CAPITOLUL 2

VECTORI LIBERI

2.1 Segment orientat. Vector liber

Acest capitol este dedicat în totalitate studierii spaţiului vectorilor liberi, spaţiu cu foarte multe aplicaţii în geometrie, fizică şi nu numai. Elementele acestui spaţiu vor fi definite în cele ce urmează.

Fie E_3 spaţiul geometriei elementare. Elementele acestui spaţiu se numesc puncte.

Definiţia 2.1.1 *Numim segment orientat orice pereche ordonată (A, B) $\in$ E_3 x E_3. Vom folosi notaţia $\overrightarrow{AB}$ pentru acest segment, cărui reprezentare grafică este dată în fig. 1.*

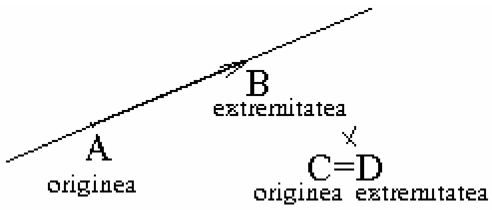

Fig. 1

Punctul A se va numi *originea* segmentului orientat iar B *vârful* sau *extremitatea*. Dacă puntele A şi B sunt diferite atunci acestea determină în mod unic o dreapta care se numeşte *dreapta suport* a segmentului orientat.

Dacă C = D atunci convenim să numim segmentul orientat (C, D) $\overset{not}{=} \overrightarrow{CC} \overset{not}{=} \overrightarrow{0}$ *segment orientat nul*. Este evident că un segment orientat nul nu determină în mod unic o dreaptă, ceea ce face ca în acest caz să spunem că orice dreaptă care trece prin punctul C este o dreaptă suport a segmentului $\overrightarrow{CC}$.

Definiția 2.1.2 *Două segmente orientate nenule au aceeaşi direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid. Orice două segmente orientate nule au aceeaşi direcție.*

Un segment orientat nenul determină pe dreapta sa suport un anumit sens, lucru ce permite introducerea noțiunii de *acelaşi sens* pentru două segmente orientate cu aceeaşi direcție sau altfel spus pentru două segmente orientate *coliniare*.

Definiția 2.1.3 *a) Spunem că două segmente orientate nenule cu aceeaşi dreaptă suport, au acelaşi sens dacă sensurile determinate de ele pe dreapta suport coincid fig. 2 a).*

b) Două segmente orientate nenule cu aceeaşi direcție, dar cu drepte suport diferite, au acelaşi sens dacă, în planul determinat de dreptele suport, extremitățile lor sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta care uneşte originile segmentelor fig. 2 b).

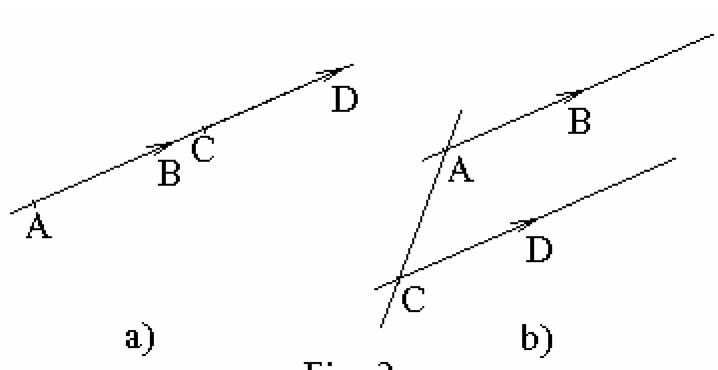

Fig. 2

Definiția 2.1.4 *Se numeşte lungime (normă sau modul) al unui segment orientat* $\overrightarrow{AB}$ *distanța de la punctul A la punctul B. Vom folosi notația* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ *pentru lungimea segmentului orientat* $\overrightarrow{AB}$.

Până acum am pus în evidență trei elemente caracteristice ale unui segment orientat nenul: direcția, sensul şi lungimea. În mod evident, acestea nu determină în mod unic un segment orientat, dar împreună cu originea segmentului fac acest lucru. În cele ce urmează se va elimina acest neajuns prin definirea unor clase unic determinate de cele trei elemente, clase ce realizează "eliberarea de origine".

Fie M mulțimea tuturor segmentelor orientat nenule. Pe această mulțime definim relația binară ρ astfel,

$$\overrightarrow{AB}\,\rho\,\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ şi } \overrightarrow{CD} \text{ au aceeaşi direcție,}$$
$$\text{acelaşi sens şi aceeaşi lungime}$$

Este uşor de verificat că această relație este o relație de echivalență, adică este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. În continuare vom denumi această relație de echivalență *relație de echipolență*.

Relația de echipolență poate fi prelungită şi la segmentele orientate nule astfel: oricare două segmente orientate nule sunt echipolente între ele. Noua relație, considerată pe mulțimea tuturor segmentelor orientate din spațiu, este în continuare o relație de echivalență.

Definiția 2.1.5 *Clasele de echivalență[*)] ale segmentelor orientate, relativ la relația de echipolență, se numesc vectori liberi.*

Vectorii liberi se vor nota cu litere mici ale alfabetului latin cu o bară deasupra : $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$. Vectorul liber care conține segmentul orientat $\vec{AB}$ va fi notat asemănător, adică $\overline{AB}$ ($\overline{AB}$ este mulțimea segmentelor orientate echipolente cu $\vec{AB}$).

Dacă $\vec{AB} \in \bar{a}$ atunci spunem că $\vec{AB}$ este un *reprezentant* al lui $\bar{a}$. Noțiunile de direcție, sens şi lungime introduse pentru un segment orientat, sunt extinse la clasa din care acesta face parte, reprezentând direcția, sensul şi lungimea comună tuturor elementelor din clasă. Pentru a desemna lungimea unui vector liber vom folosi notațiile $\|\bar{a}\|$ sau $\left\|\overline{AB}\right\|$.

Vectorul liber de lungime 0 (clasa tuturor segmentelor orientate nule) se numeşte *vectorul nul* şi se notează $\bar{0}$. Vectorii liberi care au aceeaşi direcție se numesc *coliniari*, iar vectorii liberi care au reprezentanții paraleli cu acelaşi plan se numesc *coplanari*. Doi vectori liberi ai căror reprezentanți sunt echipolenți sunt *egali*.

Definiția 2.1.6 *Orice vector liber care are lungimea egală cu 1 se numeşte versor.*

Mulțimea vectorilor liberi va fi notată V_3. În secțiunea următoare vom defini o operație internă pe V_3 (adunarea vectorilor liberi) şi o operație externă, de înmulțire cu numere reale, împreună cu care V_3 va căpăta o structură de spațiu vectorial.

---

[*] O clasă de echivalență relativ la relația binară ρ, considerată pe o mulțime M este o submulțime C_1 a lui M care are proprietatea $x, y \in C_1 \Leftrightarrow x\rho y$.

2.2 Operații cu vectori liberi

I. Adunarea vectorilor liberi

Definiția 2.2.1 *Dacă* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *sunt doi vectori liberi şi* $\vec{OA}$*, respectiv* $\vec{AB}$ *sunt doi reprezentanți ai acestora, atunci* $\bar{a}+\bar{b}$ *este vectorul liber* $\bar{c}$ *al cărui reprezentant este* $\vec{OB}$*, fig. 3 a).*

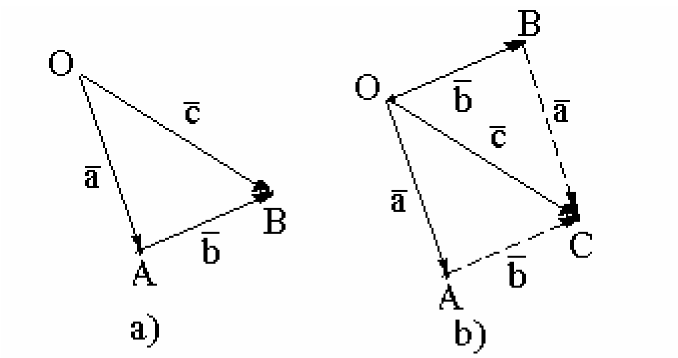

Fig. 3

Regula de adunarea a vectorilor liberi din definiția de mai sus este cunoscută sub denumirea de *regula triunghiului*.

Nu este dificil de văzut că dacă vom considera paralelogramul determinat de vectorii $\vec{OA} \in \bar{a}$ şi $\vec{OB} \in \bar{b}$, atunci (vezi fig. 3 b)) vectorul $\vec{OC} \in \bar{c} = \bar{a}+\bar{b}$ este diagonala acestui paralelogram. Adunarea vectorilor liberi poate fi definită folosind şi această regulă numită *regula paralelogramului* şi cele două definiții sunt echivalente.

Propoziția 2.2.1 *(V_3, +) este grup comutativ.*

Demonstrație. Din modul de definiție al operației de adunare a vectorilor liberi rezultă că operația "+" este bine definită. Asociativitatea: Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in V_3$ şi $\vec{OA} \in \bar{a}$, $\vec{AB} \in \bar{b}$, $\vec{BC} \in \bar{c}$ este uşor de văzut, conform definiției de mai sus, că vectorii liberi $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ şi $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ au un acelaşi reprezentant $\overrightarrow{OC}$ (fig 4 a) şi b)).

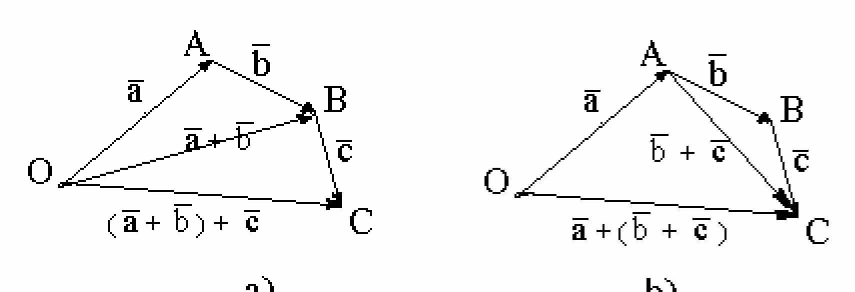

Fig. 4

Comutativitatea: rezultă dacă folosim regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor. Elementul neutru al grupului este vectorul nul $\bar{0}$ iar simetricul unui vector liber oarecare $\overline{AB} \in V_3$ este vectorul liber $\overline{BA}$.

Folosind proprietatea de asociativitate demonstrată mai sus, putem extinde uşor regula triunghiului la cazul a *n* vectori liberi.

Definiția 2.2.2 *Dacă* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *sunt n vectori liberi şi* $\overrightarrow{OA_1} \in \bar{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2} \in \bar{a}_2$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} \in \bar{a}_n$,*atunci suma vectorilor* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *este vectorul liber* $\bar{c}$ *al cărui reprezentant este* $\overrightarrow{OA_n}$, *(fig. 5). Notăm* $\bar{c} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$.

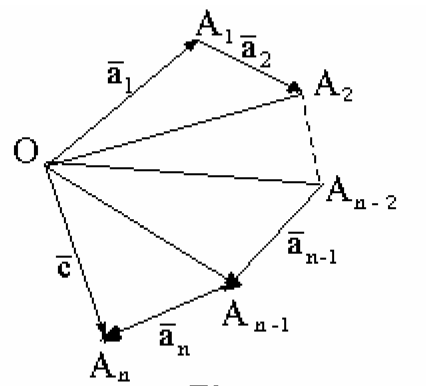

Fig. 5

Regula exprimată de definiția de mai sus este cunoscută sub denumirea de *regula poligonului strâmb* şi rezultă prin aplicarea inductivă a regulii triunghiului, adică $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = \bar{a}_1 + (\bar{a}_2 + (\ldots.(\bar{a}_{n-1} + \bar{a}_n)))$, deoarece operația de adunare a vectorilor este asociativă.

II. Înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale

Următoarea operație pe care o vom introduce este înmulțirea unui vector liber cu un număr real.

Definiția 2.2.3 *Dacă $\bar{a} \in V_3$ şi $\alpha \in R$ atunci prin $\alpha\bar{a}$ înțelegem vectorul liber definit astfel:*

a) Dacă $\alpha = 0$ sau $\bar{a} = \bar{0}$ atunci $\alpha\bar{a}$ este vectorul nul $\bar{0}$.

b) Dacă nu avem situația de la punctul a) şi $\alpha > 0$ atunci vectorul $\alpha\bar{a}$ este un vector care are aceeaşi direcție şi acelaşi sens cu vectorul $\bar{a}$ iar lungimea este $\alpha\|\bar{a}\|$.

c) Dacă $\alpha < 0$ şi $\bar{a} \neq \bar{0}$ atunci $\alpha\bar{a}$ este un vector care are aceeaşi direcție cu vectorul $\bar{a}$, sensul opus acestuia din urmă iar lungimea este $-\alpha\|\bar{a}\|$.

Exercițiu: Înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale satisface axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 a spațiului vectorial.

Exercițiul de mai sus şi Propoziția 2.2.1 ne asigură că V_3 este într-adevăr un spațiu vectorial real.

2.3 Dependență liniară în V_3

Teorema 2.3.1 *a) Vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ sunt liniar dependenți dacă şi numai dacă sunt coliniari.*

b) Vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ $\in V_3$ sunt liniar dependenți dacă şi numai dacă sunt coplanari.

Demonstrație. a) " $\Rightarrow$ " Dacă cel puțin unul din vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este nul atunci funcționează convenția că vectorul nul are aceeaşi direcție cu orice vector şi rezultă concluzia. Dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\bar{b} \neq \bar{0}$, presupunem că există scalarii α, $\beta \in R$ astfel încât $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \bar{0}$ şi $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Facem alegerea $\alpha \neq 0$ şi avem $\bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$, ceea ce înseamnă că $\bar{a}$ şi $\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$ au aceeaşi direcție, aceeaşi lungime şi sensuri opuse. Din Definiția 2.2.3 deducem că $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ au aceeaşi direcție şi rezultă că sunt coliniari. " $\Leftarrow$ " Dacă unul din vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ este nul atunci afirmația este evidentă. Altfel, dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$ sunt coliniari atunci versorii acestora $\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ şi respectiv $\frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|}$ sunt într-o relație de forma $\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \pm\frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|}$. De aici rezultă concluzia (exercițiu).

b) Ca şi în cazul a) situația în care cel puțin unul dintre vectori este nul este trivială pentru ambele implicații, deci presupunem mai departe că toți vectorii sunt nenuli. " $\Rightarrow$ " Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt liniar dependenți atunci există scalarii α, β, $\gamma \in$ R, astfel încât $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$, cel puțin unul dintre scalari fiind nenul. Presupunem $\alpha \neq 0$ şi avem $\bar{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\bar{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\bar{c}$, ceea ce, conform punctului a), este echivalent cu faptul că $\bar{a}$ este coliniar cu vectorul sumă a vectorilor $-\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$ şi $-\frac{\gamma}{\alpha}\bar{c}$, deci coplanar cu aceştia. Dar vectorii $-\frac{\beta}{\alpha}\bar{b}$ şi respectiv $-\frac{\gamma}{\alpha}\bar{c}$ sunt coliniari, tot conform punctului a) cu vectorii $\bar{b}$ şi respectiv $\bar{c}$. Deci $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari.

" $\Leftarrow$ " Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari atunci este uşor de văzut (fig. 6) că $\bar{a}$ poate fi descompus ca sumă de doi vectori coliniari cu $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a} = \bar{b}_1 + \bar{c}_1$, unde $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$ au reprezentații $\overline{OB_1}$ şi respectiv $\overline{OC_1}$ ($AB_1 \,||\, OC$, $AC_1 \,||\, OB$, $B_1 \in OB$, $C_1 \in OC$).

Tot conform punctului a) rezultă că există scalarii β_1 şi $\gamma_1 \in R$ astfel încât $\bar{b}_1 = \beta_1 \bar{b}$ şi respectiv $\bar{c}_1 = \gamma_1 \bar{c}$. De aici rezultă concluzia.

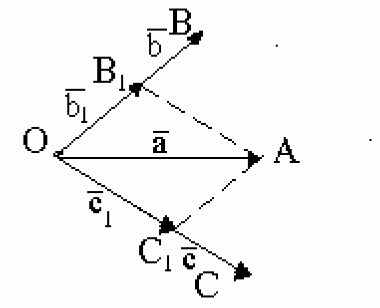

Fig. 6

Din teorema de mai sus rezultă că *oricare trei vectori necoplanari din V_3 sunt liniar independenți.*

Teorema 2.3.2 *Dimensiunea spațiului vectorial V_3 este egală cu 3.*

Demonstrație. Conform observației de mai sus este suficient să demonstrăm că trei vectori necoplanari din V_3, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt sistem de generatori pentru V_3. Fie $\bar{d} \in V_3$ un vector oarecare şi $\vec{OA} \in \bar{a}$, $\vec{OB} \in \bar{b}$, $\vec{OC} \in \bar{c}$, $\vec{OD} \in \bar{d}$ reprezentanții celor patru vectori fig. 7. Dacă D_1, D_2, D_3 sunt proiecțiile lui D pe dreptele suport ale segmentelor orientate $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ şi $\vec{OC}$, atunci aplicăm regula paralelogramului şi teorema de mai sus şi deducem că

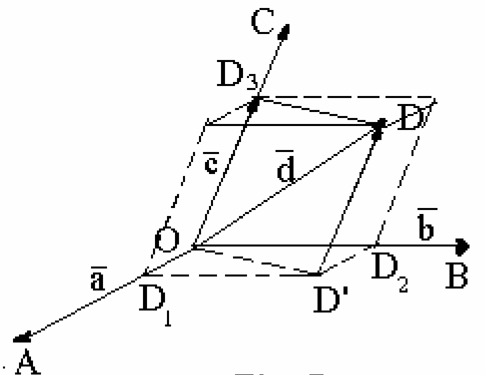

Fig. 7

$\vec{OD} = \vec{OD_3} + \vec{OD'} = \vec{OD_3} + \vec{OD_1} + \vec{OD_2} = \gamma\,\vec{OC} + \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Deci

(2.3.1) $$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$$

şi demonstraţia este încheiată.

Sistemul de scalari (α, β, γ) din formula (2.3.1) reprezintă coordonatele vectorului $\overline{d}$ în baza { $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ } a spaţiului V_3.

Observaţia 2.3.1 a) Dacă $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ sunt trei versori din V_3 care au proprietatea că dreptele suport ale reprezentanţilor sunt perpendiculare două câte două, atunci aceştia sunt necoplanari (fig. 8). Deci formează o bază în V_3, pe care o numim *bază canonică*. Coordonatele unui vector liber într-o bază canonică se numesc *coordonate euclidiene*.

b) Dacă $D \in E_3$ este un punct oarecare din spaţiu atunci vectorul $\overline{r} \in V_3$ care are reprezentantul $\overrightarrow{OD}$ se numeşte vectorul de poziţie al punctului D. Coordonatele euclidiene α, β, γ ale vectorului $\overline{r}$, şi respectiv coordonatele carteziene (în reperul OABC) ale punctului D sunt determinate de proiecţiile punctului D pe dreptele suport ale reprezentanţilor celor 3 versori (fig. 8).

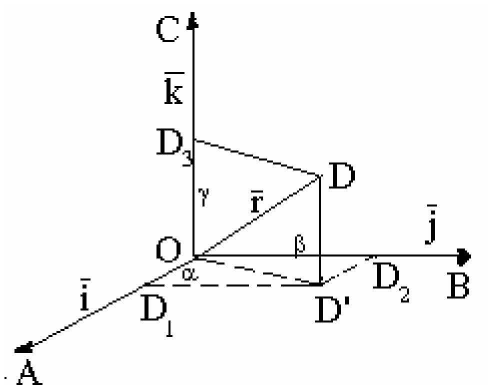

Fig. 8

Dacă $d \subset E_3$ este o dreaptă iar $\overrightarrow{AB}$ este un segment orientat, A, B $\in$ E_3 atunci intersecţia dreptei d cu planele $P_1 \ni A$ şi $P_2 \ni B$ ce sunt perpendiculare pe *d* este formată din două puncte A_1 şi respectiv B_1.

Segmentul orientat $\overrightarrow{A_1B_1}$ se numeşte *proiecţia ortogonală* a segmentului $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta *d*.

Exercițiu: Proiecțiile pe aceeaşi dreaptă a două segmente orientate echipolente sunt echipolente.

Atunci se poate introduce noțiunea de *proiecție ortogonală a unui vector liber* $\bar{r}$ *pe o dreaptă d*, ca fiind vectorul liber ce are drept reprezentant proiecția ortogonală pe dreapta *d* a oricărui reprezentant al lui $\bar{r}$.

Definiția 2.3.1 *Fie* $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ *şi* $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \bar{b}$ *reprezentanții acestora. Numărul real* $\varphi \in [0, \pi]$ *ce reprezintă unghiul format de dreptele OA şi OB se numeşte unghiul dintre vectorii* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *(fig. 9). Dacă* $\varphi = \pi/2$ *atunci vectorii* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *se numesc ortogonali.*

Prin convenție, vectorul nul este ortogonal pe orice vector.

Dacă $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ iar φ este unghiul dintre ei atunci numărul real $\cos\varphi \, \|\bar{a}\|$ se numeşte *mărimea algebrică a proiecției ortogonale* a vectorului $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ şi se notează $pr_{\bar{b}}\bar{a}$ conform [1].

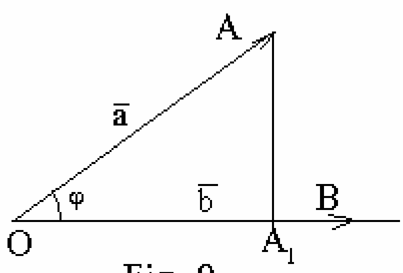

Fig. 9

Exercițiu: [1] Mărimea algebrică a proiecției ortogonale are următoarele proprietăți

a) $pr_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = pr_{\bar{b}}\bar{a} + pr_{\bar{b}}\bar{c}$, oricare ar fi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in V_3$, nenuli.

b) $pr_{\bar{b}}\alpha(\bar{a}) = \alpha \; pr_{\bar{b}}\bar{a}$ oricare ar fi $\alpha \in R$.

2.4 Produsul scalar

Definiția 2.4.1 *Dacă* $\bar{a}$, $\bar{b} \in V_3$ *şi* φ *este unghiul dintre vectorii* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$, *dacă aceştia sunt nenuli, atunci produsul scalar al vectorilor* $\bar{a}$, $\bar{b}$, *notat* $<\bar{a}, \bar{b}>$ *este egal cu*

a) 0 dacă $\bar{a} = \bar{0}$ *sau* $\bar{b} = \bar{0}$,

b) $\|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \varphi$, *dacă* $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$.

Exercițiu: Se observă că vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $<\bar{a}, \bar{b}> = 0$.

Teorema 2.4.1 *Produsul scalar al vectorilor liberi are următoarele proprietăți:*

1) $<\bar{a}, \bar{a}> \geq 0$, $\bar{a} \in V_3$ *şi* $<\bar{a}, \bar{a}> = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$;

2) $<\bar{a}, \bar{b}> = <\bar{b}, \bar{a}>$, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$;

3) $\alpha <\bar{a}, \bar{b}> = <\alpha \bar{a}, \bar{b}>$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ *(omogeneitate)*

4) $<\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}> = <\bar{a}, \bar{c}> + <\bar{b}, \bar{c}>$, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$, *(distributivitate a produsului scalar față de adunarea vectorilor)*

5) Fie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ *o bază canonică în* V_3 *şi* $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ *doi vectori din* V_3. *Atunci*

$$<\bar{a}, \bar{b}> = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2.4.1}$$

În plus, dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ *iar* φ *este unghiul dintre* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *atunci*

$$\cos \varphi = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{2.4.2}$$

Demonstrație. 1) şi 2) sunt evidente dacă ținem cont de faptul că unghiul φ dintre $\bar{a}$ şi $\bar{a}$ este 0 iar unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ coincide cu unghiul dintre $\bar{b}$ şi $\bar{a}$. 3) Dacă $\alpha = 0$ demonstrația este evidentă. Dacă $\alpha \neq 0$ atunci vectorii $\bar{a}$ şi $\alpha\,\bar{a}$ sunt coliniari şi au acelaşi sens dacă $\alpha > 0$ şi sensuri opuse în caz contrar. Unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este egal cu cel dintre $\alpha\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă $\alpha > 0$ sau este suplementar celui dintre $\alpha\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă $\alpha < 0$.

Având în vedere relațiile dintre unghiuri şi faptul că $\|\alpha\bar{a}\| = |\alpha|\|\bar{a}\|$ se deduce concluzia.

4) Folosind proprietățile mărimii algebrice a proiecției ortogonale şi observând că $<\bar{a}, \bar{c}> = pr_{\bar{c}}\bar{a}\ \|\bar{c}\|$ avem succesiv

$<\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}> = pr_{\bar{c}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\ \|\bar{c}\| = (pr_{\bar{c}}\bar{a} + pr_{\bar{c}}\bar{b})\|\bar{c}\| = <\bar{a}, \bar{c}> + <\bar{b}, \bar{c}>$.

5) Deoarece $<\bar{i}, \bar{i}> = <\bar{j}, \bar{j}> = <\bar{k}, \bar{k}> = 1$ iar $<\bar{i}, \bar{j}> = <\bar{j}, \bar{k}> = <\bar{i}, \bar{k}> = 0$, aplicăm proprietățile de 2) şi 3) ale produsului scalar şi obținem (2.4.1). 6) Din definiția produsului scalar şi conform relației (2.4.1) avem că $\|\bar{a}\|^2 = <\bar{a}, \bar{a}> = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Aplicăm din nou (2.4.1) şi obținem (2.4.2).

2.5 Produsul vectorial

Definiția 2.5.1 *Dacă* $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ *şi* φ *este unghiul dintre vectori, dacă aceştia sunt nenuli, atunci produsul vectorial al vectorilor* $\bar{a}, \bar{b}$, *notat* $\bar{a} \times \bar{b}$ *este egal cu*

a) 0 dacă $\bar{a} = \bar{0}$ *sau* $\bar{b} = \bar{0}$ *sau dacă* $\bar{a}, \bar{b}$ *sunt coliniari;*

b) $\|\bar{a}\|\ \|\bar{b}\| \sin\varphi\ \bar{e}$, *dacă* $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ *sunt necoliniari, unde* $\bar{e}$ *este un versor perpendicular pe* $\bar{a}$ *şi* $\bar{b}$ *al cărui sens* *este determinat cu ajutorul regulii burghiului (adică rotind pe $\bar{a}$ peste $\bar{b}$, în sens direct, versorul $\bar{e}$ are sensul de înaintare a burghiului)(fig. 10).*

Observația 2.5.1 Norma produsului vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ are următoarea interpretare geometrică: este aria paralelogramului ale cărui două laturi adiacente sunt reprezentanți cu aceeași origine ai vectorilor liberi $\bar{a}$ și respectiv $\bar{b}$.

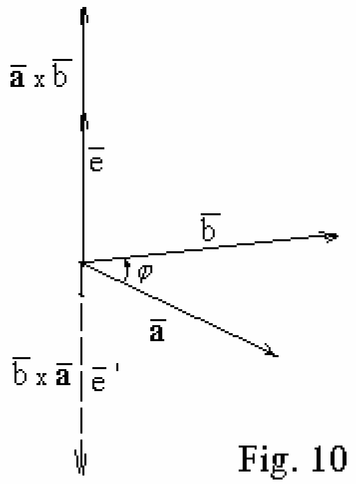

Fig. 10

Teorema 2.5.1 *Produsul vectorial are următoarele proprietăți:*

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ *(anticomutativitate);*

2) $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \alpha\bar{b}$, $\alpha \in R$, $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$;

3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ *(distributivitate);*

4) $\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = (\|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\|)^2 - <\bar{a}, \bar{b}>^2$ *(identitatea lui Lagrange);*

5) *Dacă* $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, *unde* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ *este o bază canonică în* V_3 *atunci*

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. 1) Rezultă din definiția produsului vectorial, datorită faptului că măsura unghiului $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ [*)] este egală cu cea a unghiului $\sphericalangle(\bar{b}, \bar{a})$ iar versorii $\bar{e}$ respectiv $\bar{e}'$ (corespunzători celor două produse vectoriale), obținuți conform regulii burghiului (fig.10), au sensuri opuse.

2) Dacă $\alpha > 0$, atunci $\sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \sphericalangle(\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$.

Atunci $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \|\alpha\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b}$. Analog se arată că $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times \alpha\bar{b}$. Cazul $\alpha = 0$ duce la obținerea vectorilor nuli în fiecare membru al egalității și rezultă concluzia. În cazul $\alpha < 0$ avem $\sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \sphericalangle(\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \pi - \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ și deducem că $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = -\alpha \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin(\pi - \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})) = \|\alpha\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b}$ etc.

3) În cazul în care vectorii $\bar{b}$ și $\bar{c}$ sunt coliniari afirmația este ușor de demonstrat (exercițiu). Pentru a arăta că proprietatea 3) este adevărată în cazul general, vom demonstra mai întâi că dacă $\bar{b}'$ este proiecția ortogonală a vectorului $\bar{b}$ pe o dreaptă D perpendiculară pe $\bar{a}$, inclusă într-un plan paralel cu vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, atunci $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}'$. Versorii vectorilor $\bar{a} \times \bar{b}$ și $\bar{a} \times \bar{b}'$ fiind perpendiculari pe același plan sunt coliniari și, deoarece $\|\bar{a} \times \bar{b}'\| = \|\bar{a}\| \|\bar{b}'\| \sin \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}') = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \sphericalangle(\bar{b}, \bar{b}') \sin \pi/2 = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos(\pi/2 - \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})) = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \|\bar{a} \times \bar{b}\|$, rezultă

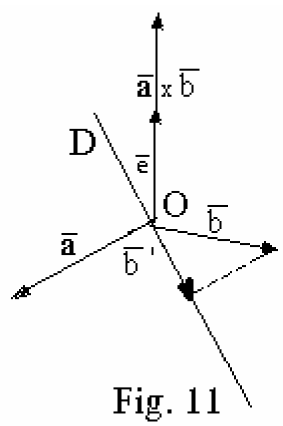

Fig. 11

[*] Folosim notația $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b})$ pentru unghiul dintre vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

concluzia. Fie acum $\overline{c}\,'$ proiecția ortogonală a vectorului $\overline{c}$ pe dreapta D_1 ∋ O, perpendiculară pe $\overline{a}$, inclusă într-un plan paralel cu vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{c}$. Din cele arătate mai sus rezultă că $\overline{a}\,x\,\overline{c} = \overline{a}\,x\,\overline{c}\,'$. Este clar că dreapta suport a lui $\overline{a}$, D şi D_1 sunt ortogonale două câte două. Deoarece vectorii $\overline{b}\,'$ şi $\overline{c}\,'$ sunt de fapt "proiecțiile ortogonale" *) ale vectorilor liberi $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ pe planul determinat de D şi D_1 este uşor de văzut că $\overline{b}\,' + \overline{c}\,'$ este egal cu proiecția ortogonală pe acest plan, notată $\overline{d}'$, a vectorului $\overline{b} + \overline{c}$. Este uşor de văzut că $\overline{d}' = \overline{b}\,' + \overline{c}\,'$. Astfel, $\overline{a}\,x\,\overline{b} + \overline{a}\,x\,\overline{c} = \overline{a}\,x\,\overline{b}\,' + \overline{a}\,x\,\overline{c}\,' = \overline{a}\,x(\overline{b}\,' + \overline{c}\,') = \overline{a}\,x\,\overline{d}' = \overline{a}\,x(\overline{b} + \overline{c})$ şi rezultă concluzia.

Punctul 4) al teoremei îl lăsăm ca exercițiu, căci se obține aplicând definițiile produsului scalar şi respectiv vectorial. Pentru a demonstra 5) observăm că $\overline{i}\,x\,\overline{i} = \overline{j}\,x\,\overline{j} = \overline{k}\,x\,\overline{k} = 0$ şi $\overline{i}\,x\,\overline{j} = \overline{k},\ \overline{j}\,x\,\overline{k} = \overline{i},\ \overline{k}\,x\,\overline{i} = \overline{j}$. Se efectuează calculele şi se obține concluzia.

2.6 Produsul mixt al vectorilor. Dublul produs vectorial

Definiția 2.6.1 *Fie* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$. *Produsul scalar al vectorilor* $\overline{a}$ şi $\overline{b}\,x\,\overline{c}$ *se numeşte produs mixt al vectorilor* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. *Folosim notația* $<\overline{a},\ \overline{b}\,x\,\overline{c}>$.

Dacă vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt are următoarea interpretare geometrică: este volumul paralelipipedului construit pe suporturile reprezentanților vectorilor

* Proiecția ortogonală a unui vector liber $\overline{a}$ pe un plan este acel vector liber ce are drept reprezentant proiecția ortogonală pe planul respectiv a unui reprezentant al vectorului $\overline{a}$.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ care au originea comună (Fig. 12). Într-adevăr, se cunoaşte deja că modulul vectorului $\bar{b} \times \bar{c}$ reprezintă aria *A* a paralelogramului ce reprezintă baza paralelipipedului din fig. 12. Deoarece $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$ este egal cu unghiul φ dintre înălţimea h a paralelipipedului din figură şi vectorul $\bar{a}$, deducem că $\left| \|\bar{a}\| \cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) \right| = h$.

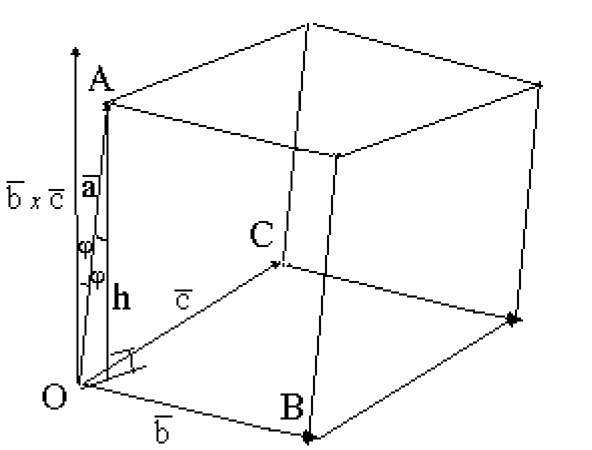

Fig. 12

Atunci $\left|\langle \bar{a}, \bar{b} \times \bar{c} \rangle\right| = \left| \|\bar{a}\| \|\bar{b} \times \bar{c}\| \cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) \right| = A\ h$ şi rezultă concluzia.

Teorema 2.6.1 *Produsul mixt are următoarele proprietăţi:*

1) Dacă $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, $\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$ *unde* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ *este o bază canonică în* V_3 *atunci*

$$(2.6.1) \quad <\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}> = 0 \Leftrightarrow$ *unul din vectori este nul sau doi dintre vectori sunt coliniari sau vectorii sunt coplanari.*

3) $<\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = <\bar{b}, \bar{a} x \bar{c}> = <\bar{c}, \bar{b} x \bar{a}>$, $<\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = -<\bar{a}, \bar{c} x \bar{b}>$.

4) $<\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b} x \bar{c}> = <\bar{a}_1, \bar{b} x \bar{c}> + <\bar{a}_2, \bar{b} x \bar{c}>$.

Demonstrație. Afirmația 1) este o consecință a proprietăților 5 a produsului scalar şi respectiv vectorial.

2) " $\Leftarrow$ " Dacă unul din vectori este nul afirmația rezultă imediat. Dacă doi vectori sunt coliniari, de exemplu $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ atunci există $\alpha \in R$ astfel încât $\bar{a} = \alpha \bar{b}$. Deci $a_i = \alpha b_i$, i = 1, 2, 3 şi folosind proprietățile determinanților şi punctul a) rezultă $<\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = 0$. Analog se tratează cazul în care alți doi vectori sunt coliniari.

Dacă cei trei vectori sunt coplanari atunci vectorul $\bar{b} x \bar{c}$ este perpendicular pe planul celor trei vectori, deci pe $\bar{a}$. Conform definiției produsului scalar, deducem că $<\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = 0$.

" $\Rightarrow$ ". Dacă $<\bar{a}, \bar{b} x \bar{c}> = 0$ atunci, din proprietatea 2) de mai sus deducem că determinantul din relația (2.6.1) este nul. Atunci vectorii din R^3 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) sunt liniar dependenți. Deoarece componentele acestor vectori sunt de fapt coordonatele vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ în baza $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, atunci putem spune că $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt liniar dependenți. Aplicând Teorema 2.3.1 b) obținem concluzia. 3) Se foloseşte proprietatea 1) a produsului mixt şi proprietățile determinanților. Afirmația de la punctul 4) rezultă din proprietatea de aditivitate a produsului scalar.

Definiția 2.6.2 *Numim produs dublul vectorial al vectorilor* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$ *vectorul* $\bar{d} = \bar{a} x (\bar{b} x \bar{c})$.

Teorema 2.6.2 *Vectorul* $\bar{d}$ *definit mai sus are următoarele proprietăți*

a) este coplanar cu vectorii $\bar{b}$ *şi* $\bar{c}$.

b) $\bar{d} = <\bar{a}\,x\,\bar{c}>\bar{b} - <\bar{a},\bar{b}>\bar{c}$.

Demonstrație. a) Vectorul $\bar{d}$, fiind produsul vectorial al vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}\,x\,\bar{c}$ va fi perpendicular pe aceştia, deci $\bar{d}\perp\bar{b}\,x\,\bar{c}$. Deoarece vectorul $\bar{b}\,x\,\bar{c}$ este perpendicular pe $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, deducem că $\bar{d}$ este coplanar cu $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Dacă $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}, \bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, $\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$ unde $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ este o bază canonică în V_3, atunci, conform Teoremei 2.5.1 avem $\bar{b}\,x\,\bar{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\bar{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\bar{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\bar{k}$ şi

$\bar{d} = [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)]\bar{i} + [a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)]$

$\bar{j} + [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)]\bar{k}$. Rearanjând termenii avem

$$\bar{d} = (a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1\bar{i} + (a_3c_3 + a_1c_1)b_2\bar{j} + (a_2c_2 + a_1c_1)b_3\bar{k} +$$

$$- (a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1\bar{i} - (a_3b_3 + a_1b_1)]\,c_2\bar{j} - (a_1b_1 + a_2b_2)]\,c_3\bar{k}.$$

De aici rezultă că $\bar{d} = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}) = <\bar{a},\bar{c}>\bar{b} - <\bar{a},\bar{b}>\bar{c}$.

Exercițiul 2.6.1 *Să se arate că dacă* $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\in V_3$ *atunci*

$$<\bar{a}\,x\,\bar{b},\bar{c}\,x\,\bar{d}> = \begin{vmatrix} \langle\bar{a},\bar{c}\rangle & \langle\bar{a},\bar{d}\rangle \\ \langle\bar{b},\bar{c}\rangle & \langle\bar{b},\bar{d}\rangle \end{vmatrix}.$$

Conform Teoremei 2.6.2, avem $<\bar{a}\,x\,\bar{b},\ \bar{c}\,x\,\bar{d}> = <\bar{d},\ (\bar{a}\,x\,\bar{b})x\bar{c}>> = <\bar{d},\ -\bar{a}<\bar{b},\ \bar{c}> + \bar{b}<\bar{a},\bar{c}>> = -<\bar{d},\ \bar{a}><\bar{b},\ \bar{c}> + <\bar{a},\bar{c}><\bar{d},\ \bar{b}> = <\bar{a},\bar{c}><\bar{b},\ \bar{d}> - <\bar{a},\ \bar{d}><\bar{b},\ \bar{c}>$. *Rezultă concluzia.*

2.7 Exerciții

1. Să se discute şi să se rezolve sistemul $\begin{cases} \lambda\overline{x} + \mu\overline{y} = \overline{a} \\ \mu\overline{x} + \lambda\overline{y} = \overline{b} \end{cases}$, $\overline{a}$, $\overline{b} \in V_3$, λ, μ $\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

R: Înmulțind prima ecuație cu $-\mu$ şi pe a doua cu λ şi adunându-le obținem ecuația $0\overline{x} + (\lambda^2 - \mu^2)\overline{y} = -\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}$, sistemul fiind echivalent cu

$$\begin{cases} \lambda\overline{x} + \mu\overline{y} = \overline{a} \\ (\lambda^2 - \mu^2)\overline{y} = -\mu\overline{a} + \lambda\overline{b} \end{cases}, \ \overline{a},\ \overline{b} \in V_3,\ \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

a) Dacă $(\lambda^2 - \mu^2) \neq 0$, adică $\lambda \neq \pm\mu$ atunci sistemul are soluția unică

$$\overline{x} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}\overline{a} - \frac{\mu}{\lambda^2 - \mu^2}\overline{b},\ \overline{y} = -\frac{\mu}{\lambda^2 - \mu^2}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}\overline{b}.$$

b) Dacă $\lambda^2 - \mu^2 = 0$ atunci, fie $-\mu\overline{a} + \lambda\overline{b} \neq \overline{0}$, caz în care sistemul este incompatibil, fie $-\mu\overline{a} + \lambda\overline{b} = \overline{0}$, caz în care orice pereche de vectori $\overline{x} = \frac{1}{\lambda}(\overline{a} - \mu\overline{y})$, $\overline{y} \in V_3$ este soluție a sistemului.

2. Să se arate că pentru ca trei vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ să închidă un triunghi este necesar şi suficient ca $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

R: Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ închid un triunghi, adică au reprezentanții $\overrightarrow{BC} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{CA} \in \overline{b}$, $\overrightarrow{AB} \in \overline{c}$ (fig. 13), atunci se aplică Definiția 2.2.1 şi rezultă concluzia. Reciproc, dacă $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ atunci $\overline{c} = -(\overline{a} + \overline{b})$. Dacă $\overrightarrow{BC} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{CA} \in \overline{b}$ atunci $\overrightarrow{BA} \in \overline{a} + \overline{b}$, deci $\overrightarrow{AB} \in \overline{c}$ şi demonstrația este completă.

3. Fie $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ trei vectori care închid un triunghi. Să se exprime cu ajutorul lor vectorii care au ca reprezentanţi medianele triunghiului şi să se arate că aceştia pot închide la rândul lor un triunghi.

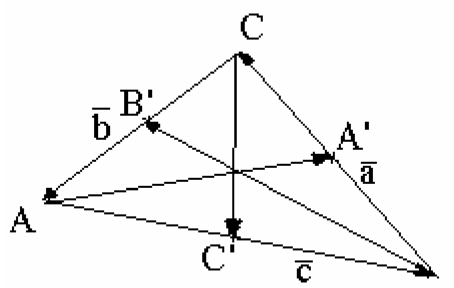

Fig. 13

R: Fie ABC triunghiul închis de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ şi fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB fig. 13. Atunci $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + 1/2\ \overrightarrow{BC} \in \overline{c} + 1/2\,\overline{a}$ şi analog se arată că $\overrightarrow{BB'} \in \overline{a} + 1/2\,\overline{b}$, respectiv $\overrightarrow{CC'} \in \overline{b} + 1/2\,\overline{c}$. Folosind rezultatul de la exerciţiul precedent, avem $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$ şi, tot conform acestuia, rezultă că segmentele orientate $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ pot închide un triunghi.

4. Fie $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ vectorii ce coincid cu două coarde perpendiculare într-un cerc de centru O şi fie M punctul lor de intersecţie. Să se arate că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

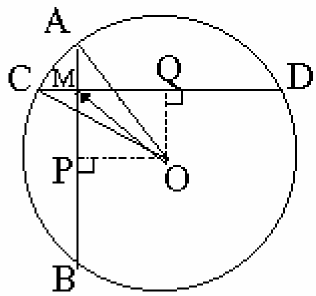

Fig. 14

5. R: Notăm cu P şi respectiv Q mijloacele coardelor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ (fig. 14). Atunci OQMP este dreptunghi şi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$. Ţinând cont de faptul că $\overrightarrow{OQ} = 1/2\ (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ şi $\overrightarrow{OP} = 1/2\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ obţinem $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Pe de altă parte avem $\vec{MA} = \vec{MO} + \vec{OA}$ şi relaţiile analoge pentru $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ şi $\vec{MD}$. Deci $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD} = 4\vec{MO}+2\vec{OM} = 2\vec{MO}$.

6. Fie ABCD un patrulater convex. Se notează cu O_1, O_2 mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Să se arate că ABCD este paralelogram dacă şi numai dacă există $k \in \mathbf{R} - \{1/2\}$ astfel încât $\vec{O_1O_2} = k(\vec{AD} - \vec{BC})$.

R: Avem $\vec{O_1O_2} = 1/2\,(\vec{O_1B} + \vec{O_1D}) = 1/2\,(\vec{O_1C} + \vec{CB} + \vec{O_1A} + \vec{AD}) = 1/2\,(\vec{AD} - \vec{BC})$. Deci există $k \in \mathbf{R} - \{1/2\}$ astfel încât $\vec{O_1O_2} = k(\vec{AD} - \vec{BC}) \Leftrightarrow \vec{O_1O_2} = \vec{0} \Leftrightarrow O_1 = O_2$.

7. Fie ABCD şi $A_1B_1C_1D_1$ două paralelograme oarecare în spaţiu. Se consideră punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care împart segmentele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 în acelaşi raport. Să se arate că $A_2B_2C_2D_2$ este un paralelogram (fig. 15).

R: Fie O un punct al spaţiului. O condiţie necesară şi suficientă ca ABCD şi $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralelograme este ca diagonalele lor să aibă acelaşi mijloc, adică între vectorii de poziţie ai vârfurilor să existe relaţiile:

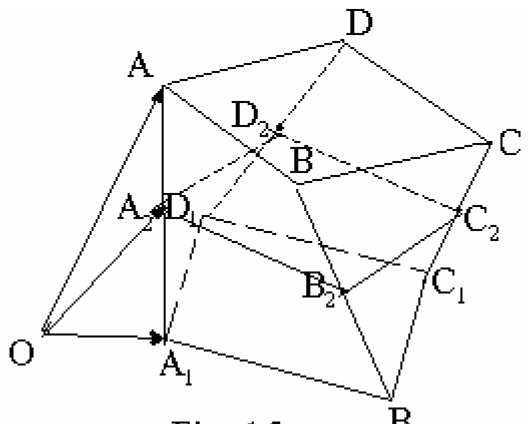

Fig. 15

(2.7.1) $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$

(2.7.2) $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OC}_1 = \overrightarrow{OB}_1 + \overrightarrow{OD}_1$. Deoarece A_2 are proprietatea $\overrightarrow{AA_2} = k\,\overrightarrow{A_2A_1}$, rezultă $\overrightarrow{OA}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_2)$. Deci $\overrightarrow{OA}_2 = \frac{1}{k+1}(\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OA}_1)$. Analog se obțin relațiile pentru $\overrightarrow{OB}_2$, $\overrightarrow{OC}_2$, $\overrightarrow{OD}_2$ (adică relația de mai sus în care înlocuim pe A cu B, C şi D). Folosind aceste relații şi ținând cont de (2.7.1) şi (2.7.2) rezultă $\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OB}_2 = \overrightarrow{OC}_2 + \overrightarrow{OD}_2$, lucru echivalent cu faptul că $A_2B_2C_2D_2$ este un paralelogram.

8. Fie triunghiul ABC şi A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor BC, CA, AB.
   a) Să se arate că pentru orice punct M al spațiului avem

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{AA}_1 = 3\overrightarrow{OB} + 2\,\overrightarrow{BB}_1 =$$

$$3\overrightarrow{OC} + 2\,\overrightarrow{CC}_1.$$

   b) Să se arate că există un punct G şi numai unul (centrul de greutate al triunghiului) cu proprietatea $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
   c) Să se arate că orice punct O al spațiului satisface relația

(2.7.3) $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

R: a) Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AA}_1 + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = 3\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{AA}_1$, căci $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0}$. Analog se arată celelalte relații. b) Conform punctului a), $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{AA}_1 = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = 2/3\,\overrightarrow{A_1A}$ adică G se află pe AA_1 la 2/3 de vârful A $\Leftrightarrow$ G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

d) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{OG}$.

Observația 2.7.1 Fixând un punct O al spațiului, putem defini centrul de greutate G al unui triunghi ca fiind un punct care are proprietatea (2.7.3) . Din exercițiul de mai sus rezultă că G este corect definit.

În general pentru un poligon $A_1A_2\ldots A_n$ definim centrul de greutate ca fiind acel punct care satisface relația

$$\vec{OG} = \frac{1}{n}(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \ldots + \vec{OA}_n).$$

Dacă vom considera O' alt punct al spațiului atunci $n\vec{O'G} = n\vec{O'O} + n\vec{OG} = (\vec{O'O} + \vec{OA}_1 + \vec{O'O} + \vec{OA}_2 + \ldots + \vec{O'O} + \vec{OA}_n)$, de unde deducem că $\vec{O'G} = \frac{1}{n}(\vec{O'A}_1 + \vec{O'A}_2 + \ldots + \vec{O'A}_n)$. Deci punctul G astfel definit nu depinde de alegerea punctului O din spațiu.

9. Fie două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ (fig. 16) cu centrele de greutate G şi G_1. Să se arate că $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = 3\vec{GG}_1$ şi, cu ajutorul acestei relații, să se formuleze o condiție necesară şi suficientă ca două triunghiuri să aibă acelaşi centru de greutate.

R: Se observă că $\vec{AA}_1 = \vec{AG} + \vec{GG_1} + \vec{G_1A_1}$.

Scriind şi relațiile analoge pentru $\vec{BB}_1$ şi $\vec{CC}_1$ şi adunându-le, obținem $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = 3\vec{GG}_1 - (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) +$

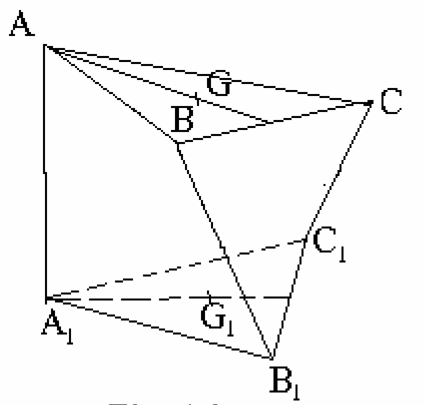

Fig. 16

$\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$. Pentru a obține ultima egalitate am aplicat punctul b) al exercițiului precedent. Deci, condiția necesară şi suficientă ca $G = G_1$ este $\overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$ sau, conform celor arătate mai sus,

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

10. Se numeşte cerc Euler al coardei A_1A_2 a cercului S de rază R, cercul de rază R/2, al cărui centru este mijlocul coardei. Cele trei cercuri Euler ale laturilor unui triunghi $A_1A_2A_3$ înscris în cercul S se intersectează într-un punct O care constituie centrul cercului de rază R/2, ce trece prin centrele celor trei cercuri Euler. Acest ultim cerc se numeşte cercul lui Euler al triunghiului $A_1A_2A_3$. Să se arate că următoarea definiție este coerentă:

    Presupunem că am definit cercul Euler de rază R pentru un poligon cu n laturi înscris în cercul S de rază R. Să considerăm acum poligonul cu n + 1 laturi $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ înscris în cercul S. În acest caz, cele n+1 cercuri Euler ale poligoanelor cu n laturi $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, …, $A_1A_2\ldots A_n$ se intersectează într-un singur punct care constituie centru cercului de rază R/2, ce trece prin centrele tuturor celor n + 1 cercuri Euler; acest cer se numeşte cercul Euler al poligonului cu n + 1 laturi $A_1A_2\ldots A_{n+1}$.

R: Fie O centrul cercului S. Demonstrăm prin inducție după n că pentru un poligon $A_1A_2\ldots A_n$, punctul O' care satisface relația $\overline{OO'} = \dfrac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots. + \overline{OA_n}}{2}$ este centrul cercului Euler al poligonului $A_1A_2\ldots A_n$. Pentru n = 2, afirmația este adevărată. Presupunem că afirmația este adevărată pentru orice poligon cu n laturi şi o vom demonstra pentru un poligon cu n + 1 laturi. Fie $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ un poligon cu n + 1 laturi, O' punctul cu proprietatea că $\overline{OO'} = \dfrac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_{n+1}}}{2}$ şi $O_1', \ldots, O_{n+1}'$ centrele cercurilor Euler ale poligoanelor $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, …, $A_1A_2\ldots A_n$. Avem

$$\overline{OO_1'} = \frac{\overline{OA_2} + \overline{OA_3} + \ldots + \overline{OA_{n+1}}}{2} = \overline{OO'} - \frac{\overline{OA_1}}{2},$$

$$\overline{OO_2'} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_3} + \ldots + \overline{OA_{n+1}}}{2} = \overline{OO'} - \frac{\overline{OA_2}}{2},$$

$$\ldots,$$

$$\overline{OO_{n+1}'} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_n}}{2} = \overline{OO'} - \frac{\overline{OA_{n+1}}}{2}.$$

Deoarece $\overline{O_i'O'} = \overline{OO'} - \overline{OO_i'} = \dfrac{\overline{OA_i}}{2}$, i = 1,…, n+1 rezultă că $\left\| \overline{O_i'O'} \right\| = \left\| \dfrac{\overline{OA_i}}{2} \right\| = \dfrac{R}{2}$ pentru toți i = 1,…, n+1. Deci O' aparține cercurilor de centre O_i' şi rază $\dfrac{R}{2}$, i = 1,…, n+1, adică cercurilor Euler ale poligoanelor $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, …, $A_1A_2\ldots A_n$. De asemenea, cercul cu centrul în O' şi rază $\dfrac{R}{2}$ trece prin centrele celor n + 1 cercuri Euler şi de aici rezultă şi unicitatea punctului O'.

11. Se consideră în spațiu punctele A(1, -1, 1), B(2, 1, -1), C(3, 1, 2), D(8/3, 1, 1), E(4,-1, 1) față de reperul cartezian ortogonal Oxyz .

Să se verifice dacă punctele A, B, C, D şi respectiv A, B, C, E sunt coplanare şi, în caz afirmativ, să se stabilească dacă acestea sunt vârfurile unor patrulatere convexe .

R: Considerăm baza canonică *) $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ în V_3 astfel încât coordonatele carteziene şi cele euclidiene ale unui punct din E_3 să coincidă. Avem $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ şi $\overline{AB} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$. Procedând asemănător obținem $\overline{BC} = \bar{i} + 0\bar{j} + 3\bar{k}$, $\overline{CD} = -1/3\bar{i} + 0\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{CE} = \bar{i} - 2\bar{j} - 1$. Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CD}$ (respectiv $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CE}$) sunt coplanari dacă şi numai dacă punctele A, B, C, D (respectiv A, B, C, E) sunt coplanare .

Deoarece $<\overline{AB},\ \overline{BC} \times \overline{CD}> = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1/3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, deducem, conform Teoremei 2.6.1, că vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{CD}$ sunt coplanari, deci punctele A, B, C, D sunt în acelaşi plan. Calculând produsul mixt al vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ obținem $<\overline{AB},\ \overline{BC} \times \overline{CE}> = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Aplicând Teorema 2.6.1, rezultă că A, B, C, E nu sunt coplanare.

Astfel, pentru a răspunde la cea de a doua întrebare, este suficient să stabilim dacă ABCD este patrulater convex. Fie M(x, y, z) punctul de intersecție al dreptelor AC şi BD. Avem $M \in AC \Leftrightarrow \overline{AC} \times \overline{AM} = 0$ în timp ce $M \in BD \Leftrightarrow \overline{BD} \times \overline{BM} = 0$. Ştiind că $\overline{AC} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ şi $\overline{BD} =$

---

* Vom spune că $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ este baza canonică din V_3 corespunzătoare reperului cartezian ortogonal Oxyz.

2/3 $\bar{i}$ + 2$\bar{k}$ iar $\overline{AM}$ =(x - 1)$\bar{i}$ + (y + 1)$\bar{j}$ + (z - 1)$\bar{k}$, $\overline{BM}$ =(x - 2)$\bar{i}$ + (y - 1)$\bar{j}$ + (z + 1)$\bar{k}$, atunci, aplicăm Teorema 2.5.1 şi deducem că

$$M\in AC \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ şi } M\in BD \Leftrightarrow \frac{x-2}{2/3} = \frac{z+1}{2},\ y = 1.$$

Soluţia sistemului format din cele două ecuaţii de mai sus reprezintă coordonatele punctului M. Rezolvând sistemul obţinem x = 3, y = 1 şi z = 2. Deci M are coordonatele (3, 1, 2) şi M coincide cu C. Rezultă că ABCD nu este un patrulater convex.

12.Să se calculeze ariile a şi a_1 ale triunghiurilor ABC şi ABE unde A, B, C, E sunt punctele din E_3 considerate în exerciţiul precedent.

R: Fie A aria paralelogramului care este determinat de reprezentanţi ai vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$ cu aceeaşi origine. Ţinând cont de interpretarea geometrică a produsului vectorial a doi vectori deducem că A = $\left\|\overline{AB}\times\overline{BC}\right\| = \left\|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right\| = \sqrt{65}$. Atunci aria triunghiului ABC este a = $\frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{65}}{2}$. Procedând în acelaşi fel se obţine aria $a_1 = \sqrt{18}$.

13. Fie A(0, -5, 0) şi B(1,-2, 3) puncte din E_3 faţă de reperul cartezian ortogonal Oxyz. Se cere:

a) Să se determine un vector $\bar{v}$ paralel cu planul determinat de $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ astfel încât $\|\bar{v}\| = \left\|\overline{AB}\right\|$ şi $\bar{v}\perp\overline{AB}$.

b) Să se determine un versor $\bar{u}$ perpendicular şi pe $\bar{v}$ şi pe $\overline{AB}$.

R. Fie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ baza canonică în V_3 definită ca în exercițiul 11. Avem $\overline{AB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$. Fie $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Condiția de egalitate a normelor se mai scrie $x^2 + y^2 = 19$ iar condiția de ortogonalitate este echivalentă cu $<\bar{v}, \overline{AB}> = 0$, adică $x + 3y = 0$. Din cele două condiții rezultă $\bar{v} = \pm(-3\sqrt{\frac{19}{10}}\,\bar{i} + \sqrt{\frac{19}{10}}\,\bar{j})$. b) $\bar{u} = \pm\frac{\bar{v}x\overline{AB}}{\left\|\bar{v}x\overline{AB}\right\|} = \pm(\frac{3}{\sqrt{136}}\,\bar{i} + \frac{9}{\sqrt{136}}\,\bar{j} - \frac{10}{\sqrt{136}}\,\bar{k})$.

14. Se consideră vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}$ și $\bar{b} = -2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$. Să se determine:

a) unghiul dintre cei doi vectori;

b) proiecția vectorului $\bar{a}$ pe direcția lui $\bar{b}$;

c) înălțimea paralelogramului construit pe suporturile vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, corespunzătoare bazei $\bar{b}$.

R: a) Deoarece $\cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\langle\bar{a}, \bar{b}\rangle}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$, obținem $\cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{-8}{\sqrt{77}}$.

c) $pr_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\langle\bar{a}, \bar{b}\rangle}{\|\bar{b}\|^2}\bar{b} = \frac{-8}{7}(-2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k})$. c) $h = \frac{\|\bar{a}x\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{14}}$.

15. Se dau punctele A(1, -2, 3), B(2, -1, 8) în reperul cartezian ortogonal Oxyz.

a) Să se determine mulțimea punctelor C din planul xOy care au proprietatea că triunghiul ABC este isoscel, $\|AB\| = \|AC\|$ și $<\overline{AB}, \overline{AC}> = -9$.

b) Să se calculeze aria triunghiului obținut la punctul precedent.

c) Se dă punctul D(2, -3, 4). Să se verifice dacă ABCD este un tetraedru şi în caz afirmativ să se calculeze aria acestui tetraedru.

R: Fie $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ baza canonică din V_3 corespunzătoare reperului cartezian Oxyz. a) Fie C(x, y, 0) $\in E_3$. Deoarece $\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$ şi $\overline{AC} = (x - 1)\bar{i} + (y + 2)\bar{j} - 3\bar{k}$ obținem, conform Observației 2.4.1, $\|AB\| = \sqrt{27}$, $\|AC\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + 9}$. Cele două condiții de mai sus devin $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$, $x + y = 5$. Sistemul format din ultimele două ecuații are soluția unică x = 4, y = 1. Deci punctul C căutat are coordonatele (4, 1, 0). b) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\| = 18\sqrt{2}$. d) Condiția necesară şi suficientă ca ABCD să fie un tetraedru este ca vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi $\overline{AD}$ să fie necoplanari. Deoarece $<\overline{AB}, \overline{AC} \times \overline{AD}> = -32 \neq 0$, deducem că vectorii de mai sus sunt necoplanari şi ABCD este un tetraedru. $V_{ABCD} = 32$.

16. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{u} = 3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$, $\bar{v} = \bar{b} + 2\bar{c}$, $\bar{w} = 3\bar{b} - \bar{c}$, unde vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $2\bar{c} \in V_3$ au proprietatea că $\|\bar{a}\| = 2$, $\|\bar{b}\| = 4$, $\|\bar{c}\| = 3$, $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = \pi/4$, $\sphericalangle(\bar{b}, \bar{c}) = \pi/6$.

R: $V = \left\|\langle\bar{u}, \bar{v} x \bar{w}\rangle\right\| = 21\left\|\langle\bar{a}, \bar{c} x \bar{b}\rangle\right\| = 21\|\bar{a}\|\,\|\bar{c} x \bar{b}\|\frac{\sqrt{2}}{2} = 126\sqrt{2}$.

17. Să se calculeze $\bar{a} \times \bar{c}$, $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ şi $<\bar{b}, \bar{a} \times \bar{c}>$ pentru fiecare din cazurile de mai jos:

a) $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i}$;

b) $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{j} + \bar{k}$;

c) $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 3\bar{j}$;

d) $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 5\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$;

e) $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$.

Indicație: Se aplică proprietățile 1) (T.2.6.1) şi 5 (T.2.5.1,T.2.4.1) ale produselor (mixt, vectorial şi scalar) vectorilor liberi.

18. Să se determine unghiul $\varphi \in [0, \pi/2]$ format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ ştiind că vectorul $\bar{a} + 2\bar{b}$ este perpendicular pe vectorul $2\bar{a} - \bar{b}$ iar vectorul $\bar{a} + 3\bar{b}$ este perpendicular pe $4\bar{a} - 2\bar{b}$.

R: Avem $<\bar{a} + 2\bar{b}, 2\bar{a} - \bar{b}> = 0$ şi $<\bar{a} + 3\bar{b}, 4\bar{a} - 2\bar{b}> = 0$ sau echivalent $2\|\bar{a}\|^2 - 2\|\bar{b}\|^2 + 3<\bar{a}, \bar{b}> = 0$ şi respectiv $4\|\bar{a}\|^2 - 6\|\bar{b}\|^2 + 10<\bar{a}, \bar{b}> = 0$. Notând $\|\bar{a}\|^2 = x \geq 0$, $\|\bar{b}\|^2 = y \geq 0$, $<\bar{a}, \bar{b}> = z$ şi ținând cont de relațiile de mai sus obținem un sistem compatibil cu soluția unică $z = \alpha$, $y = 2\alpha$, $x = \frac{1}{2}\alpha$. Deoarece $(\cos\varphi)^2 = \frac{z^2}{xy}$, avem $\varphi = 0$.

21. Dacă $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$ atunci numărul $G(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} \langle\bar{a},\bar{a}\rangle & \langle\bar{a},\bar{b}\rangle & \langle\bar{a},\bar{c}\rangle \\ \langle\bar{b},\bar{a}\rangle & \langle\bar{b},\bar{b}\rangle & \langle\bar{b},\bar{c}\rangle \\ \langle\bar{c},\bar{a}\rangle & \langle\bar{c},\bar{b}\rangle & \langle\bar{c},\bar{c}\rangle \end{vmatrix}$ se numeşte *determinantul Gram* al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$. Să se demonstreze că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul lor Gram este nul.

Indicație : Se demonstrează că $<\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}>^2 = G$.