# CAPITOLUL 3

# TRANSFORMĂRI LINIARE

## 3.1. Definiția transformării liniare

**Definiția 3.1.1.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. O funcție u: V $\rightarrow$ W se numeşte transformare liniară (sau operator liniar, sau morfism de spații vectoriale) dacă îndeplineşte următoarele condiții:*

1. $u(x + y) = u(x) + u(y)$ *pentru orice* $x, y \in V$;
2. $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ *pentru orice* $\alpha \in K$ *şi orice* $x \in V$.

*În cazul în care V = W o transformare liniară u : V $\rightarrow$ V se numeşte endomorfism.*

Se observă uşor că restricția unei transformări liniare la un subspațiu vectorial al domeniului său de definiție este tot o transformare liniară.

**Propoziția 3.1.2.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. O funcție u: V $\rightarrow$ W este transformare liniară dacă şi numai dacă pentru orice* $x, y \in V$ *şi orice* $\alpha, \beta \in K$ *este îndeplinită condiția*

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

**Demonstrație.** Dacă u: V $\rightarrow$ W este transformare liniară , atunci, conform definiției, pentru orice $x, y \in V$ şi orice $\alpha, \beta \in K$, avem

$$u(\alpha x + \beta y) = u(\alpha x) + u(\beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

Reciproc, presupunem că pentru orice x, y $\in$ V şi orice $\alpha$, $\beta \in$ K este îndeplinită condiția $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$. Luând $\alpha = \beta = 1$, obținem $u(x + y) = u(x) + u(y)$. Luând $\beta = 0$, obținem $u(\alpha x) = \alpha u(x)$. Cele două condiții din definiția transformării liniare sunt îndeplinite.

**Exemplul 3.1.3.** *Considerăm spațiile vectoriale $\boldsymbol{R}^3$ şi $\boldsymbol{R}^2$ peste corpul numerelor reale $\boldsymbol{R}$. Aplicația $u : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$, definită prin*

$$u(x) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3) \text{ pentru orice } x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$$

*este o transformare liniară. Într-adevăr, fie $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ şi $x = (x_1, x_2, x_3)$ , $y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3$. Din*

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3),$$

*rezultă că*

$$u(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_2 + \beta y_2 - (\alpha x_3 + \beta y_3))$$
$$=(\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_3), \ \alpha(x_2 - x_3) + \beta(y_2 - \beta y_3))$$
$$=(\alpha(x_1 + x_2), \ \alpha(x_2 - x_3)) + (\beta(y_1 + y_3), \beta(y_2 - \beta y_3))$$
$$= \alpha(x_1 + x_2, \ x_2 - x_3) + \beta(y_1 + y_3, y_2 - y_3)$$
$$= \alpha u(x) + \beta u(y).$$

*Aplicația $v : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$, definită prin*

$$v(x) = (x_1 + x_3, x_2 x_3) \text{ pentru orice } x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$$

*nu este o transformare liniară. Într-adevăr, pentru $x = (1, 1, 1) \in \boldsymbol{R}^3$ şi $\alpha = 3 \in \boldsymbol{R}$ avem $v(\alpha x) = (6, 9) \neq 3(2,1) = \alpha v(x)$.*

**Propoziția 3.1.4.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K şi $u: V \to W$ o transformare liniară. Atunci*

1. *$u(0) = 0$.*

*2. Dacă $V_1$ este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci $u(V_1) = \{u(x): x \in V_1\}$ este un subspaţiu vectorial al lui W.*

*3. Dacă $W_1$ este un subspaţiu vectorial a lui W, atunci preimaginea $u^{-1}(W_1) = \{x \in V: u(x) \in W_1\}$ este un subspaţiu vectorial al lui V.*

**Demonstraţie.** 1. Fie $x \in V$ un element oarecare. Atunci

$$u(0) = u(0x) = 0u(x) = 0.$$

2. Fie $V_1$ un subspaţiu vectorial a lui V. Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $y_1, y_2 \in u(V_1)$. Deoarece $y_1, y_2 \in u(V_1)$ există $x_1, x_2 \in V_1$ astfel încât $u(x_1) = y_1$ şi $u(x_2) = y_2$. Cum $V_1$ este subspaţiu vectorial, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in V_1$. Avem

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2) = u(\alpha x_1 + \beta x_2) \in u(V_1),$$

pentru că $\alpha x_1 + \beta x_2 \in V_1$. Deci $u(V_1)$ este un subspaţiu vectorial al lui W.

3. Fie $W_1$ un subspaţiu vectorial a lui W. Fie $\alpha, \beta \in K$ şi fie $x_1, x_2 \in u^{-1}(W_1)$. Din faptul că $x_1, x_2 \in u^{-1}(W_1)$ rezultă că $u(x_1), u(x_2) \in W_1$. Cum $W_1$ este subspaţiu vectorial, $\alpha u(x_1) + \beta u(x_2) \in W_1$ şi deci

$$u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2) \in W_1,$$

de unde rezultă că $\alpha x_1 + \beta x_2 \in u^{-1}(W_1)$. În consecinţă, $u^{-1}(W_1)$. este un subspaţiu vectorial al lui V.

**Propoziţia 3.1.5.** *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un corp comutativ K şi u: V → W o transformare liniară. În aceste condiţii*

*1. Pentru orice vectori $x_1, x_2, \dots, x_n$ din V şi orice scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ din K avem*

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i).$$

*2. Dacă $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este o familie liniar dependentă de vectori din V, atunci $\{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)\}$ este o familie liniar dependentă de vectori din W.*

*3. Dacă u este injectivă şi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este o familie liniar independentă de vectori din V, atunci $\{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)\}$ este o familie liniar independentă de vectori din W. Mai general, dacă $\{x_i\}_{i\in I}$ este o familie liniar independentă de vectori din V, atunci $\{u(x_i)\}_{i\in I}$ este o familie liniar independentă de vectori din W.*

*4. Dacă u este surjectivă şi $\{x_i\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru V, atunci $\{u(x_i)\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru W.*

*5. Dacă u este bijectivă, atunci dimensiunea lui V peste K este aceeaşi cu dimensiunea lui W peste K.*

**Demonstrație.** 1. Demonstrația se face prin inducție după *n*, ținând cont că

$$u\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i + \alpha_n x_n\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i\right) + u(\alpha_n x_n) =$$

$$= u\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i\right) + \alpha_n u(x_n).$$

2. Dacă $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este o familie liniar dependentă de vectori din V, atunci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$, nu toți nuli, astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

Aplicând *u* obținem $u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$ sau echivalent

$$\alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) + \dots + \alpha_n u(x_n) = 0,$$

de unde rezultă că $\{u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)\}$ este o familie liniar dependentă de vectori din W.

3. Presupunem că $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este o familie liniar independentă de vectori din V şi că *u* este injectivă. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ din K astfel încât $\alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) + \ldots + \alpha_n u(x_n) = 0$.

Ținând cont de 1. rezultă că $u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = 0$. Deoarece *u* este injectivă şi $u(0) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)$, rezultă că $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Deoarece $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este o familie liniar independentă rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Deci $\{u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)\}$ este o familie liniar independentă. Cazul general, al familiilor liniar independente infinite, revine la cazul familiilor finite, dacă se ține seama că o familie de vectori este liniar independentă dacă şi numai dacă orice subfamilie finită a sa este liniar independentă.

4. Presupunem că $\{x_i\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru V şi că *u* este surjectivă. Fie $y \in W$. Există $x \in V$ astfel încât $y = u(x)$, căci *u* este surjectivă. Deoarece $\{x_i\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru V, rezultă că există o familie $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de scalari din K de suport finit (adică numai un număr finit dintre scalarii $\alpha_i$ sunt nenuli) astfel încât $x = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$. Ca urmare, $y = u(x) = u(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i) = \sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i)$ şi deci $\{u(x_i)\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru W.

5. Fie $\{e_i\}_{i\in I}$ o bază în V. Transformarea liniară *u* fiind bijectivă este şi injectivă şi surjectivă. Atunci $\{u(e_i)\}_{i\in I}$ este şi liniar independentă (din 3) şi sistem de generatori pentru W (din 4). În consecință, $\{u(e_i)\}_{i\in I}$ este o bază în W. De aici obținem că dimensiunile lui V şi W coincid, fiind egale cu cardinalul lui I.

**Teorema 3.1.6.** *Fie V un spațiu vectorial peste un corp comutativ K și B = $\{e_i\}_{i\in I}$ o bază în V. Atunci oricare ar fi spațiul vectorial W peste corpul K și oricare ar fi familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de elemente din W, există o unică transformare liniară*

$$u : V \to W$$

*astfel încât $u(e_i) = f_i$ pentru orice $i \in I$. Mai mult, u este injectivă (respectiv surjectivă, bijectivă) dacă și numai dacă $\{f_i\}_{i\in I}$ este un sistem liniar independent (respectiv sistem de generatori, bază).*

**Demonstrație.** Dacă $x\in V$, există o unică familie $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de scalari din K de suport finit (adică numai un număr finit dintre scalarii $\lambda_i$ sunt nenuli) astfel încât $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$. Definim

$$u(x) = \sum_{i\in I}\lambda_i f_i .$$

Evident *u* este bine definită (datorită unicității reprezentării lui x în baza B) și rămâne să arătăm că *u* este transformare liniară.

Pentru orice $x_1$ și $x_2 \in V$ există și sunt unice familii de scalari din K de suport finit $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ și $\{\beta_i\}_{i\in I}$ astfel încât $x_1 = \sum_{i\in I}\alpha_i e_i$ și $x_2 = \sum_{i\in I}\beta_i e_i$ .

Atunci $x_1 + x_2 = \sum_{i\in I}(\alpha_i + \beta_i)e_i$ și

$$u(x_1 + x_2) = \sum_{i\in I}(\alpha_i + \beta_i)f_i = \sum_{i\in I}\alpha_i f_i + \sum_{i\in I}\beta_i f_i = u(x_1) + u(x_2).$$

Dacă $\alpha\in K$ și $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i \in V$, atunci $\alpha x = \sum_{i\in I}(\alpha\lambda_i)e_i$ și deci

$$u(\alpha x) = \sum_{i\in I}(\alpha\lambda_i)f_i = \alpha\sum_{i\in I}\lambda_i f_i = \alpha u(x).$$

Să demonstrăm unicitatea lui u. Fie v : V → W o altă transformare liniară cu proprietatea că $v(e_i) = f_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru orice $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i \in V$ avem $v(x) = v(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i v(e_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i f_i = u(x)$. Deci *v* coincide cu *u*.

Dacă *u* este injectivă atunci, conform Propoziției 3.1.5, $\{f_i\}_{i\in I} = \{u(e_i)\}_{i\in I}$ este liniar independentă, deoarece $\{e_i\}_{i\in I}$ fiind bază este în particular liniar independentă. Reciproc, să presupunem că $\{f_i\}_{i\in I}$ este liniar independentă şi să demonstrăm că *u* este injectivă. Fie $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $u(x_1) = u(x_2)$. Atunci $u(x_1 - x_2) = 0$. Cum $x_1 - x_2 \in V$, există o unică familie $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de scalari din K de suport finit astfel încât $x_1 - x_2 = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$. Avem $0 = u(x_1 - x_2) = u(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i u(e_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i f_i$

Faptul că $\{f_i\}_{i\in I}$ este liniar independentă implică $\lambda_i = 0$ pentru orice $i \in I$, şi deci $x_1 - x_2 = 0$, sau echivalent $x_1 = x_2$. De aici rezultă că *u* este o aplicație injectivă.

Dacă *u* este surjectivă atunci, conform Propoziției 3.1.5, $\{f_i\}_{i\in I} = \{u(e_i)\}_{i\in I}$ este sistem de generatori pentru W fiindcă $\{e_i\}_{i\in I}$, fiind bază în V, este în particular sistem de generatori pentru W. Reciproc, să presupunem că $\{f_i\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru W şi să demonstrăm că *u* este surjectivă. Fie $y \in W$. Din faptul că $\{f_i\}_{i\in I}$ este un sistem de generatori pentru W, rezultă că există o familie $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de scalari din K, de suport finit, astfel încât $y = \sum_{i\in I}\lambda_i f_i$. Luăm $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$ şi arătăm că $u(x) = y$, de unde rezultă că *u* este surjectivă. Într-adevăr,

$$u(x) = u(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i u(e_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i f_i = y.$$

Din cele demonstrate mai sus rezultă că *u* este o aplicație bijectivă (injectivă + surjectivă) dacă şi numai dacă $\{f_i\}_{i\in I}$ este bază (liniar independentă + sistem de generatori).

**Teorema 3.1.7.** *Fie n un număr natural, V şi W două spații vectoriale n-dimensionale peste un corp comutativ K. Pentru orice transformare liniară u: V $\to$ W următoarele afirmații sunt echivalente*

1. *u aplicație injectivă.*
2. *u aplicație surjectivă.*
3. *u aplicație bijectivă.*

**Demonstrație.** Vom arăta 1 => 2 =>3. Cum evident 3 =>1, va rezulta că cele trei afirmații sunt echivalente. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V.

1 => 2. Dacă *u* este injectivă, aplicând Propoziția 3.1.5, rezultă că $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$ este o familie liniar independentă de vectori din W. Cum dimensiunea lui W este *n*, rezultă că $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$ este de fapt o bază pentru W şi deci în particular $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$ este un sistem de generatori pentru W. Aplicând Teorema 3.1.6, rezultă că *u* este surjectivă.

2 =>3. Presupunem că *u* este surjectivă. Pentru a arăta ca *u* este bijectivă este suficient să arătăm că este injectivă. Din Propoziția 3.1.5, rezultă că $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$ este un sistem de generatori pentru W. Din faptul că dimensiunea lui W este *n*, rezultă că $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$ este de fapt o bază pentru W şi deci, în particular, $\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}$

este o familie liniar independentă de vectori din W. Ținând cont de Teorema 3.1.6, rezultă că *u* este injectivă.

**Corolarul 3.1.8.** *Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ K. Pentru orice endomorfism u: V → V următoarele afirmații sunt echivalente*

1. *u este aplicație injectivă.*
2. *u este aplicație surjectivă.*
3. *u este aplicație bijectivă.*

**Demonstrație.** Se aplică Teorema 3.1.7 luând W =V.

## 3.2. Operații cu transformări liniare

Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. Notăm cu $L_K(V, W)$ (sau $L(V, W)$ când corpul K se subînțelege) mulțimea tuturor transformărilor liniare definite pe V cu valori în W.

Dacă *u* şi *v* sunt două transformări liniare din $L(V, W)$, se defineşte *suma* "u + v" lor prin

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Se verifică uşor că $u + v : V \to W$ este o transformare liniară şi că suma transformărilor liniare este asociativă şi comutativă. Mai mult, există transformarea liniară $O : V \to W$,

$$O(x) = 0 \text{ pentru orice } x \in v,$$

(numită *transformarea liniară nulă*) care are proprietatea că $O + u = u + O$ pentru orice $u \in L(V, W)$.

Pentru orice transformare liniară $u \in L(V, W)$ se defineşte *transformarea liniară opusă* "- u" prin

$$(-u)(x) = -u(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Este uşor de arătat că - u este o transformare liniară şi că

$$u + (-u) = (-u) + u = O.$$

Pentru orice transformare liniară $u \in L(V, W)$ şi orice scalar $\alpha \in K$, se defineşte *produsul* lui *u cu scalarul* $\alpha$ "$\alpha u$" prin

$$(\alpha u)(x) = \alpha u(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Aplicaţia $\alpha u$ este o transformarea liniară din $L(V, W)$.

Mulţimea transformărilor liniare $L_K(V, W)$ împreună cu suma şi produsul cu scalari definite mai sus are o structură de spaţiu vectorial peste corpul K (temă - verificarea axiomelor) .

Fie U, V şi W trei spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ K. Dacă $u \in L_K(V, W)$ şi $v \in L_K(U, V)$, se defineşte *produsul* "uv" prin

$$(uv)(x) = u(v(x)) \text{ pentru orice } x \in U.$$

Se verifică faptul că aplicaţia $uv: U \to W$ este o transformare liniară. Pentru produsul de transformări liniare uv se mai foloseşte şi notaţia $u \circ v$ specifică compunerii funcţiilor (deoarece produsul transformărilor liniare u şi v este dat de fapt de compunerea funcţiilor u şi v).

Să considerăm acum cazul U = V = W. Se introduce *transformarea liniară identică* (sau *transformarea liniară unitate*) $I_V : V \to V$, definită prin

$$I_V(x) = x \text{ pentru orice } x \in V.$$

Este evident că $I_V$ este o transformare liniară şi că $I_V u = u I_V = u$ pentru orice transformare liniară $u \in L_K(V, V)$. Când spaţiul vectorial V se subînţelege, transformarea liniară identică se notează cu I.

Mulțimea transformărilor liniare $L_K(V, V)$ cu suma şi produsul definite mai sus formează un inel unitar necomutativ (vezi Definiția 4.2.1).

Pentru orice transformare liniară u : V → V se poate defini *puterea* $u^n$ pentru orice număr natural $n \geq 2$ prin

$$u^n = uu^{n-1} \text{ cu convenția } u^1 = u.$$

Datorită asociativității produsului de transformări liniare sunt valabile următoarele reguli

$$u^n u^m = u^{n+m}$$

$$(u^n)^m = u^{nm}$$

pentru orice numere naturale nenule n şi m. Pentru o transformare liniară nenulă u (diferită de transformarea liniară nulă O) se consideră prin convenție că $u^0 = I$.

O transformare liniară u : V → W, bijectivă se numeşte *izomorfism de spații vectoriale* sau *transformare liniară nesingulară*.

**Propoziția 3.2.1.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K şi u: V → W o transformare liniară nesingulară. Atunci există o transformare liniară*

$$v : W \to V$$

*astfel încât* $uv = I_W$ *şi* $vu = I_V$.

**Demonstrație.** Faptul că u: V → W este o aplicație bijectivă este echivalent cu faptul că *u* este inversabilă ca funcție. Deci există o aplicație v : W →V astfel încât $uv = I_W$ şi $vu = I_V$. Rămâne să arătăm că *v* este o transformare liniară. Fie $y_1, y_2 \in W$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Deoarece *u* este surjectivă (fiind bijectivă) rezultă că există $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $y_1 =$

$u(x_1)$ şi $y_2 = u(x_2)$. Atunci $v(y_1) = v(u(x_1)) = x_1$ şi $v(y_2) = v(u(x_2)) = x_2$. Avem

$$v(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = v(\alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2)) = v(u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 v(y_1) + \alpha_2 v(y_2).$$

Deci *v* este o aplicaţie liniară.

Dacă $u : V \to W$ este o transformare liniară nesingulară, atunci transformarea liniară $v : W \to V$ cu proprietatea că $uv = I_W$ şi $vu = I_V$ ( a cărei existenţă este demonstrată de Propoziţia 3.2.1) se numeşte *inversa transformării liniare* u şi se notează cu $u^{-1}$. Se mai spune că $u : V \to W$ este o transformare liniară inversabilă. Din demonstraţia Propoziţiei 3.2.1 rezultă că inversa transformării liniare *u* coincide cu inversa lui *u* ca funcţie.

**Propoziţia 3.2.2.** *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ K şi u: V → V o transformare liniară.*

*1. Dacă există transformarea liniară v : V → V astfel încât $uv = I_V$, atunci u este o transformare liniară nesingulară şi $u^{-1} = v$.*

*2. Dacă există transformarea liniară v : V → V astfel încât $vu = I_V$, atunci u este o transformare liniară nesingulară şi $u^{-1} = v$.*

**Demonstraţie.** 1. Presupunem că există transformarea liniară $v : V \to V$ astfel încât $vu = I_V$, Faptul că $I_V$ este o aplicaţie bijectivă implică faptul că *u* este injectivă (dacă $u(x_1) = u(x_2)$, atunci $v(u(x_1)) = v(u(x_2))$ şi deci $x_1 = x_2$). Din Corolarul 3.1.8 rezultă că "u injectivă" este echivalent cu "u bijectivă". Deci *u* este nesingulară şi în consecinţă există transformarea inversă $u^{-1}$. Înmulţind la dreapta egalitatea $vu = I_V$ cu $u^{-1}$ obţinem $v = u^{-1}$.

2. Presupunem că există transformarea liniară $v : V \to V$ astfel încât $uv = I_V$. Deoarece $I_V$ este o aplicaţie bijectivă rezultă că *u* este surjectivă. (Într-adevăr, pentru orice $y \in V$ luăm $x = v(y)$ obţinem $u(x) = u(v(y)) = y$. Deci *u* este surjectivă). Din Corolarul 3.1.8 rezultă că surjectivitatea lui *u* este echivalentă bijectivitatea lui *u*. Deci *u* este nesingulară şi în consecinţă, există transformarea inversă $u^{-1}$. Înmulţind la stânga egalitatea $uv = I_V$ cu $u^{-1}$ obţinem $v = u^{-1}$.

Fie V un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K şi $u, v \in L(V, V)$. Mulţimea transformărilor liniare nesingulare din L(V, V) coincide cu mulţimea elementelor inversabile ale inelului L(V, V) (vezi Definiţia 4.2.1), deci este un grup (în raport cu produsul transformărilor liniare).

Vom încheia această secţiune punând în evidenţă câteva reguli de calcul pentru transformările inverse

1. Dacă *u* şi *v* sunt nesingulare, atunci *uv* este nesingulară şi

$$(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$$

2. Dacă *u* este nesingulară, atunci $u^{-1}$ este nesingulară şi

$$(u^{-1})^{-1} = u$$

3. Dacă *u* este nesingulară şi $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, atunci $\alpha u$ este nesingulară şi

$$(\alpha u)^{-1} = \alpha^{-1}u^{-1}$$

4. Dacă *u* este nesingulară, atunci putem defini $u^{-n}$ pentru orice număr natural *n* prin formula $u^{-n} = (u^{-1})^n$. Este uşor de văzut că $u^{-n} = (u^n)^{-1}$.

## 3.3. Rangul şi defectul unei transformări liniare

**Definiția 3.3.1.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K şi u: V $\to$ W o transformare liniară. Mulțimea*

$$Ker\ u = \{x \in V: u(x) = 0\}$$

*se numeşte nucleul lui u (sau spațiul nul al lui u). Mulțimea*

$$Im\ u = \{u(x) : x \in V\}$$

*se numeşte imaginea transformării liniare u.*

**Propoziția 3.3.2.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. Pentru orice transformare liniară u: V $\to$ W, nucleul lui u este un subspațiu vectorial al lui V, iar imaginea lui u este un subspațiu vectorial al lui W.*

**Demonstrație.** Aplicând Propoziția 3.1.4 punctul 3, rezultă că nucleul Ker u = $u^{-1}(\{0\})$ este subspațiu vectorial al lui V. De asemenea aplicând Propoziția 3.1.4 punctul 2, rezultă că Im u = u(V) este subspațiu vectorial al lui W.

**Definiția 3.3.3.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K şi u: V $\to$ W o transformare liniară. Dimensiunea nucleului lui u (Ker u) se numeşte defectul transformării liniare u. Dimensiunea imaginii lui u (Im u) se numeşte rangul transformării liniare u.*

**Propoziția 3.3.4.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K. Pentru orice transformare liniară u: V $\to$ W avem*

*1. u este injectivă dacă şi numai dacă Ker u = {0}*

*2. u este surjectivă dacă şi numai dacă Im u = W.*

**Demonstraţie.** 1. Presupunem că *u* este injectivă. Dacă $x \in$ Ker u, atunci u(x) = 0 = u(0), deci x = 0 (u fiind injectivă). De aici rezultă Ker u = {0}. Reciproc, presupunem că Ker u = {0}. Fie $x_1, x_2 \in V$ astfel încât $u(x_1) = u(x_2)$. Cum $0 = u(x_1) - u(x_2) = u(x_1 - x_2)$, rezultă că $x_1 - x_2 \in$ Ker u = {0}. Deci $x_1 - x_2 = 0$, de unde rezultă că *u* este injectivă.

2. Presupunem că *u* este surjectivă. Deoarece incluziunea Im u $\subset$ W este întotdeauna adevărată, rămâne să arătăm incluziunea opusă. Fie $y \in W$. Cum *u* este surjectivă, există $x \in V$ astfel încât y = u(x). Deci $y \in$ Im u. Reciproc, dacă Im u = W, atunci pentru orice $y \in W$ există $x \in V$ astfel încât y = u(x). Deci *u* este surjectivă.

**Propoziţia 3.3.5.** *Fie n un număr natural şi fie V şi W două spaţii vectoriale n - dimensionale peste un corp comutativ K. Pentru orice transformare liniară u: V → W următoarele afirmaţii sunt echivalente*

*1. Ker u = {0}*

*2. Im u = W*

*3. u este nesingulară.*

**Demonstraţie.** Din Teorema 3.1.7 rezultă că faptul că

*u* este nesingulară <=> *u* este injectivă <=> *u* este surjectivă.

Din Propoziţia 3.3.4 rezultă că *u* este injectivă dacă şi numai dacă Ker u = {0}. Tot din propoziţia 3.3.4 rezultă că *u* este surjectivă dacă şi numai dacă Im u = W.

**Propoziţia 3.3.6.** *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste un* *corp comutativ K. Pentru orice endomorfism u: $V \to V$ următoarele afirmații sunt echivalente*

1. *Ker u = {0}*
2. *Im u = V*
3. *u este nesingular.*

**Demonstrație.** Rezultă din Propoziția 3.3.5 luând W = V.

**Teorema 3.3.7.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K şi u: $V \to W$ o transformare liniară.*

1. *Dacă V este finit dimensional, atunci şi Im u este finit dimensional.*
2. *Dacă r(u) este rangul lui u şi d(u) este defectul lui u, atunci*

$$r(u) + d(u) = \dim_K V$$

*(dimensiunea spațiului V este egală cu suma dintre dimensiunea nucleului transformării liniare u şi dimensiunea imaginii lui u).*

Demonstrație. Notăm $n = \dim_K V$. Fie $B_1 = \{e_1, e_2 \ldots, e_{d(u)}\}$ o bază în Ker u pe care o completăm până la o bază $B_2 = \{e_1, e_2 \ldots, e_{d(u)}, e_{d(u)+1}, \ldots, e_n\}$ în V (dacă d(u) = 0, atunci $B_1$ este mulțimea vidă). Arătăm că $B_3 = \{u(e_{d(u)+1}), u(e_{d(u)+2}), \ldots, u(e_n)\}$ este o bază în Im u. Pentru orice $y \in$ Im u, există $x \in V$ astfel încât $y = u(x)$. Cum $B_2$ este o bază în V, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{d(u)} \alpha_i e_i + \sum_{i=d(u)+1}^{n} \alpha_i e_i$.

Atunci

$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{d(u)} \alpha_i e_i\right) + u\left(\sum_{i=d(u)+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = u\left(\sum_{i=d(u)+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=d(u)+1}^{n} \alpha_i u(e_i),$$

deci $B_3 =\{u(e_{d(u)+1}), u(e_{d(u)+2}), \ldots, u(e_n)\}$ este un sistem de generatori pentru Im u. Pentru a arăta că $B_3$ este bază rămâne să arătăm că $B_3$ este liniar independentă. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-d(u)}$ astfel încât

$$\alpha_1 u(e_{d(u)+1}) + \alpha_2 u(e_{d(u)+2}) + \ldots + \alpha_{n-d(u)} u(e_n) = 0.$$

Ținând cont că *u* este o transformare liniară rezultă că

$$u(\alpha_1 e_{d(u)+1} + \alpha_2 e_{d(u)+2} + \ldots + \alpha_{n-d(u)} e_n) = 0.$$

sau echivalent $\alpha_1 e_{d(u)+1} + \alpha_2 e_{d(u)+2} + \ldots + \alpha_{n-d(u)} e_n \in$ Ker u.

Din faptul că $B_1 =\{e_1, e_2 \ldots, e_{d(u)}\}$ este o bază în Ker u, rezultă că există scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{d(u)}$ astfel încât

$$\alpha_1 e_{d(u)+1} + \alpha_2 e_{d(u)+2} + \ldots + \alpha_{n-d(u)} e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_{d(u)} e_{d(u)}.$$

sau echivalent

$$\alpha_1 e_{d(u)+1} + \alpha_2 e_{d(u)+2} + \ldots + \alpha_{n-d(u)} e_n - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \ldots - \beta_{d(u)} e_{d(u)} = 0.$$

Pe de altă parte $B_2=\{e_1, e_2 \ldots, e_{d(u)}, e_{d(u)+1}, \ldots, e_n\}$ fiind bază în V, deci, în particular, fiind liniar independentă , rezultă că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots =\alpha_{n-d(u)} = \beta_1 =\ldots = \beta_{d(u)} = 0.$$

De aici rezultă că $B_3$ este liniar independentă. Faptul că $B_3 =\{u(e_{d(u)+1}), u(e_{d(u)+2}), \ldots, u(e_n)\}$ este o bază în Im u, implică

$$r(u) = \dim_K(\text{Im } u) = \text{card}(B_3) = n - d(u),$$

sau echivalent $r(u) + d(u) = n$.

**Lema 3.3.8.** *Fie V şi W două spații vectoriale peste un corp comutativ K şi u: $V \to W$ o transformare liniară. Dacă V este finit dimensional şi dacă S este un subspațiu vectorial al lui V, atunci $\dim_K u(V) - \dim_K u(S) \le \dim_K V - \dim_K S$.*

**Demonstrație.** Notăm cu $u|_S$ restricția transformării liniare *u* la S :

$$u|_S : S \to W,\ u|_S(x) = u(x) \text{ pentru orice } x \in S.$$

Este clar că $\text{Im } u_S = u_S(S) = u(S)$ şi că $\text{Ker } u_S \subset \text{Ker } u$.

Din teorema precedentă aplicată transformărilor liniare u şi $u_S$ rezultă că

$$\dim_K u(V) + \dim_K(\text{Ker } u) = \dim_K V$$

$$\dim_K u(S) + \dim_K(\text{Ker } u_S) = \dim_K S$$

Scăzând cele două relații obținem

$$\dim_K u(V) - \dim_K u(S) + (\dim_K(\text{Ker } u) - \dim_K(\text{Ker } u_S)) = \dim_K V - \dim_K S.$$

Pe de altă parte, din Ker $u_S \subset$ Ker u, rezultă $\dim_K(\text{Ker } u) \geq \dim_K(\text{Ker } u_S)$, şi, ținând seama de relația de mai sus, obținem

$$\dim_K u(V) - \dim_K u(S) \leq \dim_K V - \dim_K S.$$

**Teorema 3.3.9.** ***(inegalitatea lui Sylvester)*** *Fie $V_1$, $V_2$ şi $V_3$ trei spații vectoriale peste un corp comutativ K astfel încât $\dim_K V_2 = n$. Pentru orice două transformări liniare $u_1$: $V_2 \to V_3$ şi $u_2 : V_1 \to V_2$, rezultă că*

$$r(u_1u_2) \geq r(u_1) + r(u_2) - n,$$

*unde am notat cu $r(u_1)$ (respectiv $r(u_2)$, $r(u_1u_2)$) rangul lui $u_1$ (respectiv rangul lui $u_2$, rangul lui $u_1u_2$).*

**Demonstrație.** Aplicând Lema 3.3.8 pentru transformarea liniară $u_1$ şi subspațiul Im $u_2 = u_2(V_1)$ al lui $V_2$:

$$u_2(V_1) \subset V_2 \xrightarrow{u_1} V_3$$

obținem $\dim_K(u_1(V_2)) - \dim_K(u_1(u_2(V_1))) \leq \dim_K(V_2) - \dim_K(u_2(V_1))$,

sau echivalent, $\dim_K(u_1(V_2)) - \dim_K(u_1u_2(V_1)) \leq \dim_K(V_2) - \dim_K(u_2(V_1))$.

Ținând cont de definiția rangului unei transformări liniare rezultă că

$$r(u_1) - r(u_1u_2) \leq n - r(u_2).$$

**Teorema 3.3.10.** ***(inegalitatea lui Frobenius)*** *Fie $V_1$, $V_2$, $V_3$ şi $V_4$ patru spații vectoriale peste un corp comutativ K astfel încât $V_2$ şi $V_3$ să fie finit dimensionale. Pentru orice transformări* *liniare $u_1: V_3 \to V_4$, $u_2 : V_2 \to V_3$ şi $u_3 : V_1 \to V_2$ rezultă că*

$$r(u_1u_2) + r(u_2u_3) \le r(u_2) + r(u_1u_2u_3),$$

*unde am notat cu $r(u_1u_2)$ (respectiv $r(u_2)$, $r(u_2u_3)$, $r(u_1u_2u_3)$) rangul lui $u_1u_2$ (respectiv rangul lui $u_2$, rangul lui $u_2u_3$, rangul lui $u_1u_2u_3$).*

**Demonstrație.** Aplicând Lema 3.3.8 pentru restricția transformării liniare $u_1$ la $u_2(V_2)$ şi subspațiul $u_2(u_3(V_1))$ al lui $u_2(V_2)$:

$$u_2(u_3(V_1)) \subset u_2(V_2) \xrightarrow{u_1} V_4$$

obținem inegalitatea

$$\dim_K(u_1(u_2(V_2)))-\dim_K(u_1(u_2(u_3(V_1)))) \le \dim_K(u_2(V_2))-\dim_K(u_2(u_3(V_1))),$$

care poate fi scrisă sub forma, $r(u_1u_2) - r(u_1u_2u_3) \le r(u_2) - r(u_2u_3)$.

**Corolarul 3.3.11.** *Fie $V_1$, $V_2$ şi $V_3$ trei spații vectoriale peste un corp comutativ K astfel încât $V_2$ să fie finit dimensional. Pentru orice transformări liniare $u_1: V_2 \to V_3$, $u_2 : V_1 \to V_2$, rezultă că*

$$r(u_1u_2) \le \min (r(u_1), r(u_2)),$$

*unde am notat cu $r(u_1)$ (respectiv $r(u_2)$), rangul lui $u_1$ (respectiv rangul lui $u_2$).*

**Demonstrație.** Dacă aplicăm inegalitatea Frobenius (demonstrată în teorema precedentă) pentru transformările liniare

$$V_1 \xrightarrow{O} V_1 \xrightarrow{u_2} V_2 \xrightarrow{u_1} V_3$$

(O fiind transformarea liniară nulă) şi ținem seama că

$$r(O) = r(u_2O) = r(u_1u_2O) = 0$$

obținem

$$r(u_1u_2) \le r(u_2) \qquad (1).$$

Dacă aplicăm inegalitatea Frobenius pentru transformările liniare

$$V_1 \xrightarrow{u_2} V_2 \xrightarrow{u_1} V_3 \xrightarrow{O} V_3$$

şi ținem seama că

$$r(O) = r(Ou_1) = r(Ou_1u_2) = 0$$

obținem

$$r(u_1u_2) \le r(u_1) \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă că $r(u_1u_2) \le \min(r(u_1), r(u_2))$.

**Exemplul 3.3.12.** *Fie transformarea liniară* $u : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ *definită prin* $u(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ *pentru orice* $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$. *Atunci*

$$Ker\ u = \{x \in R^2 : u(x) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 + x_2, x_1 - x_2) = (0,0)\}$$

*Cu alte cuvinte* $(x_1, x_2) \in Ker\ u$ *dacă şi numai dacă este soluția sistemului omogen* $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$. *Determinantul acestui sistem fiind*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

*rezultă că sistemul admite doar soluția banală* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

*Deci* $Ker\ u = \{0\}$. *Din faptul că u este endomofism al spațiului finit dimensional* $\boldsymbol{R}^2$ *şi are proprietatea că* $Ker\ u = \{0\}$, *rezultă că u este nesingular (vezi Propoziția 3.3.6). Pentru a determina transformarea inversă notăm* $u(x) = y$, *unde* $y = (y_1, y_2)$. *Obținem sistemul liniar* $x_1 + x_2 = y_1$, $x_1 - x_2 = y_2$, *care are soluția* $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$. *Deci* $u^{-1}(y) = (\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2)$ *pentru orice* $y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$.

**Exemplul 3.3.13.** *Fie transformarea liniară* $u : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ *definită prin* $u(x) = (x_1, x_2, x_1 - 2x_2)$ *pentru orice* $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$. *Să se determine* *nucleul şi imaginea acestei transformări liniare.*

*Avem Ker u =* $\{x \in \mathbf{R}^2 : u(x) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : (x_1, x_2, x_1 - x_2) = (0,0,0)\}$. *Cu alte cuvinte* $(x_1, x_2) \in$ *Ker u dacă şi numai dacă este soluţia sistemului omogen* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 - 2x_2 = 0$. *Deoarece acest sistem admite doar soluţia banală* $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, *rezultă că Ker u =* $\{0\}$.

*Pentru a calcula imaginea transformării observăm că*

$$Im\ u = \{u(x) : x \in \mathbf{R}^2\} = \{y \in R^3 : \text{există } x \in \mathbf{R}^2 \text{ astfel încât } y = u(x)\}$$

*Cu alte cuvinte* $(y_1, y_2, y_3) \in$ *Im u dacă şi numai dacă sistemul* $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 - 2x_2 = y_3$ *este compatibil. Putem lua drept minor principal*

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

*Există un singur minor caracteristic:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 1 & -2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & -2 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = y_3 - y_1 + 2y_2$$

*Deci condiţia de compatibilitate a sistemului devine* $y_3 - y_1 + 2y_2 = 0$.

*În consecinţă, Im u =* $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 : y_3 - y_1 + 2y_2 = 0\} = \{(\alpha, \beta, \alpha - 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. *Se observă uşor că* $B = \{e_1, e_2\}$, *unde* $e_1 = (1,0,1)$ *şi* $e_2 = (0,1,-2)$ *este o bază a lui Im u. Deci rangul lui u este 2. Se verifică egalitatea*

$$\dim_{\mathbf{R}}(Im\ u) + \dim_{\mathbf{R}}(Ker\ u) = \dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^2\ (2 + 0 = 2)$$

*demonstrată în Teorema 3.3.7.*

## 3.4. Matricea asociată unei transformări liniare

În această secțiune vom considera doar spații vectoriale finit dimensionale.

**Teorema 3.4.1.** *Fie V şi W două spații vectoriale finit dimensionale peste un corp comutativ K, şi u : V → W o transformare liniară. Dacă {$e_1$, $e_2$, …, $e_n$} este o bază a lui V şi {$f_1$, $f_2$, …, $f_m$} este o bază a lui W, atunci există şi este unică o matrice A =* $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ *cu elemente din corpul K astfel încât u($e_i$) =* $\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_j$ *pentru orice 1 ≤ i ≤ n. În plus, dacă imaginea lui x =* $\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ *($x_i$ ∈K pentru orice 1 ≤ i ≤ n) prin u este u(x) =* $\sum_{i=1}^{m}y_if_i$ *($y_i$ ∈K pentru orice 1 ≤ i ≤ m), atunci $y_i$ =* $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}x_j$ *pentru orice 1 ≤ i ≤ m.*

*Notând X =($x_1$, $x_2$, …, $x_n$), Y =($y_1$, $y_2$, …, $y_m$), relațiile $y_i$ =* $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}x_j$ *pentru orice 1 ≤ i ≤ m. pot fi scrise sub forma matriceală Y = XA.*

**Demonstrație.** Conform Teoremei 3.1.6, transformarea liniară *u* este unic determinată de valorile $\{u(e_i)\}_{1\le i\le n}$. Pe de altă parte, fiecare vector u($e_i$) poate fi reprezentat în mod unic în baza {$f_1$, $f_2$, …, $f_m$}:

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_j \text{ pentru orice } 1 \le i \le n.$$

Prin urmare, matricea A = $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, ale cărei linii au drept elemente coordonatele ($\alpha_{i1}$, $\alpha_{i2}$, …, $\alpha_{im}$) corespunzătoare vectorilor $u(e_i)$ ($1 \le i \le n$) în baza $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, este unic determinată. Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ ($x_i \in K$ pentru orice $1 \le i \le n$) şi fie $\sum_{i=1}^{m} y_i f_i$ ($y_i \in K$ pentru orice $1 \le i \le m$) reprezentarea lui $u(x)$ în baza $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Avem $u(x) = u(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) =$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \alpha_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ij}\right) f_j$$

Unicitatea reprezentării lui $u(e_j)$ în baza $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ implică

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \text{ pentru orice } 1 \le j \le m.$$

**Definiția 3.4.2.** *Fie V şi W două spații vectoriale finit dimensionale peste un corp comutativ K, şi u : V → W o transformare liniară. Dacă $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază a lui V şi $B_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ este o bază a lui W, atunci matricea A = $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ cu elemente din corpul K cu proprietatea că*

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j \text{ pentru orice } 1 \le i \le n.$$

*se numeşte matricea asociată transformării liniare u în raport cu perechea de baze considerate şi se notează cu $M_{B_1,B_2}(u)$. Dacă u :V → V este un endomorfism şi B = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază a lui V, atunci convenim să scriem $M_B(u)$ în loc de $M_{B,B}(u)$, şi să o numim matricea asociată transformării liniare u în raport cu baza B.*

**Exemplul 3.4.3.** *Fie $\mathbf{R}_n[X]$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n, cu coeficienți reali. Structura de spațiu vectorial este dată de adunarea obişnuită a polinoamelor, şi drept operație externă, de înmulțirea polinoamelor cu elemente din $\mathbf{R}$:*

$$(\alpha,\ \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n) \rightarrow \alpha\alpha_0 + \alpha\alpha_1 X + \ldots + \alpha\alpha_n X^n.$$

*Considerăm transformarea liniară $D$: $R_n[X] \rightarrow R_n[X]$, definită prin $D(P) = P'$ (derivata polinomului P). Mai precis, dacă $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n$ atunci $D(P) = \alpha_1 + 2\alpha_2 X + \ldots + n\alpha_n X^{n-1}$. Se verifică uşor că D este o transformare liniară ($D(\alpha P + \beta Q) = \alpha D(P) + \beta D(Q)$ pentru orice polinoame P şi Q şi orice numere reale $\alpha$ şi $\beta$). De asemenea, este clar că $B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ este o bază în $\mathbf{R}_n[X]$. Determinăm matricea asociată lui D în raport cu baza B. Avem*

$$D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot X + \ldots + 0\cdot X^n.$$

$$D(X) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot X + \ldots + 0\cdot X^n.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D(X^k) = kX^{k-1} = 0\cdot 1 + 0\cdot X + \ldots + 0\cdot X^{k-2} + k\cdot X^{k-1} + 0\cdot X^k + \ldots + 0\cdot X^n.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D(X^n) = nX^{n-1} = 0\cdot 1 + 0\cdot X + \ldots + 0\cdot X^{n-2} + n\cdot X^{n-1} + 0\cdot X^n.$$

*Matricea asociată lui D în raport cu baza B este*

$$M_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

*Matricea asociată lui D în raport cu baza B este se obține punând pe linii coordonatele în baza B ale vectorilor $D(1), D(X), \ldots, D(X^n)$.*

*Coordonatele unui polinom $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n$ în baza $B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ sunt chiar coeficienții polinomului P: $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dacă $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, n\alpha_n, 0)$ sunt coordonatele lui $P' = D(P)$ în baza B, atunci are loc următoarea egalitate matricească*

$$(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

**Observația 3.4.4.** Fie K un corp comutativ şi $u : K^n \to K^m$ o transformare liniară. Fie $B_n$, respectiv $B_m$, baza canonică din $K^n$, respectiv din $K^m$. Coordonatele unui vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ din $K^m$ în baza canonică sunt de fapt componentele vectorului respectiv: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Ținând cont de aceasta, liniile matricei $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ asociate transformării liniare u în raport cu perechea de baze $B_n$, $B_m$ sunt date de vectorii $u(E_1)$, $u(E_1)$, $u(E_2)$, …, $u(E_n)$ , unde $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sunt vectorii bazei canonice $B_n$. Dacă $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ este un vector din $K^n$, atunci $u(x) = (x_1, x_2, .., x_n)A$.

De exemplu, fie transformarea liniară $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, definită prin

$u(x) =(x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 + 8x_3, -x_1, 4x_3)$, pentru $x =(x_1, x_2, x_3)$.

Considerăm baza canonică din $\mathbf{R}^3$ :

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

respectiv din $\mathbf{R}^4$

$$\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

Matricea lui *u* în raport cu perechea de baze canonice este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

( la scrierea matricei s-a ținut cont de faptul că $u(x) = (x_1, x_2, x_3)A$, pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$)

**Propoziția 3.4.5.** *Rangul unei transformări liniare este egal cu rangul matricei asociate transformării liniare în raport cu orice pereche de baze.*

**Demonstrație.** Fie $u : V \to W$ o transformare liniară. Fie $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V, $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ o bază în W, şi fie $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ matricea asociată lui *u* în raport cu perechea de baze $B_1$, $B_2$.

Un vector $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ($x_i \in K$ pentru orice $1 \le i \le n$) din V aparține lui Ker *u*, dacă şi numai dacă $u(x) = 0$, ceea ce (ținând seama de faptul că $u(x) = \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ij} \right) f_j$ ) este echivalent cu

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i = 0 \text{ pentru orice } 1 \le j \le m.$$

Relațiile de mai sus reprezintă un sistem liniar şi omogen de m ecuații cu n necunoscute. Matricea acestui sistem este A. Dacă rangul matricei A este *r*, atunci mulțimea vectorilor ale căror coordonate satisfac sistemul liniar şi omogen de mai sus este un subspațiu liniar de dimensiune n - r (vezi Teorema 1.7.3). În consecință, $\dim_K(\mathrm{Ker}\ u) = n-r$, şi deci rangul transformării liniare u este $\dim_K(\mathrm{Im}\ u) = n - \dim_K(\mathrm{Ker}\ u) = n - (n-r) = r$ (vezi Teorema 3.3.7).

**Observația 3.4.6.** Fie $u : V \to V$ un endomorfism şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V. Fie $M_B(u)$ matricea asociată transformării liniare *u* în raport cu baza B. Endomorfismul *u* este nesingular dacă şi dacă numai dacă matricea $M_B(u)$ este nesingulară ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(M_B(u)) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(M_B(u)) \neq 0$). Într-adevăr, conform Propoziției 3.3.6, endomorfismul *u* este nesingular dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}\ u = \{0\}$, ceea ce este echivalent cu $\dim(\mathrm{Im}\ u) = n$ (adică rangul lui *u* este *n*). Cum rangul lui *u* este egal cu rangul lui $M_B(u)$, rezultă că *u* este endomorfism nesingular dacă şi numai dacă $M_B(u)$ este nesingulară.

Proprietățile unei transformări liniare sunt reflectate în proprietățile matricelor care o reprezintă în diverse baze. Fie $V_1$, $V_2$, $V_3$ trei spații vectoriale peste un corp comutativ K. Fixăm $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui $V_1$, $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ o bază a lui $V_2$ şi $B_3 = \{g_1, g_2, \ldots, g_p\}$ o bază a lui $V_3$. Considerăm trei transformări liniare $u_1, u_2 : V_1 \to V_2$, $u_3 : V_2 \to V_3$. Fie $M_{B_1,B_2}(u_1)$ (respectiv $M_{B_1,B_2}(u_2)$) matricea lui $u_1$ (respectiv $u_2$) în raport cu perechea de baze $B_1$, $B_2$, şi fie $M_{B_2,B_3}(u_3)$ matricea lui $u_3$ în raport cu perechea de baze $B_2$, $B_3$. Următoarele afirmații sunt uşor de verificat

1. Transformării liniare $u_1 + u_2$ îi corespunde matricea
$$M_{B_1,B_2}(u_1 + u_2) = M_{B_1,B_2}(u_1) + M_{B_1,B_2}(u_2)$$
2. Transformării liniare $\alpha u_1$ $(\alpha \in K)$ îi corespunde matricea
$$M_{B_1,B_2}(\alpha u_1) = \alpha M_{B_1,B_2}(u_1)$$
3. Transformării liniare $u_3 u_1$ îi corespunde matricea
$$M_{B_1,B_3}(u_3 u_1) = M_{B_1,B_2}(u_1)\, M_{B_2,B_3}(u_3)$$

4. Dacă transformarea liniară $u_1$ este inversabilă, atunci transformării liniare $u_1^{-1}$ îi corespunde matricea

$$M_{B_2,B_1}\left(u_1^{-1}\right)=M_{B_1,B_2}\left(u_1\right)^{-1}.$$

Să verificăm ultimele două afirmații. Dacă $M_{B_1,B_2}(u_1)=(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ şi $M_{B_2,B_3}(u_3)=(\beta_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}$, atunci pentru orice $1 \le i \le n$, avem

$$u_3u_1(e_i) = u_3(u_1(e_i)) = u_3\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}u_3\left(f_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}\beta_{jk}g_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{jk}\right)g_k. \qquad (1)$$

Dacă $M_{B_1,B_3}(u_3u_1)=(\gamma_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ matricea lui $u_3u_1$ în raport cu perechea de baze $B_1$, $B_3$, atunci pentru orice $1 \le i \le n$, avem

$$u_3u_1(e_i) =\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik}g_k \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) (în baza unicității reprezentării unui vector într-o bază) rezultă că $\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{jk}$ pentru orice $1 \le i \le n$ şi $1 \le k \le p$, ceea ce este echivalent cu

$$M_{B_1,B_3}(u_3u_1)=M_{B_1,B_2}(u_1)\, M_{B_2,B_3}(u_3).$$

Presupunem că transformarea liniară $u_1$ este inversabilă (deci $m = n$), şi că $M_{B_2,B_1}\left(u_1^{-1}\right)$ este matricea lui $u^{-1}$ în raport cu perechea de baze $B_2$, $B_3$. Din cele demonstrate mai sus, în baza faptului că transformării liniare identice îi corespunde matricea identică, rezultă că

$$I_n = M_{B_1}\left(I_{V_1}\right) = M_{B_1}\left(u_1^{-1}u_1\right) = M_{B_1,B_2}(u_1)\, M_{B_2,B_1}\left(u_1^{-1}\right)$$

$$I_n = M_{B_2}\left(I_{V_2}\right)= M_{B_2}\left(u_1u_1^{-1}\right)= M_{B_2,B_1}\left(u_1^{-1}\right)M_{B_1,B_2}(u_1)$$

Deci $M_{B_2,B_1}\left(u_1^{-1}\right) = M_{B_1,B_2}(u_1)^{-1}$.

Proprietățile puse în evidență mai înainte arată că :

1. aplicația $\varphi : L(V_1, V_2) \to M_{n,m}(K)$ definită prin

$$\varphi(u) = M_{B_1,B_2}(u) \text{ pentru orice } u \in L(V_1, V_2)$$

este un izomorfism de spații vectoriale peste corpul K.

2. aplicația $\varphi : L(V_1, V_1) \to M_{n,n}(K)$ definită prin

$$\varphi(u) = \left(M_{B_1}(u)\right)^t \text{ pentru orice } u \in L(V_1, V_1)$$

este un izomorfism de inele.

**Teorema 3.4.7.** *Fie V şi W două spații vectoriale finit dimensionale peste un corp comutativ K, şi $u : V \to W$ o transformare liniară. Fie $B_1$, $B_2$ două baze în V şi fie L matricea de trecere de la baza $B_1$ la baza $B_2$. Similar, fie $B_3$, $B_4$ două baze în W şi fie M matricea de trecere de la baza $B_3$ la baza $B_4$. Atunci*

$$M_{B_2,B_4}(u) = L\, M_{B_1,B_3}(u)\, M^{-1}$$

**Demonstrație.** Folosim următoarele notații

$B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ (baze în V),

$B_3 = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$, $B_4 = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ (baze în W),

$M_{B_1,B_3}(u) = \left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, $M_{B_2,B_4}(u) = \left(\beta_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ (matricele lui u în raport cu perechea de baze $B_1$, $B_3$, respectiv $B_2$, $B_4$)

$L = \left(\lambda_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ (matricea de trecere de la baza $B_1$ la baza $B_2$)

$M = \left(\mu_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ (matricea de trecere de la baza $B_3$ la baza $B_4$)

Pentru orice $1 \le i \le n$, avem

$$u(f_i) = u\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}u(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}g_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\alpha_{jk}\right)g_k \qquad (1)$$

Pe de altă parte, pentru orice $1 \le i \le n$, avem

$$u(f_i) = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}h_j = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_{jk}g_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\mu_{jk}\right)g_k \qquad (2)$$

Datorită unicității reprezentării unui vector într-o bază, din relațiile (1) şi (2) rezultă că

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\alpha_{jk} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\mu_{jk} \text{ pentru orice } 1 \le i \le n \text{ şi } 1 \le k \le m,$$

ceea ce revine la

$$L M_{B_1,B_3}(u) = M_{B_2,B_4}(u) M.$$

Înmulțind la stânga cu $M^{-1}$, obținem

$$M_{B_2,B_4}(u) = L\ M_{B_1,B_3}(u)\ M^{-1}.$$

**Corolarul 3.4.8.** *Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ K, şi $u : V \to V$ un endomorfism. Fie $B_1$, $B_2$ două baze în V şi fie C matricea de trecere de la baza $B_1$ la baza $B_2$. Atunci*

$$M_{B_2}(u) = C\ M_{B_1}(u)\ C^{-1}$$

**Demonstrație.** În Teorema 3.4.7 considerăm $B_3 = B_1$ şi $B_4 = B_1$.

**Exemplul 3.4.9.** *Fie $\boldsymbol{R}_3[X]$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 3, cu coeficienți reali (vezi şi exemplul 3.4.3). Considerăm transformarea liniară $D_1$: $\boldsymbol{R}_3[X] \to \boldsymbol{R}_3[X]$, definită prin $D_1(P) = XP'$. Determinăm matricea asociată lui $D_1$ în raport cu baza*

$$B = \{ 1,\ 1+X,\ (1 + X)^2,\ (1 + X)^3 \}$$

*Dacă*

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$$

*atunci*

$$D_1(P) = \alpha_1 X + 2\alpha_2 X^2 + 3\alpha_3 X^3.$$

*Matricea lui $D_1$ în raport cu baza*

$$B_0 = \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$$

*este*

$$M_{B_0}(D_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*Matricea de trecere de la baza $B_0$ la baza $B$ este*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

*Cum* $M_B(D_1) = C\,M_{B_0}(D_1)C^{-1}$ *rezultă că*

$$M_B(D_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

## 3.5. Endomorfisme particulare

**Definiția 3.5.1.** *Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K. Endomorfismul $u : V \to V$ se numeşte*

1. *automorfism dacă este bijectiv;*
2. *proiecție (sau endomorfism idempotent) dacă $u^2 = u$;*
3. *involuție dacă $u^2 = I$ (I este transformarea liniară identică pe V);*
4. *antiinvoluție dacă $u^2 = -I$;*
5. *endomorfism nilpotent de indice $p \in N$ $(p \geq 2)$ dacă $u^p = O$ şi $u^{p-1} \neq O$ (O este transformarea liniară nulă pe V).*

**Propoziția 3.5.2.** *Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K. Fie $V_1$ şi $V_2$ două subspații vectoriale ale lui V cu proprietatea că $V = V_1 \oplus V_2$. Aplicațiile $P_1, P_2 : V \to V$, definite prin*

$$P_1(x) = x_1$$
$$P_2(x) = x_2,$$

*(unde $x = x_1 + x_2$ este unica reprezentare a lui x cu proprietatea că $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$) sunt proiecții.*

**Demonstrație.** Fie $x = x_1 + x_2 \in V_1 \oplus V_2$ ($x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$) şi $y = y_1 + y_2$ din $V_1 \oplus V_2$ ($y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$) şi fie $\alpha, \beta \in K$. Atunci

$$P_1(\alpha x + \beta y) = P_1(\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha P_1(x) + \beta P_1(y).$$

Deci $P_1$ este aplicație liniară. Analog, $P_2$ este aplicație liniară. Pentru orice $x = x_1 + x_2 \in V_1 \oplus V_2$ ($x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$), avem

$$P_1(P_1(x)) = P_1(x_1) = x_1 = P_1(x).$$

Analog $P_2$ este endomorfism idempotent.

**Definiția 3.5.3.** *Fie $V_1$, $V_2$ două subspații ale unui spațiu vectorial V peste corpul comutativ K astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$. Aplicațiile $P_1, P_2 : V \to V$, definite prin*

$$P_1(x) = x_1$$

$$P_2(x) = x_2,$$

*unde $x = x_1 + x_2$ este unica reprezentare a lui x cu proprietatea că $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$, se numesc proiecții canonice : $P_1$ se numeşte proiecția lui V pe $V_1$ (de-a lungul lui $V_2$), iar $P_2$ se numeşte proiecția lui V pe $V_2$ (de-a lungul lui $V_1$) .*

**Propoziția 3.5.4.** *Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K. Dacă $P : V \to V$ este o proiecție, atunci există subspațiile vectoriale $V_1$ şi $V_2$ astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$ şi P să fie proiecția lui V pe $V_1$ (de-a lungul lui $V_2$).*

**Demonstrație.** Considerăm subspațiile vectoriale:

$$V_1 = \text{Im } P =\{P(x) : x \in V\} ,V_2 = \text{Ker } P =\{x\in V: P(x) = 0\}$$

Arătăm mai întâi că $V_1 = \{x\in V : P(x) = x\}$. Dacă $y\in V_1$, atunci există $x \in V$ astfel încât $y = P(x)$, şi ca urmare $P(y) = P(P(x)) = P^2(x) = P(x) =y$. Deci $y \in\{x\in V : P(x) = x\}$.

Reciproc, orice $y\in\{x\in V : P(x) = x\}$, are proprietatea că $y =P(y) \in \text{Im } P$.

Arătăm că $V = V_1 \oplus V_2$. Dacă $x \in V_1 \cap V_2$, atunci $x = P(x) = 0$. În consecință $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Pentru orice $x \in V$, avem $x = P(x) + (I - P)(x)$ (I este transformarea liniară identică pe V).

Notăm $x_1 = P(x)$ şi $x_2 = (I - P)(x)$. Evident $x_1 \in \text{Im } p = V_1$. Dacă arătăm că $x_2 \in V_2$ demonstraţia este încheiată. Din $P(x_2) = P((I - P)(x)) = P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$, rezultă că $x_2 \in \text{Ker } P = V_2$.

**Observaţia 3.5.5.** Din demonstraţia propoziţiei precedente rezultă următoarele afirmaţii:

1. Dacă V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi $P : V \to V$ este o proiecţie, atunci

$$V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$$

2. Fie $V_1$ şi $V_2$ două subspaţii ale spaţiului vectorial V peste corpul comutativ K, astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$.

   2.1. Dacă P este proiecţia lui V pe $V_1$, atunci

$$V_1 = \text{Im } P = \{P(x) : x \in V\} = \{x \in V : P(x) = x\}$$

$$V_2 = \text{Ker } P = \{x \in V : P(x) = 0\}$$

   2.2. Dacă P este proiecţia lui V pe $V_1$, atunci $I - P_1$ este proiecţia lui V pe $V_2$ şi reciproc.

   2.3. Dacă $P_1$ şi $P_2$ sunt proiecţiile V pe $V_1$, respectiv $V_2$, atunci

$$P_1 + P_2 = I$$

$$P_1P_2 = P_2P_1 = O.$$

**Definiţia 3.5.6.** *Considerăm un spaţiu vectorial V peste corpul comutativ K şi $u : V \to V$ un endomorfism. Un subspaţiu invariant faţă de endomorfismul u este un subspaţiu vectorial $V_1$ al lui V, astfel ca $u(V_1) \subset V_1$ (adică, $u(x) \in V_1$ pentru orice x din $V_1$).*

Fie $V_1 \subset V$ un subspațiu invariant la endomorfismul $u : V \to V$. Aplicația $u|_{V_1} : V_1 \to V_1$, definită prin $u|_{V_1}(x) = u(x)$ pentru orice $x \in V_1$, este un endomorfism numit *endomorfism indus* de *u* pe $V_1$ (sau *restricția* lui *u* la $V_1$).

**Observație 3.5.7.** Un subspațiu vectorial $V_1$ al lui V este invariant față de endomorfismul $u : V \to V$ dacă şi numai dacă imaginile prin *u* ale vectorilor unei baze din $V_1$ aparțin tot lui $V_1$. Într-adevăr, să presupunem că $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ este o bază în $V_1$ şi că $u(e_i) \in V_1$ pentru orice $1 \le i \le m$. Deoarece orice $x \in V_1$ se reprezintă sub forma

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in K,$$

rezultă că $u(x) = \alpha_1 u(e_1) + \alpha_2 u(e_2) + \ldots + \alpha_m u(e_m) \in V_1$. Implicația inversă este evidentă.

**Exemple 3.5.8**. *Considerăm un spațiu vectorial V peste corpul comutativ K şi $u : V \to V$ un endomorfism. Se verifică uşor că*

1. *V şi {0} sunt subspații invariante față de u.*
2. *Ker $u^m = \{x \in V: u^m(x) = 0\}$ este subspațiu invariant față de u, pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$.*
3. *Im $u^m = \{ u^m(x) : x \in V\}$ este subspațiu invariant față de u, pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$.*
4. *Dacă $V_1$ şi $V_2$ sunt două subspații vectoriale ale V invariante față de u, atunci $V_1 \cap V_2$ şi $V_1 + V_2$ sunt subspații invariante față de u.*

**Propoziția 3.5.9.** *Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste corpul comutativ K şi $u : V \to V$ un endomorfism. Un subspațiu* *vectorial $V_1 \subset V$ este invariant la u dacă şi numai dacă $PuP = uP$, unde P este proiecția lui V pe $V_1$.*

**Demonstrație.** Fie $V = V_1 \oplus V_2$ şi $x \in V$. Atunci x se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$. Presupunem că $V_1$ este invariant la *u*. Cum $uP(x) = u(x_1) \in V_1$, rezultă că $P(uP(x)) = u(x_1)$. Deci

$$PuP(x) = uP(x).$$

Reciproc, presupunem că $PuP = uP$. Dacă $x \in V_1$, atunci $x_1 = x$ şi $x_2 = 0$ (sau echivalent , $P(x) = x$) şi deci, $u(x) = u(x_1) = uP(x) = PuP(x) = P(u(P(x)) = P(u(x))$. Ca urmare, $u(x) \in \operatorname{Im} P = V_1$.

**Teorema 3.5.10.** *Fie $V_1$ şi $V_2$ două subspații ale unui spațiu vectorial V peste corpul comutativ K, astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$. Subspațiile $V_1$ şi $V_2$ sunt invariante față de un endomorfism $u: V \to V$ dacă şi numai dacă $Pu = uP$, unde P este proiecția lui V pe $V_1$ de-a lungul lui $V_2$.*

**Demonstrație.** Dacă P este proiecția lui V pe $V_1$ de-a lungul lui $V_2$, atunci I-P este proiecția lui V pe $V_2$ de-a lungul lui $V_1$. Presupunem că $V_1$ şi $V_2$ sunt invariante la *u*. Din propoziția precedentă rezultă că

$$PuP= uP \text{ şi } (I-P)u(I-P) = u(I-P).$$

Relația $(I-P)u(I-P)=u(I-P)$ este echivalentă cu $Pu =PuP$. Deci

$$uP =PuP =Pu.$$

Reciproc, să presupunem că $Pu = uP$. Aplicând P la dreapta, obținem $PuP = uP^2 = uP$ şi, conform propoziție precedente, rezultă că $V_1 = \operatorname{Im} P$ este invariant la u. Pe de altă parte, $Pu = uP$ implică $(I-P)u = u(I-P)$. Aplicând proiecția I-P la dreapta, obținem $(I-P)u(I-P) = u(I-P)^2 = u(I-P)$, şi ținând cont din nou de propoziția precedentă, rezultă că $V_2 = \operatorname{Im}(I-P)$ este invariant la *u*.

**Propoziția 3.5.11.** *Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K. Relațiile*

$$u = 2P - I,\ \ P = \frac{1}{2}(u + I),$$

*(unde I este transformarea liniară identică pe V) stabilesc o corespondență biunivocă între proiecții şi involuții pe V.*

**Demonstrație.** Dacă $P : V \to V$ o proiecție, atunci $2P - I$ este transformare liniară. Să verificăm faptul că este involuție:

$$(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I.$$

Reciproc, dacă $u : V \to V$ este o involuție, atunci $\frac{1}{2}(u + I)$ este o transformare liniară, şi în plus, $(\frac{1}{2}(u + I))^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u + I) = \frac{1}{4}(I + 2u + I)$ $= \frac{1}{2}(I + u)$. Deci $\frac{1}{2}(u + I)$ este proiecție.

**Propoziția 3.5.12.** *Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste corpul comutativ K. V admite o antiinvoluție dacă şi numai dacă dimensiunea lui V peste K este pară.*

**Demonstrație.** Presupunem că dimensiunea lui V peste K este pară şi construim o antiinvoluție pe V. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n}\}$ o bază a lui V. Este suficient să definim antiinvoluția pe vectorii bazei. Fie $u : V \to V$, definită prin

$$u(e_i) = e_{i+n} \text{ şi } u(e_{i+n}) = -e_i \text{ pentru orice } 1 \le i \le n.$$

Se observă că $u^2(e_i) = -e_i$ pentru orice $1 \le i \le 2n$, şi deci $u^2 = -I$.

Reciproc, fie $u : V \to V$ o antiinvoluție. Dacă $x_1$ este un vector nenul din V, atunci $\{x_1, u(x_1)\}$ este liniar independentă. Într-adevăr, fie scalarii $\alpha_1$, $\alpha_2 \in K$ astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 u(x_1) = 0 \qquad (1)$$

Aplicând, *u* în relația 1 şi ținând seama că $u^2(x_1) = -x_1$, obținem

$$\alpha_1 u(x_1) - \alpha_2 x_1 = 0 \qquad (2)$$

Adunând relația 1 înmulțită cu $\alpha_1$ cu relația 2 înmulțită cu $(-\alpha_2)$ , obținem $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x_1 = 0$, de unde $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$, sau echivalent $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Mai general, arătăm că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sunt vectori din V astfel încât

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u(x_1), u(x_2), .., u(x_{m-1})\}$$

să fie liniar independentă, atunci

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u(x_1), u(x_2), .., u(x_{m-1}), u(x_m)\}$$

este liniar independentă. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m} \in K$ astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} u(x_1) + \alpha_{m+2} u(x_2) + \ldots +$$
$$+ \alpha_{2m-1} u(x_{m-1}) + \alpha_{2m} u(x_m) = 0 \qquad (3).$$

Aplicând, u în relația 3 şi ținând seama că $u^2(x) = -x$ pentru orice $x \in V$, obținem

$$\alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) + \ldots + \alpha_m u(x_m) - \alpha_{m+1} x_1 - \alpha_{m+2} x_2 - \ldots -$$
$$- \alpha_{2m-1} x_{m-1} - \alpha_{2m} x_m = 0 \qquad (4).$$

Prin adunarea relației 3 înmulțită cu $\alpha_m$ cu relația 4 înmulțită cu $(-\alpha_{2m})$ , obținem

$$(\alpha_1\alpha_m + \alpha_{m+1}\alpha_{2m})\, x_1 + (\alpha_2\alpha_m + \alpha_{m+2}\alpha_{2m})x_2 + \ldots + (\alpha_m^2 + \alpha_{2m}^2)x_m +$$
$$+ (\alpha_{m+1}\alpha_m - \alpha_1\alpha_{2m})u(x_1) + \ldots + (\alpha_{2m-1}\alpha_m - \alpha_{m-1}\alpha_{2m})u(x_{m-1}) = 0.$$

Cum $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u(x_1), u(x_2), .., u(x_{m-1})\}$ este liniar independentă,

$$(\alpha_1\alpha_m + \alpha_{m+1}\alpha_{2m}) = \ldots = (\alpha_m^2 + \alpha_{2m}^2) = \ldots = (\alpha_{2m-1}\alpha_m - \alpha_{m-1}\alpha_{2m}) = 0,$$

de unde rezultă, în particular, că $\alpha_{2m} = 0$. Înlocuind în relația 3 $\alpha_{2m} = 0$, şi ținând din nou cont că $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, u(x_1), u(x_2), .., u(x_{m-1})\}$ este liniar independentă, obținem $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2m} = 0$.

Construim o bază a lui V după cum urmează. Alegem $x_1$ o vector nenul din V. Am arătat că $\{x_1, u(x_1)\}$ este liniar independentă. Dacă dimensiunea lui V nu este 2, există $x_2 \in V$, astfel încât $\{x_1, x_2, u(x_1)\}$ să fie liniar independentă. Din cele demonstrate mai sus rezultă că $\{x_1, x_2, u(x_1), u(x_2)\}$ este liniar independentă. Continuând acest procedeu obținem o bază a lui V cu un număr par de vectori.

**Observația 3.5.13.** Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste corpul comutativ K şi $u: V \to V$ o antiinvoluție. Atunci există o bază B a lui V astfel încât $M_B(u)$ (matricea lui u în raport cu baza B) să fie

$$\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$$

Într-adevăr, din demonstrația propoziției precedente, rezultă că putem construi o bază a lui V de forma $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, u(x_1), u(x_2), .., u(x_{m-1}), u(x_m)\}$. Evident, matricea lui *u* în raport cu această bază are forma de mai sus.

**Propoziția 3.5.14.** *Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K şi $u: V \to V$ un endomorfism nilpotent de indice p ($u^p = O$ şi $u^{p-1} \neq O$). Mulțimea*

$$\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$$

*este liniar independentă oricare ar fi vectorul nenul $x \in V$ cu $u^{p-1}(x) \neq 0$.*

**Demonstrație.** Fie $x \in V$ cu $x \neq 0$ şi $u^{p-1}(x) \neq 0$. Presupunem prin absurd că $\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$ nu este liniar independentă. Fie scalarii $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \in K$, nu toți nuli, astfel încât

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \alpha_{p-1} u^{p-1}(x) = 0. \qquad (1)$$

Fie k cel mai mic indice cu proprietatea că $\alpha_k \neq 0$. Din relația 1 rezultă că

$$\begin{aligned}
u^k(x) &= -\alpha_k^{-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \alpha_{k-1} u^{k-1}(x) + \alpha_{k+1} u^{k+1}(x) + \ldots + \alpha_{p-1} u^{p-1}(x)) \\
&= -\alpha_k^{-1}(\alpha_{k+1} u^{k+1}(x) + \ldots + \alpha_{p-1} u^{p-1}(x)) \\
&= -\alpha_k^{-1} \alpha_{k+1} u^{k+1}(x) - \alpha_k^{-1} \alpha_{k+2} u^{k+2}(x) - \ldots - \alpha_k^{-1} \alpha_{p-1} u^{p-1}(x)) \\
&= u^{k+1}(-\alpha_k^{-1} \alpha_{k+1} x - \alpha_k^{-1} \alpha_{k+2} u^k(x) \ldots - \alpha_k^{-1} \alpha_{p-1} u^{p-k-2}(x))
\end{aligned}$$

Dacă notăm $y = -\alpha_k^{-1} \alpha_{k+1} x - \alpha_k^{-1} \alpha_{k+2} u^k(x) \ldots - \alpha_k^{-1} \alpha_{p-1} u^{p-k-2}(x)$, rezultă că $u^k(x) = u^{k+1}(y)$. Avem $u^{p-1}(x) = u^{p-k-1}(u^k(x)) = u^{p-k-1}(u^{k+1}(y)) = u^p(y) = 0$, deoarece *u* este nilpotent de indice p. Dar $u^{p-1}(x) = 0$ contrazice ipoteza. Ca urmare $\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$ este liniar independentă.

**Observația 3.5.15.** Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K şi $u: V \to V$ un endomorfism nilpotent de indice p ($u^p = O$ şi $u^{p-1} \neq O$). Notăm cu L spațiul vectorial generat de $\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$. Evident L este un spațiu invariant la u. Matricea endomorfismului $u|_L$ indus de u pe L în baza $B = \{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$, este

$$M_B(u|_L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.5.16.** *Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste corpul comutativ K. Pentru orice endomorfism $u: V \to V$ există două subspații vectoriale $V_1$ şi $V_2$ ale lui V invariante la u astfel încât:*

*1.* $V = V_1 \oplus V_2$

*2. endomorfismul* $u|_{V_1}$ *indus de u pe* $V_1$ *este endomorfism nilpotent, dacă* $V_1 \neq \{0\}$.

*3. endomorfismul* $u|_{V_2}$ *indus de u pe* $V_2$ *este endomorfism nesingular, dacă* $V_2 \neq \{0\}$.

**Demonstrație.** Notăm

$$N_m = \text{Ker } u^m = \{x \in V: u^m(x) = 0\}, \ R_m = \text{Im } u^m = \{ u^m(x) : x \in V\}$$

pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$. Subspațiile $N_m$ şi $R_m$ sunt invariante față de *u*, şi în plus, se arată uşor că $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_m \subset \ldots$, $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_m \supset \ldots$

Deoarece V este finit dimensional nu toate incluziunile $N_i \subset N_{i+1}$ pot fi stricte. Deci există i astfel încât $N_i = N_{i+1}$. Dacă $N_i = N_{i+1}$, atunci putem demonstra prin inducție după $j \geq 1$, că $N_i = N_{i+j}$ pentru orice $j \in \mathbf{N}$. Presupunem afirmația adevărată pentru j-1 şi o demonstrăm pentru j.

Dacă $x \in N_{i+j}$, atunci $u^{i+j}(x) = 0$. Din $u^{i+j}(x) = 0$, rezultă că $u^{i+j}(x) = u^{i+1}(u^{j-1}(x)) = 0$, sau echivalent $u^{j-1}(x) \in N_{i+1}$. Dar $N_{i+1} = N_i$, de unde rezultă că $u^{j-1}(x) \in N_i$, adică $u^i(u^{j-1}(x)) = 0$. Am arătat că $u^{i+j-1}(x) = 0$, adică $x \in N_{i+j-1} = N_i$ (din ipoteza de inducție).

Deoarece $R_1$ este finit dimensional nu toate incluziunile $R_i \supset R_{i+1}$ pot fi stricte. Deci există k astfel încât $R_k = R_{k+1}$. Dacă $R_k = R_{k+1}$, atunci putem demonstra prin inducție după $j \geq 1$, că $R_k = R_{k+j}$ pentru orice $j \in \mathbf{N}$. Presupunem afirmația adevărată pentru j-1 şi o demonstrăm pentru j. Dacă $y \in R_k$, atunci conform ipotezei de inducție $y \in R_{k+j-1}$, sau echivalent există $x \in V$ astfel încât $y = u^{k+j-1}(x)$. Din $u^k(x) \in R_k = R_{k+1}$, rezultă că există $z \in V$ astfel încât $u^k(x) = u^{k+1}(z)$. În consecință,

$$y = u^{k+j-1}(x) = u^{j-1}(u^k(x)) = u^{j-1}(u^{k+1}(z)) = u^{j+k}(z) \in R_{k+j}.$$

Fie $i_0$ cel mai mic indice cu proprietatea că $N_{i_0} = N_{i_0+1}$, $k_0$ cel mai mic indice cu proprietatea că $R_{k_0} = R_{k_0+1}$ şi fie $p = \max\{i_0, k_0\}$. Din cele de mai sus, rezultă că $N_p = N_{p+1}$ şi $R_p = R_{p+1}$. Arătăm că $V = N_p \oplus R_p$. Din Teorema 3.3.7, rezultă că

$$\dim_K V = \dim_K(\mathrm{Ker}\, u^p) + \dim_K(\mathrm{Im}\, u^p) = \dim_K(N_p) + \dim_K(R_p).$$

Deci pentru a demonstra că $V = N_p \oplus R_p$, este suficient să arătăm că

$$N_p \cap R_P = \{0\}.$$

Fie $x \in N_p \cap R_P$. Pe de o parte, $u^p(x) = 0$. Pe de altă parte există $z \in V$ astfel încât $x = u^p(z)$. Cum $u^{2p}(z) = u^p(u^p(z)) = u^p(x) = 0$, rezultă că $z \in N_{2p} = N_P$. Dar $z \in N_P$ implică $u^p(z) = 0$, şi deci $x = 0$.

Luăm $V_1 = N_p$ şi $V_2 = R_p$. Deoarece $u^p(V_1) = u^p(N_p) = \{0\}$, rezultă endomorfismul $u|_{V_1}$ indus de u pe $V_1$ este endomorfism nilpotent. Rămâne să arătăm că endomorfismul $u|_{V_2}$ indus de *u* pe $V_2$ este endomorfism nesingular. Cum $V_2$ este finit dimensional, este suficient să arătăm că $u|_{V_2}$ este injectiv. Fie $x \in \mathrm{Ker}\, u|_{V_2}$. Din $x \in V_2 = \mathrm{Im}\, u^p$, rezultă că există $z \in V$ astfel încât $x = u^p(z)$. Deoarece $0 = u(x) = u^{p+1}(z)$, $z \in N_{p+1} = N_p$. Deci $u^p(z) = 0$, şi ca urmare $x = 0$.

**Lema 3.5.17.** *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste corpul comutativ K, şi u: V→V un endomorfism nilpotent de indice p($u^p = O$ şi $u^{p-1} \neq O$). Fie $N_i = \mathrm{Ker}\, u^i$ pentru orice $i \in \mathbf{N}$. Atunci*

*1. $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{p-1} \subset N_p = V$, incluziunile fiind stricte;*

*2. $u(N_i) \subset N_{i-1}$ pentru orice $1 \le i \le p$;*

*3. dacă $i \geq 1$ şi L este un subspaţiu vectorial al lui V cu proprietatea că $L \cap N_i = \{0\}$, atunci $Ker\ u \cap L = \{0\}$ şi $u(L) \cap N_{i-1} = \{0\}$;*

*4. există subspaţiile vectoriale $F_1, F_2, \dots, F_p \subset V$ astfel încât $N_1 = F_1$, $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$ şi $u(F_i) \subset F_{i-1}$ pentru orice $2 \leq i \leq p$.*

**Demonstraţie.** 1. Şirul de incluziuni de la 1 este evident. Să verificăm faptul că sunt stricte. Fie $x \in V$ astfel încât $u^{p-1}(x) \neq 0$. Presupunem prin absurd că există $i \geq 2$ astfel încât $N_{i-1} = N_i$. Din $0 = u^p(x) = u^i(u^{p-i}(x))$, rezultă că $u^{p-i}(x) \in Ker\ u^i = Ker\ u^{i-1}$, şi deci că $u^{i-1}(u^{p-i}(x)) = 0$. Obţinem de unde $u^{p-1}(x) = 0$, ceea ce contrazice alegerea lui x.

2. Dacă $y \in u(N_i)$, atunci există $x \in N_i$ astfel încât $y = u(x)$. Astfel avem $u^{i-1}(y) = u^{i-1}(u(x)) = u^i(x) = 0$, deci $y \in N_{i-1}$.

3. Dacă $x \in Ker\ u \cap L$, atunci $u(x) = 0$ (şi în consecinţă $u^i(x) = 0$) şi $x \in L$. Deci $x \in L \cap N_i = \{0\}$. Dacă $y \in u(L) \cap N_{i-1}$, atunci $u^{i-1}(y) = 0$ şi există $x \in L$ astfel încât $u(x) = y$. Din $u^i(x) = u^{i-1}(y) = 0$, rezultă că $x \in N_i$. Deci $x \in L \cap N_i = \{0\}$, şi ca urmare $y = u(x) = 0$.

4. Fie $i \geq 2$. Deoarece $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$, $F_i \cap N_{i-1} = \{0\}$, şi din punctul 3 rezultă că $u(F_i) \cap N_{i-2} = \{0\}$. Pe de altă parte,

$$u(F_i) \subset u(N_i) \subset N_{i-1} = N_{i-2} \oplus F_{i-1}.$$

Cum $u(F_i) \cap N_{i-2} = \{0\}$ şi $u(F_i) \subset N_{i-2} \oplus F_{i-1}$, rezultă că $u(F_i) \subset F_{i-1}$.

**Teorema 3.5.18.** *Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional peste corpul comutativ K, şi $u: V \to V$ un endomorfism nilpotent. Atunci există o bază B lui V astfel încât matricea lui u în raport cu baza B să aibă forma*

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & \xi_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*unde $\xi_i \in \{0, 1\}$ pentru orice $1 \le i \le n-1$.*

**Demonstrație.** Fie $p$ indicele endomorfismului u ($u^p = O$ şi $u^{p-1} \neq O$). Notăm $N_i = \mathrm{Ker}\, u^i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Fie $F_1, F_2, \ldots, F_p \subset V$ astfel încât $N_1 = F_1$, $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$ pentru orice $2 \le i \le p$. Din lema precedentă, rezultă că $u(F_i) \subset F_{i-1}$ pentru orice $2 \le i \le p$. Mai mult,

$$V = N_p = N_{p-1} \oplus F_p = N_{p-2} \oplus F_{p-1} \oplus F_p = \ldots = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p.$$

Deoarece $F_i \cap N_{i-1} = \{0\}$, conform lemei precedente (punctul 3), rezultă că $F_i \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$. Fie $B_1 = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n_1}\}$ o bază în $F_p$. Notăm $e_{2i} = u(e_{1i}) \in F_{p-1}$ pentru orice $1 \le i \le n_1$. Mulțimea $\{u(e_{11}), u(e_{12}), \ldots, u(e_{1n_1})\}$ este liniar independentă. Într-adevăr dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1} \in K$ astfel încât $\alpha_1 u(e_{11}) + \alpha_2 u(e_{12}) + \ldots + \alpha_{n_1} u(e_{1n_1}) = 0$, atunci $u(\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{12} + \ldots + \alpha_{n_1} e_{1n_1}) = 0$, ceea ce implică

$$\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{12} + \ldots + \alpha_{n_1} e_{1n_1} \in \mathrm{Ker}\, u \cap F_{p-1} = \{0\}$$

Deoarece $\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n_1}\}$ este liniar independentă, fiind bază, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n_1} = 0$. Completăm $\{u(e_{11}), u(e_{12}), \ldots, u(e_{1n_1})\}$ până la o bază $B_2 = \{e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2n_1}, e_{2,n_1+1}, \ldots, e_{2n_2}\}$ în $F_{p-1}$. Continuăm procedeul şi obținem în fiecare subspațiu $F_i$ ( $i = p-1, p-2, \ldots, 1$) o bază

$$B_{p-i+1} = \{e_{p-i+1,1}, e_{p-i+1,2}, \ldots, e_{p-i+1,n_{p-i}}, e_{p-i+1,n_{p-i}+1}, \ldots, e_{p-i+1,n_{p-i+1}}\}$$

cu proprietatea că $e_{p-i+1,j} = u(e_{p-i,j})$ pentru orice $1 \le j \le n_{p-i}$. Deoarece $V = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$, rezultă că $B_1 \cup B_2 \cup .. \cup B_p$ este o bază în V. Ordonăm baza B sub forma ($e_{11}$, $e_{21}$, …, $e_{p1}$, $e_{12}$, $e_{22}$, …, $e_{p2}$, …, $e_{1,n_1}$, $e_{2,n_1}$, …, $e_{p,n_1}$, $e_{2,n_1+1}$, $e_{3,n_1+1}$, …, $e_{p,n_1+1}$, …, $e_{2,n_2}$, $e_{3,n_2}$, …, $e_{p,n_2}$, …, $e_{p,n_p}$).

Este uşor de observat că $e_{ji} = u^{j-k}(e_{ki})$pentru orice $1 \le k \le p-1$, $k+1 \le j \le p$, $n_{p-k-1} < i \le n_{p-k}$, cu convenția ca $n_0 = 0$.

De aici rezultă că $u(e_{pi}) = u^{p-k+1}(e_{ki}) = 0$ (pentru că $e_{ki} \in F_{p-k+1} \subset N_{p-k+1}$), pentru orice $n_{p-k-1} < i \le n_{p-k}$. Ținând cont de faptul că

$$u(e_{11}) = e_{21}$$
$$u(e_{21}) = e_{31}$$
$$\vdots$$
$$u(e_{p-1,1}) = e_{p1}$$
$$u(e_{p1}) = 0$$
$$u(e_{1n_1}) = e_{2n_1}$$
$$\vdots$$
$$u(e_{12}) = e_{22}$$
$$u(e_{22}) = e_{32}$$
$$\vdots$$
$$u(e_{p-1,n_{p-1}}) = e_{p,n_{p-1}}$$
$$u(e_{p1}) = 0$$
$$\vdots$$
$$u(e_{pn_p}) = 0.$$

rezultă că matricea lui u în raport cu baza ordonată astfel este

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \end{matrix} & & O \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \end{matrix} & \end{pmatrix}$$

**Exemplul 3.5.19.** *Fie A matricea corespunzătoare endomorfismul u în baza canonică din* $\boldsymbol{R}^5$ *(*$B_c$ *={[1,0,0,0,0], [0,1,0,0,0], [0,0,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]}):*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -10 & 6 & -4 & -4 \\ 2 & -5 & 3 & -2 & -2 \\ 4 & -7 & 6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

*Avem*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Deci u este un endomorfism nilpotent de indice 3. Vom determina o bază în care matricea lui să aibă forma indicată în Teorema 3.5.18.*

*Determinăm subspațiile* $N_i = Ker\ u^i$, $0 \le i \le 3$:

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 = \boldsymbol{R}^5.$$

*Un vector* $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in Ker\ u^i$ *dacă şi numai dacă* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *este soluție a sistemului*

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]A^i = [0,0,0,0,0].$$

*Determinarea subspațiului $N_1$ :*

$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\in N_1 <=> (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *este soluție a sistemului*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 10x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

*Rangul matricei sistemului este 3. Considerând necunoscute secundare* $x_3 = \alpha$, $x_5 = \beta$, *obținem soluția generală a sistemului*

$$x_1 = -\beta,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = -2\alpha - 2\beta,\ x_5 = \beta.$$

*În consecință,*

$$N_1 = \{[-\beta, \beta, \alpha, -2\alpha - 2\beta, \beta]: \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

*O bază în $N_1$ este*

$$\{[0,0,1,-2,0], [-1,1,0,-2,1]\}$$

*Determinarea subspațiului $N_2$:*

$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\in N_2 <=> (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *este soluție a sistemului*

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ -3x_1 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 0x_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \\ 6x_1 - 12x_3 - 6x_4 - 6x_5 = 0 \\ -3x_1 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

*Rangul matricei sistemului este 1. Considerând necunoscute secundare* $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \lambda$ $x_5 = \mu$ *obținem soluția generală a sistemului*

$$x_1 = 2\beta + \lambda + \mu,\ x_2 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_4 = \lambda\ x_5 = \mu$$

*În consecință,*

$$N_2 = \{[2\beta + \lambda + \mu,\ \alpha, \beta, \lambda\ \mu]: \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

*O bază în $N_2$ este*

$$\{[0,1,0,0,0], [2,0,1,0,0], [1,0,0,1,0], [1,0,0,0,0]\}$$

*Considerăm subspațiile $F_1$, $F_2$, $F_3$ cu proprietățile*

$$\boldsymbol{R}^5 = N_3 = N_2 \oplus F_3,\ N_2 = N_1 \oplus F_2,\ N_1 = F_1.$$

*Deoarece* $dim_{\boldsymbol{R}}N_3 = 5 = dim_{\boldsymbol{R}}N_2 + dim_{\boldsymbol{R}}F_3$ *şi* $dim_{\boldsymbol{R}}N_2 = 4$ *rezultă că* $dim_{\boldsymbol{R}}F_3 = 1$. *Pentru a determina o bază în* $F_3$ *este suficient să considerăm un vector care nu aparţine lui* $N_2$. *Astfel dacă* $e_{11} = [1, 0, 0, 0, 0]$, *atunci* $B_1 = \{e_{11}\}$ *este o bază în* $F_3$. *Fie*

$$e_{21} = u(e_{11}) = [1, 0, 0, 0, 0]A = [1, 2, 0, 2, -1].$$

*Din demonstraţia teoremei precedente rezultă că* $e_{21} \in F_2$. *Deoarece* $dim_{\boldsymbol{R}}N_2 = 4 = dim_{\boldsymbol{R}}N_1 + dim_{\boldsymbol{R}}F_2$ *şi* $dim_{\boldsymbol{R}}N_1 = 2$ *rezultă că* $dim_{\boldsymbol{R}}F_2 = 2$. *Completăm* $\{e_{21}\}$ *până la o bază în* $F_2$. *Pentru aceasta alegem un vector* $e_{22}$ *din* $N_2$ *astfel încât*

$$\{\underbrace{[0,0,1,-2,0],\ [-1,1,0,-2,1]}_{\text{bază în } N_1},\ \underbrace{[1,2,0,2,-1]}_{e_{21}=u(e_{11})},\ e_{22}\}$$

*să fie liniar independentă. Dacă alegem* $e_{22} = [1, 0, 0, 0, 1] \in N_2$ *condiţia de liniar independenţă este îndeplinită şi* $B_2 = \{e_{21}, e_{22}\}$ *este bază în* $F_2$. *Determinăm o bază pentru* $F_1 = N_1$ *procedând la fel. Fie*

$$e_{31} = u(e_{21}) = [1, 2, 0, 2, -1]A = [3, -3, 0, 6, -3]$$

$$e_{32} = u(e_{22}) = [1, 0, 0, 0, 1]\,A = [5, -5, 6, -2-, 5]$$

*Mulţimea* $\{e_{31}, e_{32}\}$ *este liniar independentă şi inclusă în* $F_1$. *Cum* $dim_{\boldsymbol{R}}F_1 = dim_{\boldsymbol{R}}N_1 = 2$, *rezultă că* $B_3 = \{e_{31}, e_{32}\}$ *este de fapt bază în* $F_1$. *Considerăm baza lui* $R^5$, *obţinută prin ordonarea vectorilor din* $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ *ca în demonstraţia teoremei precedente:*

$$B = (e_{11}, e_{21}, e_{31}, e_{22}, e_{32})$$

*Deoarece*

$$u(e_{11}) = e_{21},\ u(e_{21}) = e_{31},\ u(e_{31}) = 0,\ u(e_{22}) = e_{32},\ u(e_{32}) = 0$$

*Matricea lui u în raport cu baza B este*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*$M_B(u)$ =*

*Matricea de trecere de la baza canonică $B_c$ la baza B este*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

*Se verifică faptul că $CAC^{-1} = M_B(u)$.*

## 3.6. Spații normate. Spații metrice. Norma unei transformări liniare

Fie X o mulțime. Se numeşte *distanță* pe X o funcție d: $X \times X \to \mathbf{R}$ cu următoarele proprietăți:

1. $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$ pentru orice $x, y \in X$;
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ pentru orice $x, y, y \in X$.

Perechea (X, d) se numeşte *spațiu metric*.

Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K (K=**R** sau K=**C**). O *normă* pe V este o funcție p: V $\to$**R** care satisface următoarele condiții:

1. $p(x) \geq 0$ pentru orice $x \in V$;
2. $p(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;
3. $p(x + y) = p(x) + p(y)$ pentru orice x şi $y \in V$;

4. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pentru orice $\lambda \in K$ şi orice $x \in V$.

Perechea (V, p) se numeşte *spațiu normat*. În cele ce urmează vom nota $p(x) = \|x\|$ pentru orice $x \in V$ şi vom spune că V este un spațiu normat în loc de $(V, \|\cdot\|)$, atunci când norma $\|\cdot\|$ se subînțelege. Pe orice spațiu normat se poate defini o metrică (distanță) canonică *d* prin $d(x, y) = \|x - y\|$ pentru orice $x, y \in V$. Prin urmare oricărui spațiu normat i se pot asocia în mod canonic o structură metrică. Normele $p_1$ şi $p_2$ se numesc echivalente dacă şi numai dacă există $M, m > 0$ astfel încât

$$m\, p_1(x) \le p_2(x) \le M\, p_1(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Pentru a desemna faptul că $p_1$ şi $p_2$ sunt echivalente vom folosi notația $p_1 \sim p_2$.

**Exemplul 3.6.1.** 1. Considerăm spațiul vectorial $V = K^n$($K=\mathbf{R}$ sau $K=\mathbf{C}$), $n \in \mathbf{N}^*$. Se poate arăta că pe acest spațiu orice două norme sunt echivalente. Vom nota cu $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ următoarele norme uzuale pe $K^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|,\ \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,\ \|x\|_2 = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ (arătați că sunt norme echivalente).

2. Pe spațiu vectorial

$$C([a,b]) = \{f : [a, b] \to K \mid f \text{ continuă}\} (K=\mathbf{R} \text{ sau } K=\mathbf{C}),$$

se poate introduce norma

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

(verificați că sunt verificate condițiile din definiția normei).

**Definiția 3.6.2.** *Fie V şi W două spații vectoriale normate peste corpul K (K=**R** sau K=**C**). O aplicație liniară u : V → W se* *numeşte mărginită dacă există un număr real M astfel încât*

$$\|u(x)\| \le M\ \|x\| \text{ pentru orice } x \in V.$$

**Observația 3.6.3.** Mulțimea aplicațiilor liniare mărginite u : V $\to$ W formează un subspațiu vectorial a lui $L_K$(V, W) (K=**R** sau K=**C**).

**Teorema 3.6.4.** *Fie V şi W două spații vectoriale normate peste corpul K (K=**R** sau K=**C**). Pe spațiul aplicațiilor liniare şi mărginite u : V $\to$ W se poate introduce norma*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

**Demonstrație.** Fie u : V $\to$ W o aplicație liniară şi mărginită. Deoarece există un număr real M astfel încât $\|u(x)\| \le M \|x\|$ pentru orice $x \in V$, rezultă că mulțimea $\{\|u(x)\| : \|x\| = 1\}$ este mărginită superior de M. Deci $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \in \mathbf{R}$. Să arătăm că

$$\|u(x)\| \le \|u\|\ \|x\| \text{ pentru orice } x \in V.$$

Într-adevăr, pentru orice $x \in V$ nenul, avem $\left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \le \|u\|$,

iar pe de altă parte $\left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}u(x)\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|u(x)\|$.

Condițiile 1, 2 şi 4 din definiția normei sunt uşor de verificat. Rămâne de arătat proprietatea 3. Fie $u_1, u_2$: V $\to$ W două aplicații liniare mărginite. Pentru orice $x \in V$, avem

$$\begin{aligned}\|(u_1 + u_2)(x)\| &= \|u_1(x) + u_2(x)\| \le \|u_1(x)\| + \|u_2(x)\| \\ &\le \|u_1\|\ \|x\| + \|u_2\|\ \|x\| = (\|u_1\| + \|u_2\|)\ \|x\|,\end{aligned}$$

de unde, obținem $\| (u_1 + u_2)(x)\| \leq \| u_1\| + \| u_2\|$.

**Observația 3.6.5.** Fie V şi W două spații vectoriale normate peste corpul K (K=**R** sau K=**C**).

1. Fie $u : V \to W$ o aplicație liniară şi mărginită. Din demonstrația teoremei precedente rezultă că

$$\| u(x)\| \leq \| u \| \| x\| \text{ pentru orice } x \in V.$$

2. Norma introdusă (în teorema precedentă) pe spațiul aplicațiilor liniare şi mărginite $u : V \to W$ este multiplicativă, adică

$$\|u_1u_2\| \leq \|u_1\|\|u_2\|.$$

Într-adevăr, $\|u_1u_2(x)\| = \|u_1(u_2(x))\| = \|u_1\| \|u_2(x)\| \leq \|u_1\| \|u_2\| \|x\|$,

de unde $\|u_1u_2\| \leq \|u_1\|\|u_2\|$.

3. Fie $u : V \to W$ o aplicație liniară şi mărginită. Se poate arăta că

$$\| u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$$

$$= \inf \{M > 0 : \| u(x) \| \leq M\|x \| \text{ pentru orice } x\in V \}.$$

## 3.7. Exerciții

1. Să se cerceteze care dintre aplicațiile $u : V \to W$

a) $V = W = \mathbf{R}^2$, $u(x) = (x_1 + 2x_2, -x_1)$, unde $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

b) $V = W = \mathbf{R}^2$, $u(x) = (x_1^2 + x_2, -x_1)$, unde $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

c) $V = \mathbf{R}^2$, $W = \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + a, x_2)$, unde $x = (x_1, x_2)$ şi $a \in \mathbf{R}$.

d) $V = W = \{ f : [a, b] \to R : f \text{ continuă} \}$, $u(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ pentru orice $x \in [a, b]$.

e) $V = M_{n,n}(K)$, $W = K$, unde K este un corp comutativ, $u(A) = \operatorname{trace} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$.

sunt transformări liniare.

R: Se verifică axiomele din definiția transformării liniare (Definiția 3.1.1) sau condiția echivalentă din Propoziția 3.1.2. Răspunsurile sunt: a) da, b) nu ( pentru $x = (1, 0)$, $u(3x) = (9, -3) \neq 3(1,-1) = u(x)$), c) *u* este transformare liniară dacă şi numai dacă $a = 0$ (dacă *u* este transformare liniară, atunci $u(0, 0) = (0, 0, 0)$, deci $a =0$; reciproc, dacă $a = 0$ se verifică cu definiția că *u* este transformare liniară) d) da, e) da.

2. Fie K un corp comutativ şi $A \in M_{n,n}(K)$ o matrice al cărei determinat este nul. Să se arate că există o matrice $B \in M_{n,n}(K)$ nenulă astfel încât $AB = O$ (matricea nulă).

R: Considerăm endomorfismul $u: M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K)$, $u(X) =AX$ pentru orice matrice $X \in M_{n,n}(K)$. Presupunem prin absurd că oricare ar fi matricea nenulă $B \in M_{n,n}(K)$, $AB \neq O$. Presupunerea este echivalentă cu $\operatorname{Ker} u = \{O\}$, adică cu *u* injectiv. Deoarece $M_{n,n}(K)$ este un spațiu vectorial de dimensiune finită şi *u* injectiv, rezultă *u* bijectiv (conform Propoziției 3.3.6). Endomorfismul *u* fiind în particular surjectiv, rezultă că există o matrice X astfel încât $u(X) = I_n \Leftrightarrow AX = I_n$. Obținem $0 = \det(A)\det(X) = \det(AX) = \det(I_n) = 1$, ceea ce contrazice ipoteza.

3. Să se determine nucleul şi imaginea, precum şi defectul şi rangul pentru următoarele transformări liniare:

a) $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 -x_3)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$

b) $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 -x_3, x_3)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$

c) $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 -x_3, x_3+x_1)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$

d) $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, x_2 -x_1, x_1 - x_2)$, unde $x = (x_1, x_2)$

e) $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = (x_1+x_2, - x_2 -x_1, 2x_1+2x_2)$, unde $x = (x_1, x_2)$

R: a) Ker u $=\{x: u(x) = (0, 0)\} =\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1+ x_2, x_2 - x_3) = (0, 0)\}$.

Deci $x = (x_1, x_2, x_3) \in$ Ker u <=> $x_2 - x_3$ este soluție a sistemului

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 0 \\ x_2 -x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil simplu nedeterminat: luăm necunoscută secundară $x_3 = \alpha$, şi obținem $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$. Deci Ker u = $\{(-\alpha, \alpha, \alpha): \alpha \in R\}$. O bază în Ker u este dată de $B_1 = \{(-1, 1,1)\}$, deci defectul lui *u*, adică $\dim_R$(Ker u) este egal cu 1. Pentru determinarea imaginii lui *u*, Im u $=\{u(x): x \in \mathbf{R}^3\} = \{y\in \mathbf{R}^2$: există $x \in R^3$ cu $y =u(x)\}$ putem proceda ca în exemplul 3.3.13, observând că sistemul

$$\begin{cases} x_1+x_2 = y_1 \\ x_2 -x_3 = y_2 \end{cases}$$

este compatibil oricare ar fi $y_1$ şi $y_2$. Deci Im u = $\mathbf{R}^2$, şi rangul lui *u* este 2.

b) Ker u = $\{(0,0,0)\}$. Deoarece *u* este endomorfism pe un spațiu de dimensiune finită şi Ker u = $\{0_{R^3}\}$, conform Propoziției 3.3.6, *u* este bijectiv şi deci, Im u = $\mathbf{R}^3$. Defectul lui *u* este 0, iar rangul este 3.

c) Ker u = $\{(-\alpha, \alpha, \alpha): \alpha \in \mathbf{R}\}$. Pentru determinarea imaginii lui *u* putem proceda ca în exemplul 3.3.13, sau putem să ținem cont că

$$\text{Im } u = \{u(x): x \in \mathbf{R}^3\} =\{(x_1+ x_2, x_2 - x_3, x_3 + x_1) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

$$\underset{x_2-x_3=\beta}{\overset{x_1+x_2=\alpha}{=}} \{(\alpha, \beta, \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

O bază în Im u este B = $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$. Rangul lui *u* este 2 şi defectul este 0.

d) Ker u $=\{(0,0)\}$, Im u = $\{(\alpha, \beta, -\beta\}: \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Rangul este 2 şi defectul 0.

e) Ker u $=\{(\alpha,-\alpha), \alpha \in \mathbf{R}\}$, Im u $= \{(\alpha, -\alpha, 2\alpha\}: \alpha \in \mathbf{R}\}$. Defectul este 1 şi rangul este 1.

4. Fie $u : R^n \to R^n$ un endomorfism care verifică relația:

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + I = O,$$

unde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1 \in R$, I este transformarea liniară identică şi O este transformarea liniară nulă. Să se arate că *u* este automorfism.

R: Este suficient să arătăm că *u* este injectiv (vezi Propoziția 3.3.6) sau, echivalent, că Ker u $=\{0\}$. Dacă $x \in$ Ker u, atunci $u(x) = 0$, şi ca urmare $u^k(x) = 0$ pentru orice $k \geq 1$. Ținând cont de relația din ipoteză, se obține $I(x) = 0$, adică $x = 0$.

5. Fie $A, B \in M_{n,n}(\mathbf{C})$. Să se arate că
   (a) dacă AB = O (matricea nulă), atunci rang(A) + rang(B) $\leq$ n
   (b) dacă AB = E (matricea ale cărei elemente sunt toate egale cu 1), atunci rang(A) + rang(B) $\leq$ n +1

R: Considerăm că A, respectiv B sunt matricele asociate unor transformări liniare $u_1$, respectiv $u_2$ într-o bază. Ținând cont de Propoziția 3.4.5 şi Teorema 3.3.9 (inegalitatea Sylvester) rezultă că rang(AB) $\geq$ rang(A) + rang(B) - n. La punctul (a) avem rang(AB) = 0, iar la (b) rang(AB) = 1.

6. Se consideră transformarea liniară $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ care are proprietatea că $u(E_1) = (1, 8)$, $u(E_2) = (0,2)$, $u(E_3) = (1,-1)$, unde $B = \{E_1, E_2, E_3\}$ este baza canonică din $R^3$ ($E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$). Se cere să determine matricea lui *u* în perechea de baze

$$B_1 = \{(-1,0,0), (1,-1,0), (-1, 1, -1)\}$$

$$B_2 = \{(0,1), (1,2)\}$$

R: Conform Teoremei 3.1.6 există o unică transformare liniară *u* care îndeplineşte condiţiile. Matricea lui *u* în perechea de baze canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matricile L, de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^3$ la baza $B_1$, şi respectiv M, de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^2$ la baza $B_2$, sunt

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matricea lui *u* în perechea de baza $B_1$, $B_2$ este

$$LAM^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Să se determine transformările liniare u : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ care satisfac condiţiile $u(v_1) = (9, -9, 3)$, $u(v_2) = (-7, 5, 3)$, $u(v_3) = (8, -11, 4)$, unde $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$. Să se calculeze u(v) , unde v = (1, 2, 3).

R: Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbf{R}^3$. Atunci conform Teoremei 3.1.6 există o unică transformare liniară *u* care îndeplineşte condiţiile. Determinăm matricea lui *u* în baza canonică din $\mathbf{R}^3$: B = $\{E_1, E_2, E_3\}$, unde $E_1$ = (1, 0, 0), $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$. Ținând cont că dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, atunci $x = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$ şi $u(x) = x_1u(E_1) + x_2u(E_2) + x_3u(E_3)$, obținem sistemul

$$\begin{aligned} u(E_1) + u(E_2) &= 9E_1 - 9E_2 + 3E_3 \\ u(E_1) - u(E_2) &= -7E_1 + 5E_2 + 3E_3 \quad \Leftrightarrow \\ u(E_1) + u(E_2) + u(E_3) &= -8E_1 - 11E_2 + 4E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u(E_1) = E_1 - 2E_2 + 3E_3 \\ u(E_2) = 8E_1 - 7E_2 \\ u(E_3) = -E_1 - 2E_2 + E_3 \end{cases}$$

Deci matricea lui *u* în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Deci dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, atunci

$$u(x) = [x_1, x_2, x_3]\, A = (x_1 + 8x_2 - x_3, -2x_1 - 7x_2 - 2x_3, 3x_1 + x_3).$$

Ca urmare, $u(v) = (14, -22, 6)$ pentru $v = (1,2,3)$.

8. Se consideră bazele $B_1 = \{(-2, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ şi $B_2 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 0)\}$ în $\mathbf{R}^3$, şi transformările liniare $u_1, u_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Dacă matricea lui $u_1$ în baza $B_1$ este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui $u_2$ în baza $B_2$ este

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

să se determine $u_1$, $u_2$, $u_1 + u_2$, $u_2u_1$, $u_2^{-1}$.

R: Matricea de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^3$ la baza $B_1$ este

$$C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de la baza canonică din $\mathbf{R}^3$ la baza $B_2$ este

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dacă $L_1$, respectiv $L_2$ sunt matricele lui $u_1$, respectiv $u_2$ în baza canonică, atunci $A_1 = C_1L_1C_1^{-1}$, respectiv $A_2 = C_2L_2C_2^{-1}$. În consecință,

$$L_1 = C_1^{-1}A_1C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -22 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui $u_2$ în baza canonică este

$$L_2 = C_2^{-1}A_2C_2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 13 \\ -14 & 3 & -21 \\ -9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Deci, pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$u_1(x) = (2x_1+3x_2-22x_3,\ x_1+5x_2+11x_3,\ x_1+4x_2-x_3)$

$u_2(x) = (10x_1-14x_2-9x_3,\ -x_1+3x_2,\ 13x_1-21x_2-12x_3)$.

Matricea lui $u_1 + u_2$ în baza canonică fiind

$$L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 14 \\ -11 & 8 & -17 \\ -31 & 11 & -13 \end{pmatrix}$$

rezultă că pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$, $(u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x) =$

$=( 12x_1-11x_2-31x_3,\ 8x_2+11x_3,\ 14x_1-17x_2-13x_3)$.

Deoarece matricea lui $u_2u_1$ în baza canonică este

$$L_1L_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ -76 & 12 & -114 \\ -365 & 55 & -505 \end{pmatrix}$$

rezultă că pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$, $(u_2u_1)(x) = u_2(u_1(x)) =$

$=( -3x_1 - 76x_2 - 365x_3,\ x_1 + 12x_2 + 55x_3,\ - 7x_1 - 114x_2 - 505x_3)$.

Matricea lui $u_2^{-1}$ în baza canonică fiind

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 6/5 & 2/5 & 3/5 \\ -7/10 & 1/10 & -14/15 \\ -9/10 & -3/10 & -8/15 \end{pmatrix}$$

rezultă că pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$(u_2^{-1})(x) = (\frac{6}{5}x_1-\frac{7}{10}x_2-\frac{9}{10}x_3,\ \frac{2}{5}x_1+\frac{1}{10}x_2-\frac{3}{10}x_3,\ \frac{3}{5}x_1-\frac{14}{15}x_2-\frac{8}{15}x_3).$$

9. Să se verifice care dintre endomorfismele următoare $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este proiecție, involuție sau endomorfism nilpotent:

(a) $u(x) = (-x_1-x_2-x_3,\ 2x_1+2x_2+x_3,\ x_3)$

(b) $u(x) = (-x_1,\ -x_2-2x_3,\ x_3)$

(c) $u(x) = (3x_1+2x_2+2x_3,\ -4x_1-3x_2-4x_3,\ x_3)$

(d) $u(x) = (x_1+x_2+x_3,\ -x_1-x_2-x_3,\ 0)$

pentru $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

R: (a) proiecție ($u^2 = u$); (b) involuție ($u^2 = I$); (c) involuție ($u^2 = I$); (d) endomorfism nilpotent ($u^2 = O$);

10. Să se demonstreze că endomorfismul $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definit prin $u(x) = (x_1+x_2+x_3,\ -3x_1-2x-2x_3,\ 2x_1+x_2+x_3)$ pentru $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, este

endomorfism nilpotent de indice 3 şi să se determine o bază în care matricea asociată lui *u* să aibă forma $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}$.

R: Matricea asociată lui u în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rezultă că $u^3 = O$ şi $u^2 \neq 0$. Deci, *u* este endomorfism nilpotent de indice 3. Considerăm vectorul x = (1,0,0). Avem u(x) = [1,0,0] A =(1, -3,2) şi $u^2(x) = [1,0,0]A^2 = (0,-1,1) \neq (0,0,0)$. Conform Propoziției 3.5.14

$$B = \{x, u(x), u^2(x)\}$$

este o mulțime liniar independentă în $\mathbf{R}^3$, deci este o bază. În această bază matricea lui *u* este $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza canonică la baza B este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se verifică faptul că

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$