatea $k \leq m$. Acum schimbăm rolul lui B cu cel al lui B_1 şi aplicând aceeaşi teoremă deducem că avem şi inegalitatea $m \leq k$. Din cele două inegalități deducem că $m = k$ şi rezultă concluzia.

Corolarul de mai sus ne asigură că numărul de vectori dintr-o bază a unui spațiu vectorial este un element caracteristic al acestuia şi nu depinde de baza aleasă. Vom folosi notația $\dim_K(V)$ pentru a dimensiunea spațiului vectorial V peste corpul K.

Observația 1.3.1 O familie de vectori dintr-un spațiu de dimensiune n formată din m vectori, $m \geq n+1$ este liniar dependentă.

Definiția 1.3.3 *Dimensiunea unui spațiu vectorial este egală cu numărul de vectori dintr-o bază a acestuia.*

O altă consecință a corolarului de mai sus este faptul că dacă un spațiu vectorial are o bază care conține un număr infinit de vectori atunci orice altă bază va fi formată tot dintr-un număr infinit de termeni.

Astfel, se poate vorbi de spații vectoriale de *dimensiune finită* şi de spații vectoriale cu *dimensiune infinită*. În cele ce urmează ne vom referi în general la spații vectoriale de dimensiune finită, dacă nu vom face alte precizări.

Exemplul 1.3.3 *Spațiului vectorial de la Exemplul 1.1.5, pentru care a fost găsită o bază cu un număr infinit de vectori în Exemplul 1.3.1, are dimensiune infinită, în timp ce spațiul $\boldsymbol{R}^4$ va avea dimensiunea 4, conform Exemplului 1.3.2.*

Un spațiu vectorial poate avea mai multe baze, lucru evidențiat de exemplul următor:

Exemplul 1.3.4 *Considerăm în spațiul $\boldsymbol{R}^3$ următoarele familii de vectori $B = \{E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$ şi $B_1 = \{ u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$. Se observă că orice vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$ se poate scrie $x = x_1 E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$, iar matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ care are pe coloane componentele vectorilor familiei B are rangul egal cu trei, adică cu numărul vectorilor din B. Atunci B este* *sistem de generatori pentru $\boldsymbol{R}^3$ şi sistem liniar independent, deci bază. Ca şi în cazul Exercițiului 1.3.2 se poate arăta că şi B_1 este o bază pentru $\boldsymbol{R}^3$.*

Observația 1.3.2 Baza B din exemplul de mai sus se numeşte bază canonică a lui $\mathbf{R}^3$. După cum am văzut, coordonatele unui vector $x \in \mathbf{R}^3$ în baza canonică coincid cu componentele sale. Acest rezultat poate fi extins la orice spațiu $\mathbf{R}^n$ dacă vom face precizarea că baza canonică în $\mathbf{R}^n$ este $\{E_1 = (1, 0,\ldots,0),\ E_2 = (0, 1,\ldots, 0),\ \ldots,\ E_i = (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots 0),\ \ldots,\ E_n = (0, 0,\ldots,1)\}$.

Teorema 1.3.3 *Într-un spațiu vectorial de dimensiune finită, orice familie de vectori liniar independentă poate fi extinsă la o bază.*

Demonstrație. Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în spațiul vectorial V şi fie $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ o familie liniar independentă. Familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este un sistem de generatori pentru V şi este liniar dependent, deoarece orice x_i se scrie ca o combinație liniară de vectori ai bazei B. Atunci, conform Teoremei 1.2.1 există un prim vector care este combinație liniară de precedenții. Evident acesta va fi unul din vectorii bazei B. Fie u_i acest prim vector. Familia $\{x_1, x_2,\ldots,x_m, u_1, u_2,\ldots,u_{i-1}, u_{i+1},\ldots, u_n\}$ este tot un sistem de generatori pentru V. Procedeul continuă cu eliminarea (dacă este posibilă) următorului vector u_k care este combinație liniară de vectorii precedenți lui. La fiecare pas familia nou obținută este fie liniar independentă, caz în care am obținut baza care va conține familia F, fie este liniar dependentă şi în această situație se continuă eliminarea. Într-un număr finit de paşi se obține concluzia.

1.4 Schimbarea bazei unui spaţiu vectorial

După cum s-a văzut deja, într-un spaţiu vectorial V avem mai multe baze, iar un vector $x\in V$ va avea câte un sistem de coordonate pentru fiecare astfel de bază. Atunci se pune în mod firesc problema stabilirii unei legături între coordonatele aceluiaşi vector atunci când se schimbă bazele. Teorema de mai jos rezolvă această problemă, dar înainte de a o formula trebuie introdusă noţiunea de matrice de *trecere* (de la o bază B la o altă bază B') sau *matrice de schimbare a bazei*.

Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune finită, *n* şi fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ două baze în acest spaţiu.

Fie a_{ij}, $j = 1,\ldots,n$ coordonatele vectorului v_i în baza B, adică

$$v_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 +\ldots+ a_{in}u_n,\ i = 1,\ldots,n.$$

Matricea $A = (a_{ij})$, $i, j = 1,\ldots,n$ este o matrice nesingulară*). Într-adevăr, presupunem prin absurd că A este singulară. Considerăm ecuaţia vectorială

(1.4.1)
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 +\ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Avem $\alpha_1[a_{11}u_1 + a_{12}u_2 +\ldots + a_{1n}u_n] + \alpha_2[a_{21}u_1 + a_{22}u_2 +\ldots + a_{2n}u_n] +\ldots+ \alpha_n[a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 +\ldots+ a_{nn}u_n] = 0$. Rearanjând termenii, conform axiomelor spaţiului vectorial, obţinem

$$[\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} +\ldots + \alpha_n a_{n1}]u_1 + [\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} +\ldots + \alpha_n a_{n2}]u_2 +\ldots+$$
$$[\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} +\ldots + \alpha_n a_{nn}]u_n = 0.$$

De aici se obţine sistemul algebric liniar şi omogen

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} +\ldots +\alpha_n a_{n1} = 0$$
$$\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} +\ldots +\alpha_n a_{n2} = 0$$

* Prin matrice nesingulară înţelegem o matrice inversabilă. O matrice singulară nu este inversabilă.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = 0.$$

Matricea asociată acestui sistem este în mod evident A^T. Aceasta fiind singulară, conform presupunerii făcute, deducem că sistemul admite şi soluții nebanale, adică există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toți nuli, astfel încât să aibă loc (1.4.1). Astfel, rezultă că familia B' nu este liniar independentă, şi am obținut o contradicție. Deci matricea A este nesingulară.

Definiția 1.4.1 *Matricea A introdusă mai sus se numeşte matricea de trecere de la baza B la baza B' sau matricea schimbării de baze.*

Teorema 1.4.1 *Dacă un vector $x \in V$ are coordonatele $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în baza $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ şi coordonatele $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ în baza $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ iar $A = (a_{ij})$, $i,j = 1, \ldots, n$ este matricea de trecere de la baza B la B' atunci legătura între cele două sisteme de coordonate este dată de formula:*

(1.4.2) $$\xi^T = (A^T)^{-1} x^T.$$

Demonstrație. Folosind definiția matricei de trecere, avem succesiv $x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \ldots + \xi_n v_n = \xi_1[a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n] + \xi_2[a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n] + \ldots + \xi_n[a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n] = [\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{21} + \ldots + \xi_n a_{n1}]u_1 + [\xi_1 a_{12} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_n a_{n2}]u_2 + \ldots + [\xi_1 a_{1n} + \xi_2 a_{2n} + \ldots + \xi_n a_{nn}]u_n$. Pe de altă parte are loc şi egalitatea $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$. Folosind Teorema 1.2.2, care asigură unicitatea coordonatelor într-o bază, obținem:

$$x_1 = \xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{21} + \ldots + \xi_n a_{n1}$$

$$x_2 = \xi_1 a_{12} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_n a_{n2}$$

....

$$x_n = \xi_1 a_{1n} + \xi_2 a_{2n} + \ldots + \xi_n a_{nn}.$$

Relațiile de mai sus vor fi scrise sub formă matricială astfel

$$x^T = A^T \xi^T.$$

Deoarece matricea de trecere A este inversabilă (şi la fel transpusa sa) înmulțim relația precedentă cu $(A^T)^{-1}$ şi obținem concluzia.

Exemplul 1.4.1 *Fie spațiul vectorial real* $\boldsymbol{R}^3$ *în care vom considera bazele introduse la Exercițiul 1.3.4. Conform Observației 1.3.1 se deduce că matricea de trecere de la baza canonică B la baza B' este chiar matricea care are pe linii componentele vectorilor din baza B', adică A =* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Atunci coordonatele unui vector x =* $(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$ *în baza B' vor fi date de formula de mai jos (conform teoremei de mai sus):*

$$\xi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x^T.$$

1.5 Lema substituției

În continuare vom prezenta un rezultat cunoscut sub numele de Lema substituției precum şi aplicațiile acestuia. După cum se va vedea, asocierea unui algoritm la acest rezultat face din el un instrument de lucru deosebit de util atât în programarea calculatoarelor, cât şi în efectuarea "de mână" a unor calcule ce comportă lucrul cu spații vectoriale de dimensiuni mari.

Lema 1.5.1 *(Lema Substituției) Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în spațiul vectorial V și $y \in V$, $y \neq 0$ cu coordonatele $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în baza B. Dacă coordonata corespunzătoare indicelui i, y_i, este nenulă atunci familia $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ este tot o bază pentru spațiul V. Mai mult, dacă coordonatele unui vector $v \in V$ în baza B sunt $(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, atunci coordonatele în noua bază vor fi $v'_p = v_p - v_i(y_i)^{-1} y_p$, $p \in N^*$, $p \leq n$, $p \neq i$, $v'_i = (y_i)^{-1} v$.*

Demonstrație. Înainte de a începe demonstrația facem observația că dacă $y \neq 0$ atunci cel puțin una din coordonatele sale în baza B este nenulă, în caz contrar am obține $y = 0$. Avem

$$y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_{i-1} u_{i-1} + y_i u_i + y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + y_n u_n.$$

Prin adunarea vectorului $- y - y_i u_i$ în ambii membrii ai relației de mai sus se obține

$$- y_i u_i = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_{i-1} u_{i-1} - y + y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + y_n u_n .$$

Înmulțind noua relație cu $(- y_i)^{-1}$ avem

(1.5.1) $$u_i = (- y_i)^{-1} y_1 u_1 + (- y_i)^{-1} y_2 u_2 + \ldots + (- y_i)^{-1} y_{i-1} u_{i-1} - (- y_i)^{-1} y + (- y_i)^{-1} y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + (- y_i)^{-1} y_n u_n.$$

De aici se deduce, conform Exercițiului 1.2.1, că familia $B_1 = \{ u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, y_i, u_i, \ldots, u_n \}$ este un sistem de generatori pentru V. Deoarece Teorema 1.3.1 ne asigură că din orice sistem de generatori putem extrage o bază a spațiului, deducem că B_1 este chiar o bază.

Într-adevăr, dacă am găsi o submulțime strictă a lui B_1 care să fie bază atunci aceasta ar avea un număr de elemente mai mic strict decât *n* ceea ce ar contrazice Corolarul 1.3.1.

Dacă ($v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$) sunt coordonatele unui vector v în baza B atunci $v = v_1u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_{i-1} u_{i-1} + v_i [(- y_i)^{-1}y_1u_1 + (- y_i)^{-1}y_2 u_2 + \ldots + (- y_i)^{-1}y_{i-1} u_{i-1} - (- y_i)^{-1}y + (- y_i)^{-1}y_{i+1} u_{i+1} + \ldots + (- y_i)^{-1}y_n u_n] + v_{i+1} u_{i+1} + \ldots + v_n u_n$. Regrupând termenii conform axiomelor spaţiului vectorial, avem

$$v = [v_1 - v_i(y_i)^{-1}y_1]u_1 + [v_2 - v_i(y_i)^{-1}y_2]u_2 + \ldots + [v_{i-1} - v_i(y_i)^{-1}y_{i-1}]u_{i-1} +$$
$$[v_i \; y_i^{-1}]u_i + [v_{i+1} - v_i(y_i)^{-1}y_{i+1}]u_{i+1} + \ldots + [v_n - v_i(y_i)^{-1}y_n]u_n.$$

În cazul spaţiilor $\mathbf{R}^n$ rezultatul din lemă este sintetizat în tabelele de mai jos:

Tabelul 1.5.1

baza spaţiu lui R^n	coord. vect. y	coord. vect. v
	y	v
u_1	y_1	v_1
u_2	y_2	v_2
….	….	….
u_i	$\boxed{y_i}$	v_i
….	….	….
u_n	y_n	v_n

pivot

Tabelul 1.5.2

baza spaţiu lui R^n	coord. vect. y	coord. vect. v
	y	v
u_1	0	$v_1 - \frac{v_i y_1}{y_i}$
u_2	0	$v_2 - \frac{v_i y_2}{y_i}$
….	….	….
y_i	1	$\frac{v_i}{y_i}$
….	….	….
u_n	0	$v_n - \frac{v_i y_n}{y_i}$

Astfel, se poate enunţa următorul algoritm (vezi Tabelul 1.5.2) de obţinere a coordonatele vectorilor y şi v în noua bază, B', adică de transformare a Tabelului 1.5.1 în Tabelul 1.5.2.

a) Prima coloană din noul tabel (vezi Tabelul 1.5.2) va conţine lista vectorilor din noua bază.

Înainte de a enunța următoarea regulă de obținere a Tabelului 1.5.2 facem precizarea că elementul $y_i \neq 0$ (vezi Tabelul 1.5.1) care permite înlocuirea lui u_i cu y (conform Lemei 1.5.1) şi obținerea tot a unei baze se va numi *pivot* şi atunci vom putea vorbi despre *coloana pivotului* şi respectiv *linia pivotului* când ne vom referi la tabelele de mai sus.

b) Coloana pivotului se transformă astfel, pivotul se înlocuieşte cu 1 iar celelalte elemente (din coloană) cu 0.

c) Linia pivotului din noul tabel se obține prin împărțirea la pivot a liniei pivotului din tabelul 1.5.1.

d) Restul elementelor din tabel se transformă cu "regula dreptunghiului":

Se formează dreptunghiul care are pe diagonală pivotul şi elementul de transformat (notat E.T) . Elementul de transformat (E.T) se înlocuieşte cu diferența dintre el şi raportul dintre produsul elementelor de pe diagonala dreptunghiului care nu conține E.T şi pivot.

$$E.T = E.T - \frac{\text{prod.elem.de pe diag.ce nu contine E.T}}{\text{pivot}}$$

De exemplu, pentru obținerea coordonatei v'_1 se formează dreptunghiul y_1, v_1, v_i, y_i (vezi Tabelul 1.5.1) şi aplicând regula formulată mai sus avem $v'_1 = v_n - \frac{v_i y_1}{y_i}$.

Aplicații ale lemei substituției

1. Determinarea matricei de trecere de la o bază la alta.

O primă aplicație a lemei substituției o constituie determinarea matricei de trecere de la o bază la alta.

Exemplul 1.5.1 *Fie B = {e_1 = (1, 2, 4), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (1, 0, 1)} şi B_1 = { u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 1)} două baze în* $\boldsymbol{R}^3$ *iar* $x \in \boldsymbol{R}^3$ *un vector ale cărui coordonate în baza B sunt (-1, 2, 3). Să se determine matricea de trecere de la baza B la B' şi respectiv coordonatele vectorului x în baza B'.*

Deoarece pentru început cunoaştem coordonatele oricărui vector în baza canonică E_1 = (1, 0, 0), E_2= (0, 1, 0), E_3= (0, 0, 1), vom începe algoritmul cu un tabel format din coordonatele vectorilor e_1, e_2, e_3, u_1, u_2, u_3 în baza canonică şi vom căuta, conform lemei substituției să înlocuim toți vectorii bazei canonice cu cei ai bazei B.

În ultimul tabel astfel obținut vom obține coordonatele vectorilor din baza B' în baza B.

Tabelul 1.5.3

B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
E_1	1	0	1	1	1	1
E_2	2	1	0	1	1	0
E_3	4	1	1	1	0	0
B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	1	1	1	1
E_2	0	1	-2	-1	-1	-2
E_3	0	1	-3	-3	-4	-4
B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	1	1	1	1
e_2	0	1	-2	-1	-1	-2
E_3	0	0	-1	-2	-3	-2
B	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	1	0	0	-1	-2	-1
e_2	0	1	0	3	5	2
e_3	0	0	1	2	3	2

Din tabelul de mai sus rezultă că matricea de trecere este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a găsi coordonatele vectorului x în baza B' datele vor fi prelucrate conform tabelului de mai jos.

Tabelul 1.5.4

B	u_1	u_2	u_3	x
e_1	-1	-2	-1	-1
e_2	3	5	2	2
e_3	2	3	2	3
B	u_1	u_2	u_3	x
u_1	1	2	1	1
e_2	0	-1	-1	-1
e_3	0	-1	0	1
B	u_1	u_2	u_3	x
u_1	1	0	-1	-1
u_2	0	1	1	1
e_3	0	0	1	2
B	u_1	u_2	u_3	x
u_1	1	0	0	1
u_2	0	1	0	-1
u_3	0	0	1	2

2. Calculul inversei unei matrice.

Fie o matrice A de ordinul *n*, cu elemente reale, inversabilă. Notăm cu C_A^i, i = 1,…,n, coloanele matricei A şi fie $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, i, j = 1,…,n.

Dacă I este matricea identică de ordinul n, atunci I = (E_1^T, …, E_i^T, …, E_n^T), unde $E_j = (0,...,\underset{j}{1},...0)$, j = 1,…,n sunt vectorii bazei canonice din $\mathbf{R}^n$.

Acum se observă că relația $AA^{-1} = I$ poate fi scrisă sub forma $\alpha_{1j}C_A^{\ 1} + \ldots + \alpha_{ij}C_A^{\ i} + \ldots + \alpha_{nj}C_A^{\ n} = E_j^{\ T}$, $j = 1,\ldots,n$, ceea ce este echivalent cu faptul că elementele de pe coloana j a matricei inverse sunt coordonatele vectorului E_j al bazei canonice din $\mathbf{R}^n$ în baza formată din vectorii reprezentați [*)] de coloanele matricei A.

Exercițiu: Să se arate că dacă A este o matrice de ordinul *n*, inversabilă atunci vectorii reprezentați de coloanele matricei A formează o bază în $\mathbf{R}^n$.

Exemplul 1.5.2 *Să se cerceteze dacă matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *este inversabilă şi în caz afirmativ să i se determine inversa.*

Aplicăm lema substituției şi avem:

Tabelul 1.5.5

B	$C_A^{\ 1}$	$C_A^{\ 2}$	$C_A^{\ 3}$	$C_A^{\ 4}$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	1	0	-1	2	1	0	0	0
E_2	0	1	2	-1	0	1	0	0
E_3	-1	2	0	1	0	0	1	0
E_4	2	-1	1	1	0	0	0	1
B	$C_A^{\ 1}$	$C_A^{\ 2}$	$C_A^{\ 3}$	$C_A^{\ 4}$	E_1	E_2	E_3	E_4
$C_A^{\ 1}$	1	0	-1	2	1	0	0	0
E_2	0	1	2	-1	0	1	0	0
E_3	0	2	-1	3	1	0	1	0
E_4	0	-1	3	-3	-2	0	0	1
B	$C_A^{\ 1}$	$C_A^{\ 2}$	$C_A^{\ 3}$	$C_A^{\ 4}$	E_1	E_2	E_3	E_4
$C_A^{\ 1}$	1	0	-1	1	1	0	0	0
$C_A^{\ 2}$	0	1	2	0	0	1	0	0
E_3	0	0	-5	1	1	-2	1	0

[*] prin vector din $\mathbf{R}^n$ corespunzător coloanei unei matrice cu n linii vom înțelege vectorul ale cărui componente sunt elementele coloanei respective.

E_4	0	0	-4	-2	-2	1	0	1
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4
C_A^1	1	0	0	1	4/5	2/5	-1/5	0
C_A^2	0	1	0	1	2/5	1/5	2/5	0
C_A^3	0	0	1	-1	-1/5	2/5	-1/5	0
E_4	0	0	0	1	-1	-1	1	1
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	E_1	E_2	E_3	E_4
C_A^1	1	0	0	0	9/5	7/5	-6/5	-1
C_A^2	0	1	0	0	7/5	6/5	-3/5	-1
C_A^3	0	0	1	0	-6/5	-3/5	4/5	1
C_A^4	0	0	0	1	-1	-2	1	1

Deoarece toți vectorii care constituie coloanele lui A au intrat în componența unei baze, deducem, conform lemei substituției, că rangul matricei este egal cu dimensiunea acesteia, deci matricea este inversabilă. Inversa matricei A poate fi citită în ultimele 4 coloane ale tabelului de mai sus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & 7/5 & -6/5 & -1 \\ 7/5 & 6/5 & -3/5 & -1 \\ -6/5 & -3/5 & 4/5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculul rangului unei matrice.

Din Propoziția 1.2.1 se poate deduce că pentru a determina rangul unei matrice A cu *n* linii şi *m* coloane şi elemente numere reale este suficient să determinăm numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul de vectori corespunzător coloanelor matricei A.

Pentru a determina acest număr se poate folosi lema substituției, înlocuind vectorii bazei canonice din $\mathbf{R}^n$, atât timp cât este posibil cu vectorii corespunzători coloanelor matricei A. În momentul în care înlocuirea vectorilor din bază, cu alți vectori corespunzători coloanelor matricei A, nu mai este posibilă se obține rangul matricei lui A, egal cu numărul vectorilor intrați în bază.

Exemplul 1.5.3 *Să se determine rangul matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculele corespunzătore aplicării lemei substituției se regăsesc în tabelul de mai jos.

Tabelul 1.5.6

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
E_1	1	0	1	2	1	-1
E_2	2	-1	0	1	0	1
E_3	-1	2	3	0	-1	0
E_4	0	5	10	3	-2	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
C_A^1	1	0	1	2	1	-1
E_2	0	-1	-2	-3	-2	3
E_3	0	2	4	2	0	-1
E_4	0	5	10	3	-2	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
C_A^1	1	0	1	2	1	-1
C_A^2	0	1	2	3	2	-3
E_3	0	0	0	-4	-4	5
E_4	0	0	0	-12	-12	15
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6
C_A^1	1	0	1	0	-1	3/2
C_A^2	0	1	2	0	-1	3/4
C_A^4	0	0	0	1	1	-5/4
E_4	0	0	0	0	0	0

Conform celor spuse mai sus rangul matricei este egal cu 3 deoarece doar trei dintre vectorii C_A^i , i $\in${1, 2, 3, 4, 5 ,6} au intrat în *componența unei baze. Maximalitatea acestui număr este asigurată de Corolarul 1.3.1. Într-adevăr vectorii* C_A^{1}, C_A^{2}, C_A^{4} *vor constitui o bază pentru spațiul generat (se va vedea secțiunea 1.7 a acestui capitol) de vectorii* C_A^{i} , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *şi orice altă subfamilie formată din mai mult de 3 vectori va fi liniar dependentă.*

4. Rezolvarea sistemelor liniare.

Considerăm un sistem liniar de forma $Ax = b$, unde A este o matrice cu n linii şi m coloane, $n, m \in \mathbb{N}^*$, cu elemente numere reale iar x şi b sunt matrice coloană cu m şi respectiv n elemente. Notăm cu $\overline{A}$ matricea extinsă asociată sistemului (este matricea A la care se adaugă coloana b a termenilor liberi). Se cunosc următoarele rezultate:

1. Dacă rang A = rang $\overline{A} =_{not}$ r atunci sistemul este *compatibil*.

1a) Dacă r = m (m este numărul de necunoscute) atunci sistemul este *compatibil determinat* (soluția există şi este unică).

1b) Dacă r < m atunci sistemul este *compatibil nedeterminat* (sistemul are o infinitate de soluții).

2. Dacă rang A $\neq$ rang $\overline{A}$ atunci sistemul este *incompatibil*.

Pentru a determina fiecare din situațiile de mai sus putem aplica lema substituției. Astfel,

a) faptul că sistemul este incompatibil sau compatibil determinat sau nu (situațiile 1 şi 2 de mai sus) se poate stabili folosind metoda prezentată în paragraful precedent pentru determinarea rangului matricei asociate sistemului şi respectiv matricei extinse.

b) dacă sistemul este compatibil determinat, este uşor de văzut că de fapt x^T reprezintă coordonatele vectorului b^T în baza formată din vectorii asociați coloanelor matricei A şi putem aplica lema substituției pentru determinarea acestora.

c) dacă sistemul este compatibil nedeterminat cu variabilele secundare $x_{k+1}, \ldots, x_m$ şi ecuațiile principale corespunzătoare liniilor 1, 2, …, k ale matricii A (ordinea aceasta fiind obținută în urma unei eventuale renumerotări) atunci obținem sistemul

$$(1.5.2) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1m}x_m \\ . \\ . \\ b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - a_{km}x_m \end{pmatrix} =_{not} \beta.$$

Pentru a determina variabilele principale în funcție de cele secundare se poate proceda ca în cazul b) prezentat mai sus.

Exemplul 1.5.4 *Să se rezolve sistemul scris sub formă matricială* *Ax = b, unde A este matricea de la Exemplul 1.5.3,* $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ *şi* $b^T = (1, -2, 3, 0)$.

În primul rând studiem existența soluțiilor. Am stabilit deja în exemplul precedent că rangul matricei A este 3. Trebuie să calculăm şi rangul matricei extinse.

Tabelul 1.5.7

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
E_1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	2	-1	0	1	0	1	-2
E_3	-1	2	3	0	-1	0	3
E_4	0	5	10	3	-2	0	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b

C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	0	-1	-2	-3	-2	3	-4
E_3	0	2	4	2	0	-1	4
E_4	0	5	10	3	-2	0	0
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
C_A^2	0	1	2	3	2	-3	4
E_3	0	0	0	-4	-4	5	-4
E_4	0	0	0	-12	-12	15	20
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	0	-1	3/2	-1
C_A^2	0	1	2	0	-1	3/4	1
C_A^4	0	0	0	1	1	-5/4	1
E_4	0	0	0	0	0	0	-8

Din tabelul de mai sus se deduce că vectorul b poate fi introdus în bază în locul vectorului E_4, deci rangul matricei extinse este 4. Deoarece rang A $\neq$ rang $\overline{A}$ rezultă că sistemul este incompatibil.

Exemplul 1.5.5 *Să se rezolve sistemul de la Exemplul 1.5.4 în cazul în care vom considera $b^T = (1, -2, 3, 8)$. Aplicăm lema substituției şi obținem:*

Tabelul 1.5.8

B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
E_1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	2	-1	0	1	0	1	-2
E_3	-1	2	3	0	-1	0	3
E_4	0	5	10	3	-2	0	8
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
E_2	0	-1	-2	-3	-2	3	-4
E_3	0	2	4	2	0	-1	4
E_4	0	5	10	3	-2	0	8
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	2	1	-1	1
C_A^2	0	1	2	3	2	-3	4
E_3	0	0	0	-4	-4	5	-4
E_4	0	0	0	-12	-12	15	-12
B	C_A^1	C_A^2	C_A^3	C_A^4	C_A^5	C_A^6	b
C_A^1	1	0	1	0	-1	3/2	-1
C_A^2	0	1	2	0	-1	3/4	1

C_A^4	0	0	0	1	1	-5/4	1
E_4	0	0	0	0	0	0	0

În această situație este clar că rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, deoarece coordonata vectorului b corespunzătoare vectorului E_4 (în ultima bază) este 0 şi acesta nu va putea intra în locul lui E_4 într-o nouă bază. Deci sistemul este compatibil determinat.

Sistemul a cărui matrice (respectiv matrice extinsă) poate fi citită în primele 6 (respectiv 7) coloane şi ultimele 4 linii ale tabelului de mai sus va fi echivalent cu sistemul de la început deoarece este obținut numai prin transformări elementare (înmulțiri ale unei ecuații cu un scalar nenul şi adunarea cu o altă ecuație).

În acest sistem necunoscutele principale vor fi x_1, x_2, x_4 iar ecuațiile principale vor fi ec 1, ec 2 şi ec 3.

Folosind relația (1.5.2) corespunzătoare noului sistem rezultat din tabelul de mai sus avem:

Tabelul 1.5.9

B	C_A^1	C_A^2	C_A^4	b
C_A^1	1	0	0	$-1-x_3+x_5-3/2x_6$
C_A^2	0	1	0	$1-2x_3+x_5-3/4x_6$
C_A^4	0	0	1	$1-x_5+5/4x_6$

Din ultimul tabel obținem $x_1 = -1- x_3+ x_5 - 3/2x_6$, $x_2 = 1 - 2x_3 + x_5 - 3/4x_6$, $x_4 = 1 - x_5 + 5/4x_6$, $x_3, x_5, x_6 \in \mathbf{R}$. Acestea sunt soluțiile sistemului discutat.

4. Completarea unui familii de vectori liniar independenți din R^n la o bază. Este ușor de văzut că aplicarea de una sau mai multe ori a lemei substituției reprezintă o altă demonstrație a Teoremei 1.3.3 (exercițiu).

Exemplul 1.5.6 *Se consideră familia de vectori din $\boldsymbol{R}^6$, $F = \{v_1 = (1, 1, 1, 2, 2, 2), v_2 = (0, 2, 1, 3, 2, 1), v_3 = (1, 0, -1, 0, 1, -1)\}$. Să se verifice dacă aceasta este liniar independentă şi în caz afirmativ să se completeze la o bază din $\boldsymbol{R}^6$.*

Vom aplica lema substituției pentru a înlocui pe rând vectorii bazei canonice din $\boldsymbol{R}^6$ cu vectorii familiei F.

Dacă toți vectorii familiei F vor intra în componența unei baze atunci F este familie liniar independentă iar baza respectivă va constitui o soluție a problemei.

Tabelul 1.5.10

a)

B	v_1	v_2	v_3
E_1	1	0	1
E_2	1	2	0
E_3	1	1	-1
E_4	2	3	0
E_5	2	2	1
E_6	2	1	-1

b)

B	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	1
E_2	0	2	-1
E_3	0	1	-2
E_4	0	3	-2
E_5	0	2	-1
E_6	0	1	-3

c)

B	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	1
E_2	0	0	-1
v_2	0	1	-2
E_4	0	0	4
E_5	0	0	3
E_6	0	0	-1

d)

B	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	0
E_2	0	0	0
v_2	0	1	0
E_4	0	0	0
E_5	0	0	0
v_3	0	0	1

Din tabelul de mai sus rezultă că familia F este liniar independentă iar $B = \{v_1, v_2, v_3, E_2, E_4, E_5\}$ este baza căutată.

1.6 Spații vectoriale izomorfe

Considerăm două spații vectoriale V şi W peste acelaşi corp K. Avem definiția de mai jos:

Definiția 1.6.1 *Spunem că spațiile V şi W sunt izomorfe dacă există o aplicație bijectivă $\varphi : V \to W$ care satisface condițiile de mai jos:*

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, oricare ar fi $x,y \in V$,

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, oricare ar fi $\alpha \in K$ şi $x \in V$.

Aplicația φ se va numi un izomorfism.

Observația 1.6.1 Definiția de mai sus poate fi reformulată astfel încât condițiile 1) şi 2) să fie condensate într-una singură. Obținem definiția de mai jos :

"Spațiile V şi W sunt izomorfe dacă şi numai dacă există o aplicație bijectivă $\varphi : V \to W$ care satisface condiția

(1.6.1) $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$, oricare ar fi $x, y \in V$ şi $\alpha,\beta \in K$."

Cele două definiții sunt echivalente. Într-adevăr, (1.6.1) implică 1) şi 2) deoarece luăm $\alpha = \beta = 1$ în (1.6.1) pentru a obține 1) şi facem $\beta = 0$ în (1.6.1) pentru a obține 2).

Implicația reciprocă rezultă aplicând succesiv 1) şi 2). Astfel avem $\varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi(\alpha x) + \varphi(\beta y)$, conform 1) şi $\varphi(\alpha x) + \varphi(\beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$, conform 2). Demonstrația este încheiată.

Observația 1.6.2 a)Vectorul nul (notat 0_V) din spațiul V este dus prin izomorfisful φ în vectorul nul (notat 0_W) din spațiul W. b) Familiile liniar independente, respectiv liniar dependente din V sunt transformate prin izomorfismul φ tot în familii liniar independente, respectiv liniar dependente.

Afirmația a) a observației de mai sus rezultă observând că dacă vom aplica funcția φ identității $0 + x = x$, $x \in V$, obținem $\varphi(0) + \varphi(x) = \varphi(x)$ pentru toți $x \in V$. Adunând opusul lui $\varphi(x)$ în ambii membrii ai ultimei relații avem $\varphi(0) = 0_W$ şi rezultă concluzia.

Pentru a demonstra b) luăm $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o familie liniar independentă din V şi notăm cu $\varphi(F)$ mulțimea $\{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)\}$, transformata sa prin izomorfismul φ.

Considerăm o combinație liniară nulă cu vectorii familiei $\varphi(F)$: $\alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) + \ldots + \alpha_n\varphi(x_n) = 0$. Aplicăm proprietatea 2) din definiția izomorfismului şi avem

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = 0_W.$$

Ținând cont de afirmația a) şi de faptul că φ este aplicație bijectivă deducem că $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_V$.

Din ipoteză rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ şi rezultă că $\varphi(F)$ este liniar independentă. Folosind definiția familiilor liniar dependente se demonstrează şi afirmația referitoare la familii liniar dependente (exercițiu).

Teorema 1.6.1 *Orice spațiu vectorial V de dimensiune finită n este izomorf cu spațiul K^n, unde K este corpul comutativ peste care este considerat spațiul V.*

Demonstrație. Fie B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază fixată în V şi $x \in V$ oarecare. Coordonatele lui x în baza B , $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sunt determinate în mod unic conform Teoremei 1.2.2.

Construim aplicația $\varphi : V \to K^n$ care asociază fiecărui vector x din V coordonatele sale în raport cu baza B,

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Este evident faptul că aplicația astfel construită este bijectivă. Coordonatele vectorului $\alpha x + \beta y$ din V, unde $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$ sunt oarecare iar $y = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n$, sunt $(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)$. Ținând cont de modul în care au fost introduse operațiile spațiului vectorial K^n (vezi Exemplul 1.1.2), se observă că $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$. Conform Observației 1.6.1, rezultă concluzia.

Din teorema de mai sus rezultă că două spații de dimensiune finită care sunt izomorfe au aceeaşi dimensiune.

Observația 1.6.3 Dacă aplicația din Definiția 1.6.1 este doar injectivă atunci aceasta se numeşte *monomorfism* iar dacă este doar surjectivă se numeşte *epimorfism*. În cazul în care spațiile V şi W coincid şi φ este un izomorfism atunci această aplicație se va numi *automorfism*.

1.7 Subspații vectoriale

Fie V un spațiu vectorial peste corpul K. În cele ce urmează vom introduce două definiții echivalente pentru noțiunea de subspațiu vectorial al spațiului V.

Definiția 1.7.1 *Se numeşte subspațiu vectorial al spațiului vectorial V orice submulțime V_1 a acestuia, care împreună cu operațiile de adunare a vectorilor şi respectiv de înmulțire a vectorilor cu scalari capătă o structură de spațiu vectorial peste corpul K.*

Definiția 1.7.2 *O submulțime nevidă V_1 a lui V este un subspațiu vectorial dacă sunt îndeplinite condițiile:*

1) $x + y \in V_1$, *oricare ar fi* $x, y \in V_1$,
2) $\alpha x \in V_1$, *oricare ar fi* $x \in V_1$ *şi* $\alpha \in K$.

Teorema 1.7.1 *Definițiile de mai sus sunt echivalente.*

Demonstrație. Deoarece faptul că o submulțime a lui V care este subspațiu vectorial conform Definiției 1.7.1, este subspațiu vectorial şi conform Definiției 1.7.2 este evident, vom demonstra doar cealaltă implicație.

Presupunem că submulțimea nevidă V_1 este subspațiu vectorial al spațiului vectorial V în sensul Definiției 1.7.2. Pentru a demonstra că este subspațiu şi în sensul Definiției 1.7.1 vom verifica axiomele din Definiția 1.1.3. Condițiile 1) şi 2) din Definiția 1.7.2 ne asigură în primul rând că cele două operații moştenite de pe V sunt bine definite pe V_1. Proprietățile de asociativitate şi comutativitate a adunării sunt adevărate, deoarece au loc în V, deci şi în $V_1 \subseteq V$. Faptul că orice $x \in V_1$ are un opus tot în V_1 rezultă din condiția 2) în care luăm $\alpha = -1$ şi din Observația 1.1.2. Deoarece elementul neutru la adunare din V aparține şi lui V_1, căci $0 = 0x \in V_1$ oricare ar fi $x \in V_1$, conform 2), deducem că acesta este element neutru pentru operația de adunare a vectorilor din V_1.

În concluzie, V_1 este grup abelian cu operația de adunare a vectorilor. Axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 sunt verificate în mod evident (sunt consecințe ale condiției 2) şi ale ipotezei că V este spațiu vectorial). Deci V_1 este subspațiu vectorial în sensul Definiției 1.7.1.

Exemplul 1.7.1 ***Submulțimea $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0), x_i \in R, i = 1, 2, 3\}$ a lui R^4, împreună cu operațiile cu operațiile de adunare a vectorilor şi înmulțire a acestora cu scalari, moştenite de pe R^4 este un subspațiu vectorial al lui R^4.***

Într-adevăr, dacă $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3, 0)$ sunt doi vectori din V_1 atunci $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, 0) \in V_1$, iar $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, 0) \in V_1$, oricare ar fi $\alpha \in K$. Atunci, conform Definiției 1.7.2, V_1 este subspațiu vectorial al lui $\boldsymbol{R}^4$.

Exemplul 1.7. 2 ***Spațiul întreg şi mulțimea formată numai din vectorul nul din V sunt subspații liniare în V. Ele se numesc*** **subspații improprii*****. Celelalte subspații ale lui V se numesc*** **subspații proprii.**

Observația 1.7.1 Fie V_1 un subspațiu propriu al spațiului vectorial V. Dimensiunea lui V_1 este mai mică strict decât dimensiunea lui V, deoarece orice bază a lui V_1 este sistem liniar independent în V şi , conform Teoremei 1.3.2, numărul de vectori din acesta este mai mic decât dimensiunea lui V. Deci orice bază din V are un număr de elemente mai mare sau egal decât numărul de vectori dintr-o bază a lui V_1. Dacă cele două baze ar avea acelaşi număr de vectori, atunci baza din V_1 este şi bază în V şi generează aceeaşi mulțime, deci V = V_1 şi V_1 nu mai este spațiu propriu.

Fie acum G o submulțime nevidă a spațiului vectorial V. Vom nota $\overline{G}$ mulțimea tuturor combinațiilor liniare formate cu vectori din G.

Teorema 1.7.2 *Mulțimea* $\overline{G}$ *împreună cu operațiile definite pe V este un suspațiu vectorial al acestuia.*

Demonstrație. Dacă x, y $\in \overline{G}$ atunci fiecare dintre ei este o combinație liniară de vectori din G, deci şi suma lor va fi tot o combinație liniară de vectori din G. Analog se deduce că αx, $\alpha \in K$ este din $\overline{G}$. Folosind Definiția 1.7.2, rezultă concluzia.

Subspațiul $\overline{G}$ definit mai sus se numeşte *subspațiul generat* de G sau *închiderea liniară* a lui G sau încă, *acoperirea liniară* a lui G.

Exemplul 1.7.3 ***Fie G = {x_1 = (1, 2, -1, 0), x_2 = (0, -1, 2, 5), x_3 = (1, 0, 3, 10), x_4 = (2, 1, 0, 3), x_5=(1, 0, -1, -2), x_6 = (-1, 1, 0, 0)} $\subseteq R^4$. Să se determine o bază a subspațiului generat de G.***

Conform definiției avem $\overline{G}$ = {$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha_6 x_6$, $\alpha_i \in R$, i $\in${1,...,6} } şi este clar că {x_1, x_2,..., x_6} este un sistem de generatori pentru $\overline{G}$. Din Exemplul 1.5.3, ştim că rangul matricei care are drept coloane componentele vectorilor x_1, x_2,..., x_6 este egal cu 3. De aici deducem că doar trei dintre aceşti vectori sunt liniar independenți, restul fiind combinații liniare ale acestor trei vectori. Folosind Propoziția 1.2.1 şi rezultatele obținute în exercițiul amintit mai sus, rezultă că x_1, x_2, x_4 sunt liniar independenți. Deci B = {x_1, x_2, x_4} este şi sistem de generatori pentru G şi, de aici, pentru $\overline{G}$. Astfel, B este o bază pentru $\overline{G}$.

Exemplul 1.7.4 ***Fie V spațiul vectorial real definit în Exemplul 1.1.3. Submulțimea V_1 formată din totalitatea funcțiilor f$\in$ C^0([a, b]) care sunt pare este un subspațiu vectorial al lui V. De asemenea mulțimea funcțiilor f$\in$ C^0([a, b]), impare este un subspațiu vectorial al lui V.***

Teorema 1.7.3 *Mulțimea vectorilor x$\in$V ale căror coordonate satisfac un sistem liniar şi omogen de* n *ecuații cu* m *necunoscute* *şi rangul matricei sistemului egal cu* r *este un subspaţiu vectorial de dimensiune* m - r.

Demonstraţie. Fie V_1 mulţimea vectorilor $x\in V$ ale căror coordonate $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ într-o bază $B = \{u_1, u_2,\ldots,u_m\}$ a spaţiului V satisfac sistemul omogen de mai jos:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1m}\xi_m = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{im}\xi_m = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nm}\xi_m = 0
\end{aligned}
\tag{1.7.1}
$$

Este uşor de văzut că dacă $y = \eta_1u_1 + \eta_2u_2 +\ldots+ \eta_mu_m$ este un alt vector din V_1 atunci $(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_m + \eta_m)$ este tot o soluţie a sistemului (1.7.1). Deci $x + y \in V_1$.

Analog se arată că $\alpha x\in V_1$, oricare ar fi $\alpha\in K$ şi, conform Definiţiei 1.7.2, V_1 este un subspaţiu vectorial.

Presupunem că un minor nenul de ordinul *r* ce dă rangul matricei $A=(a_{ij})_{i = 1..n,\, j = 1,..m}$ a sistemului se află la intersecţia primelor *r* linii şi r coloane ale acesteia (eventual în urma unei renumerotări). Atunci $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sunt variabile principale iar restul vor fi secundare. Sistemul din care eliminăm ecuaţiile secundare se scrie

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1r}\xi_r = - a_{1r+1}\xi_{r+1} -\ldots- a_{1m}\xi_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{ir}\xi_r = - a_{ir+1}\xi_{r+1} -\ldots- a_{im}\xi_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{r1}\xi_1 + a_{r2}\xi_2 + \ldots + a_{rr}\xi_r = - a_{rr+1}\xi_{r+1} -\ldots- a_{rm}\xi_m.
\end{aligned}
$$

Fiind un sistem compatibil determinat în necunoscutele $\xi_1, \ldots, \xi_r$ se va determina $\xi_1 = b_{11}\xi_{r+1} + \ldots + b_{1m-r}\xi_m$, $\ldots \xi_i = b_{i1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{im-r}\xi_m, \ldots, \xi_r = b_{r1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{rm-r}\xi_m$. Atunci vectorul x se scrie

$$x = (b_{11}\xi_{r+1} + \ldots + b_{1m-r}\xi_m)u_1 + \ldots + (b_{i1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{im-r}\xi_m)u_i + \ldots + (b_{r1}\xi_{r+1} + \ldots + b_{rm-r}\xi_m)u_r + \xi_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \xi_m u_m.$$

Avem $x = \xi_{r+1}(b_{11} u_1 + \ldots + b_{i1}u_i + \ldots + b_{r1} u_r + u_{r+1}) + \ldots + \xi_{r+j}(b_{1j} u_1 + \ldots + b_{ij}u_i + \ldots + b_{rj} u_r + u_{r+j}) + \ldots + \xi_m(b_{1m-r} u_1 + \ldots + b_{im-r}u_i + \ldots + b_{rm-r} u_r + u_m)$.

Notăm $v_j = b_{1j} u_1 + \ldots + b_{ij}u_i + \ldots + b_{rj} u_r + u_{r+j}$, $j = 1, \ldots, m-r$ şi observăm că $S = \{v_j, j = 1, \ldots, m-r\}$ este un sistem de generatori pentru V_1.

Pentru a termina demonstrația este suficient să arătăm că S este şi sistem liniar independent. Fie $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + \ldots + \alpha_{m-r}v_{m-r} = 0$ o combinație nulă formată cu vectorii mulțimii S. Avem

$$\alpha_1(b_{11} u_1 + \ldots + b_{i1}u_i + \ldots + b_{r1} u_r + u_{r+1}) + \ldots + \alpha_j(b_{1j} u_1 + \ldots + b_{ij}u_i + \ldots + b_{rj} u_r + u_{r+j}) + \ldots + \alpha_{m-r}(b_{1m-r} u_1 + \ldots + b_{im-r}u_i + \ldots + b_{rm-r} u_r + u_m) = 0.$$

Rearanjând termenii obținem

$$(\alpha_1 b_{11} + \ldots + \alpha_j b_{1j} + \ldots + \alpha_{m-r}b_{rm-r})u_1 + \ldots + (\alpha_1 b_{i1} + \ldots + \alpha_j b_{ij} + \ldots + \alpha_{m-r}b_{im-r})u_i + \ldots + (\alpha_1 b_{r1} + \ldots + \alpha_j b_{rj} + \ldots + \alpha_{m-r}b_{rm-r})u_r + \ldots + \alpha_1 u_{r+1} + \ldots + \alpha_j u_{r+j} + \alpha_{m-r}u_m = 0.$$

Ținând cont de faptul că B este, în particular, sistem liniar independent, deducem că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-r} = 0$.

De aici rezultă că S este sistem liniar independent şi, fiind şi sistem de generatori pentru V_1, este bază. Dimensiunea subspațiului vectorial V_1 este egală cu numărul vectorilor din S, adică cu *m - r*.

Definiția 1.7.3 *Fie V un spațiu vectorial de dimensiune* n *şi* V_1 *un subspațiu al său de dimensiune* m < n *şi* $x_0 \in V$, $x_0 \notin V_1$ *fixat. Mulțimea vectorilor de forma* $x = x_0 + z$, $z \in V_1$ *se numeşte varietate liniară.*

Se observă că o varietate liniară nu este un subspațiu vectorial deoarece nu conține vectorul nul al spațiului.

1.8 Intersecții şi sume de subspații vectoriale

Fie V_1 şi V_2 două subspații vectoriale ale aceluiaşi spațiu vectorial V.

Definiția 1.8.1 *Intersecția subspațiilor* V_1 *şi* V_2 *este mulțimea I formată din vectorii comuni celor două subspații:*

$x \in I$ *dacă şi numai dacă* $x \in V_1$ *şi* $x \in V_2$.

Definiția 1.8.2 *Suma subspațiilor* V_1 *şi* V_2 *este mulțimea S a vectorilor de forma* $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, *adică*

$$S = \{x \in V,\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}.$$

Facem observația că pentru intersecția subspațiilor vectoriale vom folosi notația $I = V_1 \cap V_2$ iar pentru sumă vom nota $S = V_1 + V_2$.

Teorema 1.8.1 *Intersecția şi suma subspațiilor vectoriale* V_1 *şi* V_2 *sunt subspații vectoriale.*

Demonstrație. Pentru început demonstrăm că intersecția I este subspațiu vectorial. Fie $x, y \in I$ şi $\alpha \in K$. Atunci, conform Definiției 1.8.1, $x, y \in V_1$ şi $x, y \in V_2$. Deci $x + y \in V_1$, $x + y \in V_2$, $\alpha x \in V_1$ şi $\alpha x \in V_2$. De aici rezultă că $x + y \in I$ şi $\alpha x \in I$. Aplicăm Definiția 1.7.2 şi deducem că I este subspațiu vectorial al lui V.

Acum vom demonstra că S este subspațiu vectorial. Fie $x, y \in S$ şi $\alpha \in K$. Din Definiția 1.8.2 rezultă că există $x_1, y_1 \in V_1$ şi $x_2, y_2 \in V_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$ şi respectiv $y = y_1 + y_2$.

Se observă că $x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$, şi cum $x_1 + y_1 \in V_1$ iar $x_2 + y_2 \in V_2$ (V_1 şi V_2 fiind subspații vectoriale), deducem că $x + y \in S$.

Mai trebuie să arătăm că $\alpha x \in S$ şi demonstrația este încheiată. Avem $\alpha x = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, conform axiomei d) din definiția spațiului vectorial. Deoarece $\alpha x_1 \in V_1$ iar $\alpha x_2 \in V_2$, este clar că $\alpha x \in S$. Demonstrația este încheiată.

Observația 1.8.1 Dacă S este suma subspațiilor vectoriale V_1 şi V_2 atunci se poate spune că S este "cel mai mic subspațiu" care le conține, adică dacă S_1 este un alt subspațiu al spațiului V astfel încât $V_1 \subset S_1$, $V_2 \subset S_1$, atunci $S \subset S_1$. Pe de altă parte subspațiul intersecție este "cel mai mare " subspațiu inclus în cele două subspații în sensul că dacă I_1 este un alt subspațiu astfel încât $I_1 \subset V_1$ şi $I_1 \subset V_2$ atunci $I_1 \subset I$. Între subspațiile sumă şi intersecție există următoarea relație: $I \subset S$.

Observația 1.8.2 Noțiunea de sumă a subspațiilor vectoriale se poate extinde la un număr n de subspații V_1 , V_2 ,…, V_n ale spațiului vectorial V astfel: "Submulțimea S a lui V definită prin $S = \{x \in V$, există $x_i \in V_i$, $i = 1,\dots,n$ astfel încât $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \}$ se numeşte suma subspațiilor V_1 , V_2 ,…, V_n." În acelaşi mod ca şi în cazul $n = 2$ se poate demonstra că S este un subspațiu vectorial al lui V.

Observația 1.8.3 Un vector $x \in S$ nu se scrie neapărat în mod unic ca o sumă e doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2. Dacă există două perechi de vectori $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ şi $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ atunci este clar că dacă vom nota $y = x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ obținem $y \in V_1$ şi $y \in V_2$. Deci $y \in I$ şi $y_1 = x_1 - y$, $y_2 = x_2 + y$.

Pentru a elimina situația din observația de mai sus vom introduce o nouă definiție.

Definiția 1.8.3 *Spunem că suma S a subspațiilor vectoriale V_1 şi V_2 este directă dacă şi numai dacă orice vector $x \in S$ se scrie în mod unic ca o sumă de doi vectori unul din V_1 şi unul din V_2. În acest caz vom nota $S = V_1 \oplus V_2$.*

Observația 1.8.4 Ca şi în Observația 1.8.2, definiția de mai sus poate fi extinsă la cazul a n subspații vectoriale: "Spunem că suma S a subspațiilor vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_n$ este directă dacă şi numai dacă orice vector $x \in S$ se scrie în mod unic ca o sumă de vectori din V_i, $i = 1, \ldots, n$. Vom folosi notația $S = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ "

O consecință directă a Observației 1.8.3 este teorema de mai jos.

Teorema 1.8.2 *Fie V_1 şi V_2 două subspații vectoriale ale spațiului V. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1) $S = V_1 \oplus V_2$;

2) $I = (0)$.

Demonstrație. " 1) $\Rightarrow$ 2)". Presupunem prin absurd că există $y \in I$, $y \neq 0$. Fie $x \in S$. Există $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$. Deoarece $y \in I$

rezultă că $y_1 = x_1 - y \in V_1$ şi $y_2 = x_2 + y \in V_2$, iar $x = y_1 + y_2$, $y_1 \neq x_1$. De aici rezultă că scrierea lui x ca o sumă de doi vectori, unul din V_1 şi altul din V_2 nu este unică, ceea ce contrazice ipoteza.

Deci presupunerea făcută este falsă şi I = (0). Raționând asemănător se poate demonstra implicația " 2) $\Rightarrow$ 1)".

Teorema 1.8.3 *Dacă $B_1 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$ şi $B_2 = \{v_1, v_2,\ldots,v_k\}$ sunt baze în subspațiile V_1 şi V_2 iar $V_1 \cap V_2 = (0)$ atunci $B_1 \cup B_2$ este o bază în $V_1 \oplus V_2$.*

Demonstrație. Este uşor de văzut că, în general, dacă G_1, G_2 sunt sisteme de generatori pentru V_1 şi V_2 atunci $G_1 \cup G_2$ este sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. De aici se deduce că într-adevăr $B_1 \cup B_2$ este sistem de generatori pentru $V_1 \oplus V_2$.

Pentru a termina demonstrația este suficient să arătăm că $B_1 \cup B_2$ este sistem liniar independent. Dacă $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k = 0$ este o combinație nulă formată cu vectorii familiei $B_1 \cup B_2$ atunci $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \ldots - \beta_k v_k \in V_1 \cap V_2 = (0)$.

De aici obținem

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = 0,$$

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k = 0 \text{ şi,}$$

ținând cont că B_1 şi B_2 sunt în particular sisteme liniar independente, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$. Am obținut concluzia.

Teorema 1.8.4 *Dacă V_1 este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial V atunci există în V un subspațiu vectorial V_2 astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$. V_2 se va numi subspațiul complementar al lui V_1 în V sau complementul algebric al lui V_1.*

Demonstrație. Fie $B_1 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$ o bază în V_1. Deoarece B_1 este familie liniar independentă în V, atunci aplicăm Teorema 1.3.3 pentru a extinde familia B_1 la o bază în V. Fie $B = \{ u_1, u_2, \ldots,u_p ,v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ o bază în V, $p + k = n$. Fie V_2 subspațiul vectorial generat de familia $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Vom demonstra că acesta este un subspațiu care satisface cerințele din teoremă.

Din modul de construcție al lui V_2 rezultă imediat că $V = V_1 + V_2$. Mai trebuie să arătăm că suma este directă. Fie $y \in V_1 \cap V_2$. Atunci există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ şi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ scalari din K astfel încât $y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k$. De aici obținem relația $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \ldots - \beta_k v_k = 0$. Din faptul că B este o bază, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$ şi deci $y = 0$. Deci $V_1 \cap V_2 = (0)$ şi, conform Teoremei 1.8.2, suma subspațiilor V_1 şi V_2 este directă.

Observația 1.8.5 Subspațiul complementar nu este unic determinat, deoarece, conform demonstrației de mai sus, completarea unei baze din V_1 la o bază în V se poate realiza într-o infinitate de moduri. Dimensiunea acestuia este însă unic determinată fiind egală cu diferența dintre dimensiunea spațiului V şi cea a subspațiului V_1.

Teorema 1.8.5 (Grassmann) *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K şi V_1, V_2 două subspații ale sale. Atunci $\dim_K (V_1 + V_2) + \dim_K(V_1 \cap V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$.*

Demonstrație. Fie $B_0 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p\}$ o bază în $I = V_1 \cap V_2$. Deoarece $I \subset V_1$ şi $I \subset V_2$ vom extinde această bază, conform Teoremei 1.3.3 la câte o bază în V_1 şi respectiv V_2 obținând bazele $B_1 = \{u_1, u_2,\ldots,u_p, f_{p+1}, f_{p+2},\ldots,f_{p+r} \}$ şi respectiv $B_2 = \{ u_1, u_2,\ldots, u_p, v_{p+1}, v_{p+2},\ldots, v_{p+k}\}$.

Demonstrația ar fi încheiată dacă am putea arăta că $B = \{u_1, u_2,\dots,u_p, f_{p+1}, f_{p+2},\dots,f_{p+r}, v_{p+1}, v_{p+2},\dots,v_{p+k}\}$ este o bază în $V_1 + V_2$. Faptul că B este un sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$ rezultă conform observației generale făcute în cadrul demonstrației Teoremei 1.8.3. Trebuie să mai arătăm că B este sistem de vectori liniar independent. Facem o combinație nulă cu vectorii familiei B şi cu scalari din K. Avem

(1.8.1) $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_pu_p + \beta_1v_{p+1} + \beta_2v_{p+2} + \dots + \beta_kv_{p+k} +$

$$\gamma_1f_{p+1} + \gamma_2f_{p+2} + \dots + \gamma_rf_{p+r} = 0.$$

Deci $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_pu_p + \beta_1v_{p+1} + \beta_2v_{p+2} + \dots + \beta_kv_{p+k} =$

$$-\gamma_1f_{p+1} - \gamma_2f_{p+2} - \dots - \gamma_rf_{p+r} =_{not} z \in V_1 \cap V_2.$$

De aici şi din faptul că B_0 este bază în $V_1 \cap V_2$ rezultă că z se scrie în mod unic ca o combinație de vectori ai familiei B_0.

Deci există scalarii ζ_i, $i = 1,\dots,p$ astfel încât $z = \zeta_1u_1 + \zeta_2u_2 + \dots + \zeta_pu_p$. Din ultimele două relații rezultă că $\zeta_1u_1 + \zeta_2u_2 + \dots + \zeta_pu_p = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_pu_p + \beta_1v_{p+1} + \beta_2v_{p+2} + \dots + \beta_kv_{p+k}$.

Deoarece vectorul $z \in V_2$ are coordonate unice în baza B_2, deducem că $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ şi $\alpha_i = \zeta_i$, oricare ar fi $i = 1,\dots, p$.

Înlocuind valorile β_i, $i = 1,\dots,k$ găsite mai sus în relația (1.8.1) şi ținând cont de faptul că B_1 este sistem liniar independent deducem că $\alpha_i = 0$, $i = 1,\dots, p$ şi $\gamma_i = 0$, $i = 1,\dots, r$. Astfel am demonstrat că toți coeficienții din relația (1.8.1) sunt nuli, deci B este sistem liniar independent. Demonstrația a fost încheiată.

Exemplul 1.8.1 ***Se consideră subspațiile V_1 şi V_2 ale spațiului R^5 generate de familiile de vectori $G_1 = \{x_1 = (1, 0, 1, 3, 2), x_2 = (-1, 2, 0, 1, 0)\}$ şi respectiv $G_2 = \{y_1 = (0, 0, 1, -1, 1), y_2 = (-1, 0, 0, 1, 0), y_3 = (1, 2, 0, 1, 1)\}$. Să se găsească câte o bază pentru spațiile sumă şi respectiv intersecție, dacă aceste sunt nenule.***

În ceea ce priveşte spaţiul sumă a spaţiilor V_1 şi V_2, ştim că acesta este generat de $G_1 \cup G_2$, deci $V_1 + V_2 = \{x \in V, x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3, \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{R}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$.

Pentru a găsi o bază este suficient să determinăm o familie cu cel mai mare număr de vectori liniar independenţi, conform demonstraţiei Teoremei 1.3.1. Pentru aceasta vom folosi lema substituţiei, aşa cum s-a văzut în capitolul de aplicaţii ale acesteia. Vom înlocui vectorii din baza canonică cu vectori ai familiei $G_1 \cup G_2$ atât timp cât este posibil, adică atât timp cât vectorii din $G_1 \cup G_2$, care nu au intrat încă în bază au coordonate nenule în liniile corespunzătoare vectorilor din baza canonică, ce nu au fost încă eliminaţi.

Dacă această condiţie nu mai este satisfăcută, atunci este clar că vectorii din $G_1 \cup G_2$ care nu au intrat în componenţa bazei sunt combinaţii liniare de vectorii din $G_1 \cup G_2$ care au intrat. Deci acei vectori intraţi în bază sunt sistem de generatori pentru $G_1 \cup G_2$ şi fiind sistem liniar independent, formează o bază pentru $V_1 + V_2$.

Tabelul 1.8.1

a)

B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
E_1	1	-1	0	-1	1
E_2	0	2	0	0	2
E_3	1	0	1	0	0
E_4	3	1	-1	1	1
E_5	2	0	1	0	1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	-1	0	-1	1
E_2	0	2	0	0	2
E_3	0	1	1	1	-1
E_4	0	4	-1	4	-2

b)

B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	1	0	0
E_2	0	0	2	-2	0
x_2	0	1	0	1	0
E_4	0	0	-3	0	0
y_3	0	0	-1	0	1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0	0	0
E_2	0	0	0	-2	0
x_2	0	1	0	1	0
y_1	0	0	1	0	0

E_5	0	2	1	2	-1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	1	0	0
E_2	0	0	-2	-2	4
x_2	0	1	1	1	-1
E_4	0	0	-5	0	2
E_5	0	0	-1	0	1

y_3	0	0	0	0	1
B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0	0	0
y_2	0	0	0	1	0
x_2	0	1	0	0	0
y_1	0	0	1	0	0
y_3	0	0	0	0	1

Din tabelul de mai sus se deduce că $G_1 \cup G_2$ formează o bază, deci subspațiul $V_1 + V_2$ are dimensiunea 5. Din Observația 1.7.1 rezultă că $V_1 + V_2$ coincide cu $\boldsymbol{R}^5$. Din cele spuse mai sus rezultă că G_1 şi G_2 sunt familii liniar independente, deci sunt baze pentru spațiile generate V_1 şi V_2. Astfel $\dim_{\mathbf{R}} V_1 = 2$ şi $\dim_{\mathbf{R}} V_2 = 3$. Aplicând teorema lui Grassmann se deduce că $\dim_{\mathbf{R}}(V_1 \cap V_2) = \dim_{\mathbf{R}} V_1 + \dim_{\mathbf{R}} V_2 - \dim_{\mathbf{R}}(V_1 + V_2) = 0$. Deci $V_1 \cap V_2 = (0)$ şi nu se mai pune problema determinării unei baze.

1.9 Exerciții

1. Fie K un corp de caracteristică 0 şi V = K x K. Să se verifice dacă V împreună cu operațiile

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in K \times K$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0),\ \alpha \in K$$

are o structură de spațiu vectorial peste corpul K.

R: Nu, deoarece nu este verificată axioma a) din Definiția 1.1.3.($1(x_1, x_2) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$).

2. Considerăm mulțimea $\mathbf{R}^4$ împreună cu operațiile

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + 2y_1, x_2 + 2y_2, x_3 + 2y_3, x_4 + 2y_4),$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se verifice dacă aceasta are o structură de spațiu vectorial peste corpul $\mathbf{R}$.

R: Nu, deoarece operația "+" nu este comutativă.

3. Fie mulțimea $\mathbf{R}^2$ pentru care definim operațiile

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (2x_1 + 2y_1, 2x_2 + 2y_2), (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2), \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se studieze dacă $\mathbf{R}^2$ este spațiu vectorial real.

R: Nu, deoarece operația "+" nu are element neutru.

4. Să se demonstreze că mulțimea matricelor cu *n* linii şi *m* coloane şi elemente reale, $M_{nm}(\mathbf{R})$, împreună cu operațiile de adunare a matricelor şi înmulțire a acestora cu numere reale are o structură de spațiu vectorial real. Să se determine o bază a acestui spațiu.

R: Se verifică axiomele Definiției 1.1.3. Definim matricele $E_{i,j} \in M_{nm}(\mathbf{R})$ astfel $E_{i,j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ . & ... & . & ... & . \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ . & ... & . & ... & . \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array}$. Familia $B = \{ E_{i,j} , i = 1,\dots, n, j = 1,\dots,m\}$ este o bază în $M_{nm}(\mathbf{R})$.

5. Să se demonstreze că spațiul vectorial de la Exercițiul 4 este izomorf cu spațiul vectorial real $\mathbf{R}^{nm}$.

R: Dacă $x \in \mathbf{R}^{nm}$ are coordonatele $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{nm})$ într-o bază din $\mathbf{R}^{nm}$, atunci se construieşte aplicația $\varphi : \mathbf{R}^{nm} \to M_{nm}(\mathbf{R})$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{nm}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_j & \ldots & \xi_m \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ \xi_{(i-1)m+1} & \ldots & \xi_{(i-1)m+j} & \ldots & \xi_{im} \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ \xi_{(n-1)m+1} & \ldots & \xi_{(n-1)m+j} & \ldots & \xi_{nm} \end{pmatrix},$$

care este în mod evident bijectivă. Se verifică uşor că φ satisface condițiile 1) şi 2) din definiția izomorfismului de spații vectoriale.

6. Să se stabilească dacă familiile de vectori de mai jos sunt liniar independente în spațiile vectoriale corespunzătoare.

a) $\{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\}$ în spațiul vectorial real $M_3(\mathbf{R})$.

b) $\{x_1 = (-1, 1, 2, 3), x_2 = (0, 1, 2, 3), x_3 = (1, -1, 2, 3)\}$ în $\mathbf{R}^4$.

c) $\{p_1 = t^2 + t + 1 , p_2 = t + 1, p_3 = 2t^2 + t + 1\}$ în spațiul P(t) al polinoamelor de orice grad, în nedeterminata t şi cu coeficienți reali (vezi Exemplul 1.1.5).

d) $\{y_1 = (1, i, 0, 1), y_2 = (2, 0, 1 + i, 3), y_3 = (4 + i, 0, 0, 1)\}$ în spațiul vectorial complex $\mathbf{C}^4$.

R: a) Nu. b) Da. c) Nu. d) Da.

7. Să se demonstreze că mulțimea numerelor complexe dotată cu operațiile de adunare a numerelor complexe şi înmulțire a numerelor reale cu numere complexe are o structură de spațiu vectorial real.

Indicație: Se verifică axiomele din Definiția 1.1.3.

8. Să se calculeze $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}$ şi respectiv $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

R: se observă că {1} este o bază în spaţiul vectorial **C** considerat peste el însuşi în timp ce {1, i} este o bază în spaţiul vectorial **C** considerat peste corpul numerelor reale. Deci $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 1$ iar $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$.

9. Să se demonstreze că $B_1 = \{u_1 = (1, 1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0, 0), u_3 = (3, 2, 1, 1, 0), u_4 = (0, 0, 1, 1, 1), u_5 = (1, 0, 0, 0, 0)\}$ şi respectiv $B_2 = \{v_1 = (1, 1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1, 0), u_3 = (2, 0, 1, 0, 2), u_4 = (1, 0, 1, 1, 1), u_5 = (0, 1, 1, 1, 1)\}$ sunt baze în $\mathbf{R}^5$ şi să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la B_2. Dacă (1, 1, 1, 1, 1) sunt coordonatele unui vector x în baza B_1 să se determine coordonatele acestuia în baza B_2.

R: Dacă $E_1, E_2, \ldots, E_5$ este baza canonică în $\mathbf{R}^5$, atunci se aplică Lema substituţiei şi avem:

Tabelul 1.9.1

B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
E_1	1	1	3	0	1	1	0	2	1	0
E_2	1	0	2	0	0	1	1	0	0	1
E_3	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
E_4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	1	3	0	1	1	0	2	1	0
E_2	0	-1	-1	0	-1	0	1	-2	-1	1
E_3	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
E_4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	1	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	2	-1	1	0	0	1	0	-1
E_2	0	0	0	1	-1	1	1	-1	0	2
u_2	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
E_4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	1	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

u_1	1	0	0	-3	1	0	-2	1	-2	-3
E_2	0	0	0	1	-1	1	1	-1	0	2
u_2	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
u_3	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
E_5	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	0	0	1	0	-2	7	1	0
E_2	0	0	0	0	-1	1	1	-3	-1	1
u_2	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
u_3	0	0	1	0	0	0	1	-2	0	0
u_4	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1
B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	1	0	0	0	0	1	-1	4	0	1
u_5	0	0	0	0	1	-1	-1	3	1	-1
u_2	0	1	0	0	0	1	-1	1	0	0
u_3	0	0	1	0	0	0	1	-2	0	0
u_4	0	0	0	1	0	0	0	2	1	1

Deci matricea de trecere este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pentru a determina coordonatele vectorului x în baza B_2 se poate folosi formula (1.4.2) şi avem $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 3/2 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & -1/2 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 1/2 & 3/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 & -3/2 & 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Noile coordonate sunt (5/2, 5/2, 3/4, 7/4, -9/2).

10. Să se determine subspațiile generate de următoarele familii de vectori. Să se găsească câte o bază în aceste subspații şi să se precizeze dimensiunea lor.

a) $G_1 = \{p_1 = t^2 + t + 1 , p_2 = t + 1, p_3 = t^3\} \subset P(t)$,

b) $G_2 = \{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\} \subset$ $M_2(\mathbf{R})$

c) $G_3 = \{x_1 = (1, -1, 2, 3), x_2 = (0, 1, 1, 1), x_3 = (1, 2, -1, 1), x_4 = (2, 2, 2, 4)\} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $G_4 = \{y_1 = (1, i, 1), y_2 = (1 + i, 0, 1), y_3 = (1, i, 1)\} \subset \mathbf{C}^3$, unde $\mathbf{C}^3$ este considerat spațiu vectorial real.

R: a) Familia G_1 este liniar independentă, deci este bază pentru spațiul generat $\overline{G}_1$. Avem $\overline{G}_1 = \{\alpha t^3 + \beta t^2 + (\beta + \gamma)t + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$, iar $\dim_{\mathbf{R}} \overline{G}_1 = 3$.

b) Se constată că familia G_2 este liniar independentă, fiind la rândul ei bază pentru spațiul generat $\overline{G}_2$. Deoarece $\dim_{\mathbf{R}} \overline{G}_2 = 4 = \dim_{\mathbf{R}} M_2(\mathbf{R})$, deducem că $\overline{G}_2 = M_2(\mathbf{R})$, conform Observației 1.7.1.

c) Rangul matricei care pe coloane componentele vectorilor din familia G_3 este 4. Atunci rezultă, conform Propoziției 1.2.1, că familia G_3 este liniar independentă şi deci este bază în $\overline{G}_3$. Ca şi în cazul punctului b) se deduce că $\overline{G}_3 = \mathbf{R}^4$.

d) Deoarece relația $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul $\beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$, care are şi alte soluții în afara soluției nule, rezultă că familia G_4 este liniar dependentă. Se observă că $\{y_1, y_2\}$ este sistem liniar independent şi fiind şi sistem de generatori pentru G_4 este o bază pentru $\overline{G}_4$. Deci $\dim_{\mathbf{R}} \overline{G}_4 = 2$, iar $\overline{G}_4 = \{\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

11. Se consideră familia de vectori G_2 de la exercițiul 10 despre care s-a demonstrat că este o bază a spațiului vectorial real $M_2(\mathbf{R})$. Să se

verifice că familia B = {$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$} este de asemenea o bază pentru $M_2(\mathbf{R})$ şi să se determine matricea de trecere de la G_2 la B.

R: Deoarece ecuația vectorială $\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 + \delta D_1 = 0$ admite doar soluția nulă $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, rezultă că B este un sistem liniar independent în $M_2(\mathbf{R})$. Este uşor de văzut că acesta este şi sistem de generatori, deci este o bază pentru $M_2(\mathbf{R})$. Elementele matricei de trecere de la baza G_2 la baza B sunt soluțiile sistemului de ecuații vectoriale

$$A_1 = m_{11}A + m_{12}B + m_{13}C + m_{14}D$$
$$B_1 = m_{21}A + m_{22}B + m_{23}C + m_{24}D$$
$$C_1 = m_{31}A + m_{32}B + m_{33}C + m_{34}D$$
$$D_1 = m_{41}A + m_{42}B + m_{43}C + m_{44}D.$$

Rezolvând sistemul de mai sus obținem matricea de trecere

$$M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Să se verifice dacă mulțimile de mai jos sunt subspații vectoriale şi în caz afirmativ să se determine câte o bază pentru acestea.

a) $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3\} \subset \mathbf{R}^4$

b) $V_2 = \{ x \in \mathbf{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

c) $V_3 = \{x \in \mathbf{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

d) $V_4 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1 + x_2 - x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^4$.

R: a) Da, V_1 este subspațiu vectorial, deoarece sunt verificate condițiile Definiției 1.7.2. Dacă $E_1 = (1, 0, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1, 0)$, $E_4 = (0, 0, 0, 1)$ sunt vectorii bazei canonice în $\mathbf{R}^4$ atunci este ușor de văzut că $\{E_1, E_2, E_3\}$ este o bază pentru V_1.

b) V_2 nu este subspațiu vectorial. Într-adevăr dacă $x, y \in V_2$ atunci avem $x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$, $y_1 + y_2 - y_3 + 1 = 0$ și de aici $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3 + 2 = 0$. Se observă că dacă $x + y \in V_2$, atunci avem $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3 + 1 = 0$. Din ultimele două relații deducem că $2 = 1$, ceea ce este absurd. Deci $x + y \notin V_2$ și având în vedere Definiția 1.7.2 rezultă concluzia.

c) V_3 este spațiu vectorial, conform Teoremei 1.7.3. Rezolvând sistemul $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ deducem că $V_3 = \{\alpha(1/3, -2/3,1), \alpha \in \mathbf{R}\}$. O bază a lui V_3 este $\{(1/3, -2/3,1)\}$, dimensiunea lui fiind egală cu 1.

e) Răspunsul este DA, conform Teoremei 1.7.3. Procedând ca mai sus, deducem că $V_4 = \{\alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(0, 1, 1, 1), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Deoarece familia de vectori $\{ e_1 = (1, 0, 1, 1), e_2 = (0, 1, 1, 1) \}$ este liniar independentă, fiind în același timp sistem de generatori pentru V_4, rezultă că aceasta reprezintă o bază pentru V_4 iar $\dim_{\mathbf{R}} V_4 = 2$.

13. Fie V_1 spațiul generat de familia $F = \{ x_1 = (-1, 0, 1, 0), x_2 = (1, 1, 1, 0), x_3 = (0, 1, 2, 0)\} \subset \mathbf{R}^4$ și V_2 spațiul generat de familia $G = \{ y_1 = (1, 1, 0, 0), y_2 = (1, 1, -1, 0)\} \subset \mathbf{R}^4$. Să se determine subspațiile $V_1 + V_2$ și respectiv $V_1 \cap V_2$, precizând câte o bază pentru acestea precum și pentru V_1 și V_2.

R: Se cunoaște faptul că $F \cup G$ este un sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Deoarece familia $\{x_1, x_2, y_1\}$ este un sistem liniar independent maximal în F $\cup$ G deducem că acesta este sistem de generatori pentru F $\cup$ G, deci bază $V_1 + V_2$. Dimensiunea lui $V_1 + V_2$ este egală cu 3. În acelaşi mod se poate stabili că $\{x_1, x_2\}$ şi respectiv $\{y_1, y_2\}$ sunt baze pentru V_1 şi respectiv V_2, dimensiunile acestor subspații fiind egale cu 2. Aplicând teorema lui Grassmann se deduce că $\dim_{\mathbf{R}} V_1 \cap V_2 = 1$. Pentru a determina $V_1 \cap V_2$, observăm că $V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4$, există numerele reale a, b, α, β, γ astfel încât $ay_1 + by_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3\}$. Rezolvând ecuația vectorială încât $ay_1 + by_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ cu necunoscutele a, b, α, β, γ, care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{aligned} a + b + \alpha - \beta \quad &= 0 \\ a + b \quad - \beta - \gamma &= 0 \\ - b - \alpha - \beta - 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Obținem $a = 2\beta + 2\gamma$, $b = \beta + \gamma$, $\alpha = 2\beta + 3\gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Deci
$V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (2\beta + 2\gamma)\, y_1 + (\beta + \gamma)y_2,\ \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$ sau
$V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (\beta + \gamma)(3, 3, -1, 0), \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$. Se observă că $\{(3, 3, -1, 0)\}$ este o bază pentru $V_1 \cap V_2$.

14. Să se determine câte un complement algebric pentru fiecare din subspațiile proprii de la exercițiile 12 şi 13.

R: a) ex. 12. Am văzut că $\{E_1, E_2, E_3\}$ este o bază pentru V_1. Atunci subspațiul vectorial generat de E_4 este un complement algebric al lui V_1, conform demonstrației Teoremei 1.8.4.

c) ex 12. Deoarece $\{e_1 = (1/3, -2/3,1)\}$ este o bază a spațiului V_3 se observă că $\{e_1, E_2, E_3\}$, unde $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$, este o bază pentru $\mathbf{R}^3$. Din aceleaşi motive ca cele folosite mai sus, subspațiul generat de $\{E_2, E_3\}$ este un complement algebric al lui V_3.

d) ex.12. În spațiul V_4 avem baza { $e_1 = (1, 0, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 1)$ } care poate fi completată cu vectorii E_3, E_4 (vectorii bazei canonice din R^4) la o bază în $\mathbf{R}^4$. Deci subspațiul generat de $\{E_3, E_4\}$ este un complement algebric al lui V_3.

Raționând ca mai sus se poate stabili că un subspațiu algebric complementar al subspațiului $V_1 \subset \mathbf{R}^4$ de la Exercițiul 13 este generat de familia $\{E_3, E_4\}$ iar pentru subspațiul V_2 de la același exercițiu putem considera subspațiul generat de familia $\{E_1, E_4\}$.

15.Să se verifice dacă suma perechilor de spații vectoriale de mai jos este directă şi în caz afirmativ să se calculeze spațiul sumă.

a) $V_1 = \{x \in \mathbf{R}^5, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0,$ $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_5 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3,4\} \subset \mathbf{R}^5$.

b) $V_1 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, 2x_1 - x_3 = 0\}$ şi $V_2 = \{x \in \mathbf{R}^4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), 2x_1 - x_3 + x_4 = 0,$ $x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$.

R: Pentru a vedea dacă suma este directă este suficient să calculăm $V_1 \cap V_2$ şi să aplicăm Teorema 1.8.2. a) Se observă că $V_2 = \{x \in \mathbf{R}^5, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_5 = 0\}$ astfel că $V_1 \cap V_2$ este mulțimea vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ din $\mathbf{R}^5$ ale căror coordonate satisfac sistemul

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0, x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_5 = 0, x_5 = 0.$$

Acest sistem este compatibil nedeterminat, admițând şi soluții diferite de soluția nulă. Deci $V_1 \cap V_2 \neq (0)$ şi suma nu este directă.

b) Ca şi în cazul punctului a) $V_1 \cap V_2$ este mulțimea vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ din $\mathbf{R}^4$ ale căror coordonate satisfac sistemul

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,\quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, 2x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_4 = 0.$$

Acest sistem este compatibil determinat şi admite doar soluția nulă. Atunci $V_1 \cap V_2 = (0)$ şi suma este directă. Deoarece dimensiunile subspațiilor V_1 şi respectiv V_2 sunt egale cu 2, deducem aplicând teorema lui Grassmann că $\dim_{\mathbf{R}} V_1 \oplus V_2 = 4$. Deci $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$.

16. Să se arate că suma subspațiilor generate de familiile $G_1 = \{e_1 = (2, 3, 1, 5), e_2 = (1, 1, 5, 2), e_2 = (3, 4, 6, 7)\}$ şi $G_2 = \{f_1 = (0, 0, 0, 1), f_2 = (1, 2, 3, 1)\}$ este directă şi egală cu întreg spațiul. Să se determine descompunerea vectorului $x = (2, 2, 3, 7)$ în sumă de doi vectori, unul din $\overline{G}_1$ şi altul din $\overline{G}_2$.

R: Se demonstrează că $\dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 = \dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 = 2$. Deoarece $G_1 \cup G_2$ este sistem de generatori pentru $\overline{G}_1 + \overline{G}_2$ în care avem sistemul liniar independent $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$, maximal (cu cel mai mare număr de vectori) putem spune că $B = \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ este o bază pentru $\overline{G}_1 + \overline{G}_2$. Deci $\dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 + \overline{G}_2 = 4$. Folosind teorema lui Grassmann deducem că $\dim_{\mathbf{R}}\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = 0$, deci $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = (0)$ şi suma este directă. Mai mult $\overline{G}_1 + \overline{G}_2$ are dimensiunea egală cu 4 şi rezultă că $\overline{G}_1 + \overline{G}_2 = \mathbf{R}^4$.

Vectorul x are coordonatele $(1, 1, 1, -1)$ în baza B şi $x = e_1 + e_2 + f_1 - f_2$. Atunci luăm $x_1 = e_1 + e_2 = (3, 4, 6, 7)$ şi $x_2 = f_1 - f_2 = (-1, -2, -3, 0)$ şi $x = x_1 + x_2$ este descompunerea căutată.