CAPITOLUL 5

SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE/UNITARE

5.1. Produs scalar. Spații euclidiene şi spații unitare-definiție

Definiția 5.1.1. *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**). Se numeşte produs scalar pe V o aplicație*

$$\varphi : V \times V \to K$$

care are următoarele proprietăți:

1. $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ *pentru orice* $x, y, z \in H$.
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$ *pentru orice* $\lambda \in K$ *şi* $x \in H$
3. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y,x)}$ *pentru orice* $x, y \in H$.
4. $\varphi(x, x) > 0$ *pentru orice* $x \neq 0$.

Vom nota $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle$ pentru orice $x, y \in V$. Perechea $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se numeşte *spațiu prehilbertian real* dacă K= **R**, respectiv *complex* dacă K= **C**. Dacă V un spațiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**) înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, atunci:

1. Două elemente x şi y din V se numesc *ortogonale* (şi se foloseşte notația $x \perp y$) dacă $\langle x, y\rangle = 0$.

2. Pentru $A \subset V$ şi $x\in V$, x se spune *ortogonal* pe A şi se notează $x\perp A$, dacă $\langle x, y\rangle=0$ pentru orice $y\in A$.

3. Două submulțimi $A, B \subset V$ sunt *ortogonale* şi se notează $A \perp B$, dacă $\langle x, y\rangle=0$ pentru orice $x\in A$ şi orice $y\in B$.

4. O familie $(x_i)_i$ de elemente ale lui V se numeşte *sistem ortogonal* sau familie ortogonală dacă $<x_i, x_j> =0$ pentru orice $i \neq j$.

5. Un sistem ortogonal $(x_i)_i$ se numeşte *ortonormat* dacă $\|x_i\| = 1$ pentru orice i.

Un spațiu vectorial real (respectiv, complex), finit dimensionat, dotat cu un produs scalar se numeşte *spațiu vectorial euclidian* (respectiv, *unitar*).

Observația 5.1.2. Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K=**R** sau K=**C**) înzestrat cu un produs scalar $< \cdot, \cdot >$.

1. $<0, y> = <x, 0> = 0$ pentru orice $x, y \in V$ (într-adevăr, luând în proprietatea 2 (din definiția produsului scalar) $\lambda = 0$, obținem $<0, y > = 0$, şi ținând cont de 3 rezultă $< x, 0 > = \overline{< 0, x >} = 0$)

2. $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha < x, z > + \beta < x, z >$ pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y, z \in V$ (rezultă din proprietățile 1 şi 2 din definiția produsului scalar) .

3. $<x, \alpha y + \beta z> = \bar{\alpha} < x, y > + \bar{\beta} < x, z >$ pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y, z \in V$. Într-adevăr,

$$<x, \alpha y + \beta z> = \overline{< \alpha y + \beta z, x >} = \overline{\alpha < y, x > + \beta < z, x >}$$

$$= \bar{\alpha}\overline{< y, x >} + \bar{\beta}\overline{< z, x >} = \bar{\alpha}<x, y> + \bar{\beta}<x, z>.$$

4. Dacă K = **R**, atunci $<x, y> = <y, x>$ pentru orice $x, y \in V$. În acest caz, $<x, \alpha y + \beta z> = \alpha < x, y > + \beta < x, z >$ pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y, z \in V$.

Exemplul 5.1.3. *1. Spațiul vectorial* $\boldsymbol{R}^n$ *peste corpul* **R** *poate fi înzestrat cu produsul scalar (numit produsul scalar standard sau canonic)*

$$< x, y > = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

2. În spațiul vectorial $\boldsymbol{C}^n$ *peste corpul* $\boldsymbol{C}$ *se poate introduce produsul scalar (numit produsul scalar standard sau canonic)*

$$< x, y > = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

3. În spațiul vectorial $C([a, b]) = \{f : [a, b] \to R \mid f \text{ continuă}\}$ *peste corpul* $\boldsymbol{R}$ *se poate introduce produsul scalar*

$$<f, g> = \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

4. În spațiul $M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ *peste corpul* $\boldsymbol{R}$ *se poate introduce produsul scalar*

$$<A, B> = \text{Trace}(B^t A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ji} ,$$

unde $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ *şi* $B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le n}$.

5. În spațiul $M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ *peste corpul* $\boldsymbol{C}$ *se poate introduce produsul scalar*

$$<A, B> = \text{Trace}(\overline{B}^t A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{b}_{ji} a_{ji} ,$$

unde $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *şi* $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Definiția 5.1.4. *Fie V şi W două spații vectoriale peste corpul K (K =* $\boldsymbol{R}$ *sau K=* $\boldsymbol{C}$*) înzestrate cu produse scalare. V şi W se numesc izomorfe dacă există o transformare liniară bijectivă* $\varphi : V \to W$ *care în plus, satisface condiția*

$$<\varphi(x), \varphi(y)> = <x, y>$$

pentru orice $x, y \in V$.

Se poate arăta (la fel ca în cazul spațiilor vectoriale de dimensiune finită) că spațiile euclidiene (respectiv, unitare) cu aceeaşi dimensiune sunt izomorfe între ele.

Definiția 5.1.5. *Fie V un spațiu vectorial prehilbertian real sau complex şi fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o familie de vectori din V. Determinantul*

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \ldots \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \ldots \langle x_2, x_n\rangle \\ \ldots & \ldots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle \ldots \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

se numeşte determinant Gram format cu vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Observația 5.1.6. Fie V un spațiu vectorial prehibertian real sau complex şi fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o familie de vectori din V. Ținând cont de proprietățile determinanților obținem următoarele proprietăți ale determinanților Gram:

1. $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Gamma(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, unde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ este o permutare a $(1, 2, \ldots, n)$.

2. $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, \alpha x_k, \ldots, x_n) = \alpha^2\, \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ pentru orice $\alpha \in K$.

Propoziția 5.1.7. *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K =* ***R*** *sau K =* ***C****) înzestrat cu un produs scalar şi fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o familie de vectori din V. Familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă dacă şi numai dacă determinantul Gram $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este nenul.*

Demonstrație. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ cu proprietatea că

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

Pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $<\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, x_j> = 0 <=>$

$$\alpha_1 <x_1, x_j> + \alpha_2 <x_2, x_j> + \dots + \alpha_n <x_n, x_j> = 0.$$

Obținem astfel un sistem liniar şi omogen cu *n* necunoscute (α_1, α_2, .., α_n). Acest sistem admite doar soluția banală dacă şi numai dacă determinantul său este nenul. Dar acest determinant este tocmai determinantul Gram $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Propoziția 5.1.8. *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K =* ***R*** *sau K =*__*C*__*) înzestrat cu un produs scalar. Fie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o familie de vectori din V şi fie $A = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice cu elemente din K. Dacă $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ pentru orice i = 1,.., n, atunci*

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = |det(A)|^2\, \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

unde $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (respectiv, $\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)$) este determinantul Gram format cu vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n$ (respectiv, $y_1, y_2, \dots, y_n$).

Demonstrație. Să considerăm matricele

$$M_x = (<x_i, x_j>)_{1\le i,j\le n} \text{ şi } M_y = (<y_i, y_j>)_{1\le i,j\le n}.$$

Deoarece $<y_i, y_j> = \sum_{k,p=1}^{n} \alpha_{ik} \overline{\alpha_{jp}} <x_k, x_p>$, rezultă că $M_y = AM_x\overline{A}^t$. Ca urmare $\det(M_y) = \det(A)\det(M_x)\overline{\det A} = |\det(A)|^2 \det(M_x)$, ceea ce este echivalent cu $\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = |\det(A)|^2\, \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

5.2. Norma indusă de un produs scalar

Teorema 5.2.1. (***inegalitatea Schwarz***). *Fie V un spațiu vectorial peste corpul K (K =* ***R*** *sau K =* ***C****) înzestrat cu un produs scalar $<\cdot, \cdot>$. Pentru orice x, y∈V,*

$$|<x, y>|^2 \le <x, x><y, y>.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă vectorii x şi y sunt liniar dependenți.

Demonstrație. Dacă $<x, y> = 0$, inegalitatea este evidentă, deci putem presupune $<x, y> \neq 0$ (ceea ce implică $x \neq 0$ şi $y \neq 0$) . Pentru orice $\lambda \in K$, avem $<\lambda x + y, \lambda x + y> \ge 0$ adică

$$|\lambda|^2 <x, x> + \lambda <x, y> + \overline{\lambda}<y, x> + <y, y> \ge 0.$$

Considerând $\lambda = t \dfrac{|<x,y>|}{<x,y>}$, $t \in R$ obținem

$$t^2 <x, x> + 2t\,|<x, y>| + <y, y> \ge 0.$$

Cum inegalitatea de mai sus are loc pentru orice $t \in R$, rezultă că discriminantul $\Delta \le 0$, unde $\Delta = 4|<x, y>|^2 - 4<x, x><y, y>$. Deci

$$|<x, y>|^2 \le <x, x><y, y>.$$

Să presupunem că avem egalitate: $|<x, y>|^2 = <x, x><y, y>$.

Atunci discriminantul $\Delta = 4|<x, y>|^2 - 4<x, x><y, y> = 0$. Ca urmare, există t_0 astfel încât $t_0^2 <x, x> + 2t_0 |<x, y>| + <y, y> = 0$. Considerând $\lambda_0 = t_0 \dfrac{|<x,y>|}{<x,y>}$ obținem $|\lambda_0|^2 <x, x> + \lambda_0<x, y> + \overline{\lambda_0}<y, x> + <y, y> \ge 0$

adică $<\lambda_0 x + y, \lambda_0 x + y> = 0$.

De unde rezultă că $\lambda_0 x + y = 0$, adică x şi y sunt liniar dependenți.

Reciproc, dacă x şi y sunt liniar dependenţi, atunci există $\alpha \in K$ astfel încât $y = \alpha x$ şi deci $<x, y> = <x, \alpha x> = \overline{\alpha}<x, x>$.

În consecinţă, $|<x, y>|^2 = |\alpha|^2|<x, x>|^2 = <x, x><\alpha x, \alpha x> = <x, x><y, y>$.

Teorema 5.2.2. *Orice spaţiu prehilbertian V peste corpul K (K =**R** sau K = **C**) poate fi înzestrat cu o normă:*

$$\| x \| = \sqrt{<x,x>} \text{ pentru orice } x \in V.$$

Demonstraţie. Verificăm faptul că $\| \cdot \|$ îndeplineşte proprietăţile unei norme. Evident $\| x \| \geq 0$ pentru orice $x \in V$, şi $\| x \| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$. Fie $\alpha \in K$ şi $x \in V$, $\| \alpha x \|^2 = <\alpha x, \alpha x> = \alpha\, \overline{\alpha}<x,x> = |\alpha|^2\, \|x\|^2$.

Fie $x, y \in V$. Avem $\| x + y \|^2 = <x + y, x + y> = <x, x> + <x, y> + <y, x> + <y, y> = <x, x> + 2\mathrm{Re}<x, y> + <y, y> \leq <x, x> + 2|<x, y>| + <y, y> \leq <x, x> + 2\sqrt{<x,x><y,y>} + <y, y> = \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2,$$

de unde obţinem $\| x + y \| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inegalitatea Minkowski*).

Observaţia 5.2.3. 1. Dacă V este un spaţiu prehilbertian şi $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $<\cdot, \cdot>$ de pe V ($\| x \| = \sqrt{<x,x>}$), atunci inegalitatea Schwarz se scrie

$$|<x, y>| \leq \|x\|\,\|y\|$$

pentru orice $x, y \in V$.

2. Orice spaţiu prehilbertian V este un spaţiu metric, putând fi înzestrat cu *distanţa* definită prin

$$d(x, y) = \| x - y\| = \sqrt{<x-y, x-y>}.$$

pentru orice $x, y \in V$. În virtutea acestei proprietăţi se poate vorbi despre şiruri convergente şi şiruri fundamentale (sau Cauchy) în V. Reamintim că şirul $(x_n)_n$ din V este convergent dacă există $x \in V$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea că

$$d(x, x_n) < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon$$

(sau $\| x - x_n\| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$).

Şirul $(x_n)_n$ din V este fundamental (sau Cauchy) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea că

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon \text{ pentru orice } m, n \geq n_\varepsilon$$

(sau $\| x_m - x_n\| < \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$).

Spațiul prehilbertian V (peste corpul **R** sau **C**) se numeşte *spațiu Hilbert* (peste corpul **R** sau **C**) dacă orice şir fundamental din V este şir convergent în V.

Definiția 5.2.4. *Fie V un spațiu prehilbertian peste corpul **R** şi fie $x, y \in V - \{0\}$. Numărul real $\theta \in [0, \pi]$ definit prin*

$$\cos\theta = \frac{<x, y>}{\|x\|\|y\|}$$

se numeşte unghiul dintre vectorii x şi y.

Teorema 5.2.5. *Fie V un spațiu vectorial normat peste corpul K (K =**R** sau K= **C**) . Norma $\|\cdot\|$ de pe V provine dintr-un produs scalar ($\|\cdot\| = \sqrt{<\cdot,\cdot>}$) dacă şi numai dacă este satisfăcută următoarea egalitate numită identitatea paralelogramului:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oricare ar fi $x, y \in V$.

Demonstrație. Să presupunem că norma $\|\cdot\|$ de pe V provine dintr-un produs scalar ($\|\cdot\| = \sqrt{<\cdot,\cdot>}$). Atunci $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = <x+y, x+y> + <x-y, x-y> = \| x \|^2 + <x, y> + <y, x> + \| y \|^2 + \| x \|^2 - <x, y> - <y, x> + \| y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$.

Să presupunem acum că norma spațiului vectorial V satisface identitatea paralelogramului. Vom demonstra că următoarele aplicații

$<x, y> = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$ dacă K = **R** şi

$<x, y> = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 + i\| x + i y \|^2 - i\| x - iy \|^2)$ dacă K = **C**

reprezintă un produs scalar pe V şi că norma $\|\cdot\|$ provine din acest produs scalar. Vom considera cazul K = **C** (cazul K =**R** fiind mai simplu). Este evident că $<x, y> = \overline{<y, x>}$ pentru orice x, y$\in$ V. Să verificăm faptul că

$$<x + y, z> = <x, z> + <y, z>$$

pentru orice x, y, z $\in$ V. Observăm că

$$\mathrm{Re} <x, z> = \frac{1}{4}(\| x + z \|^2 - \| x - z \|^2) \text{ şi } \mathrm{Im} <x, z> = \mathrm{Re} <x, iz>$$

pentru orice x, z $\in$ V. Pentru orice x, y, z $\in$ V avem

$$4\,\mathrm{Re} <x + y, z> + 4\,\mathrm{Re} <x - y, z> =$$
$$= \| x + y + z \|^2 - \| x + y - z \|^2 + \| x - y + z \|^2 - \| x - y - z \|^2$$
$$= \| x + y + z \|^2 + \| x - y + z \|^2 - (\| x + y - z \|^2 + \| x - y - z \|^2)$$
$$= 2(\| x + z \|^2 + \| y \|^2) - 2(\| x - z \|^2 + \| y \|^2)$$
$$= 2(\| x + z \|^2 - \| x - z \|^2)$$
$$= 8\,\mathrm{Re} <x, z> \qquad (1)$$

Luând în relația (1) x = y obținem,

$$\mathrm{Re} <2x, z> = 2\mathrm{Re} <x, z> \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă Re $<x + y, z>$ + Re $<x - y, z>$ = Re $<2x, z>$,

pentru orice x, y, z $\in$ V, sau echivalent ($x + y \to x$, $x - y \to y$),

$$\mathrm{Re} <x, z> + \mathrm{Re} <y, z> = \mathrm{Re} <x + y, z>,$$

pentru orice x, y, z $\in$ V. Prin urmare,

$$\begin{aligned} <x, z> + <y, z> &= \mathrm{Re} <x, z> + \mathrm{Re} <y, z> + i\,\mathrm{Im} <x, z> + i\,\mathrm{Im} <y, z> \\ &= \mathrm{Re} <x + y, z> + i(\mathrm{Re} <x, iz> + \mathrm{Re} <y, iz>) \\ &= \mathrm{Re} <x + y, z> + i\,\mathrm{Re} <x + y, iz> \\ &= \mathrm{Re} <x + y, z> + i\,\mathrm{Im} <x + y, z> \\ &= <x + y, z>, \end{aligned}$$

pentru orice x, y, z $\in$ V. Să arătăm că $<\alpha x, y> = \alpha<x, y>$ pentru orice $\alpha\in$ K şi orice x, y $\in$ V. Se poate arăta uşor prin inducție că

$$<\sum_{j=1}^{n} x_j, y> = \sum_{j=1}^{n} <x_j, y>.$$

Luând $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, obținem $<nx, y> = n<x, y>$ pentru orice x, y $\in$ V şi $n\in\mathbf{N}$. Pe de altă parte, $<-nx, y> = -<nx, y> = -n<x, y>$ pentru orice x, y $\in$ V şi $n\in\mathbf{N}$. Deci $< kx, y> = k<x, y>$ pentru orice x, y $\in$ V şi $k\in\mathbf{Z}$. Dacă $m\in\mathbf{Z}$, $m \neq 0$, atunci

$$<\frac{1}{m}x, y> = \frac{1}{m}m<\frac{1}{m}x, y> = \frac{1}{m}<m\frac{1}{m}x, y> = \frac{1}{m}<x, y>,$$

şi ca urmare, $<\frac{n}{m}x, y> = <n\frac{1}{m}x, y> = n<\frac{1}{m}x, y> = n\frac{1}{m}<x, y> = \frac{n}{m}<x, y>$

pentru orice m, n $\in$ $\mathbf{Z}$, $m \neq 0$, sau echivalent

$$<rx, y> = r<x, y>$$

pentru orice $r\in\mathbf{Q}$. Dacă $\alpha \in$ R, atunci există un şir de numere raționale $(r_n)_n$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Avem

$$| <\alpha x, y> - \alpha<x, y>| \leq | <\alpha x, y> - r_n<x, y>| +| r_n<x, y> - \alpha<x, y>|$$

$$=| <\alpha x, y> - < r_n x, y>| +| (r_n - \alpha)<x, y>|$$
$$=| <(\alpha- r_n)x, y>| +|(r_n - \alpha)| |<x, y>|$$
$$\le ||(\alpha- r_n)x|| ||y|| +|(r_n - \alpha)| |<x, y>|$$
$$\le |(\alpha- r_n)| ||x|| ||y|| +|(r_n - \alpha)| |<x, y>|$$

Trecând la limită după *n* obținem

$$| <\alpha x, y> - \alpha<x, y>| \le 0$$

adică $<\alpha x, y> = \alpha<x, y>$.

Din definiția lui $<x, y>$ rezultă că $<ix, y> = i<x, y>$, şi în consecință dacă $\alpha = a + ib$ ($a, b\in R$), atunci

$$<\alpha x, y> = <(a + ib)x, y> = <ax + ibx, y> =<ax , y>+<ibx , y>$$
$$=<ax , y>+i<bx , y> =a<x , y>+ib<x , y>$$
$$=(a + ib) <x, y> = \alpha<x, y>.$$

Pentru orice $x \in V$ avem $<x, x> = \frac{1}{4}(|| 2x ||^2 + i|| x +i x ||^2 - i|| x - ix ||^2)$

$$= \frac{1}{4}(4|| x ||^2 + i|1 +i|^2 || x ||^2 - i |1-i|^2 || x ||^2) = ||x||^2.$$

Deci $<x, x> > 0$ pentru orice $x \ne 0$, iar norma $|| \cdot||$ provine din produsul scalar $<\cdot, \cdot>$.

5.3. Baze ortonormate

Propoziția 5.3.1. *Fie V un spațiu prehilbertian (real sau complex). Orice sistem ortogonal $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de vectori nenuli din V este liniar independent.*

Demonstrație. Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

Pentru orice $1 \le j \le n$, avem $<\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, x_j> = 0$ adică $\alpha_1 <x_1, x_j> + \alpha_2 <x_2, x_j> + \ldots + \alpha_n < x_n, x_j> = 0$. Din condiția de ortogonalitate deducem că $\alpha_j <x_j, x_j> = 0$. Cum $x_j \neq 0$, rezultă că $<x_j, x_j> \neq 0$, şi deci $\alpha_j = 0$ pentru orice $1 \le j \le n$.

Propoziția 5.3.2. (***inegalitatea Bessel***). *Fie V un spațiu prehilbertian (real sau complex) şi fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un sistem ortonormat de vectori din V. Atunci pentru orice $x \in V$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| < x, x_i > \right|^2 \le \| x \|^2$$

şi vectorul $y = x - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i$ este ortogonal pe fiecare vector x_i, $1 \le i \le n$.

Demonstrație. Avem

$$0 \le <y, y> = < x - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i , x - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i >$$

$$= <x, x> - <x, \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i > - < \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i , x> +$$

$$+ < \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i , \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i >$$

$$= <x, x> - \sum_{i=1}^{n} \overline{< x, x_i >} <x, x_i> - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > <x_i, x> +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < x, x_i > \overline{< x, x_j >} <x_i, x_j>$$

$$= <x, x> - \sum_{i=1}^{n} \left| < x, x_i > \right|^2 - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > \overline{< x, x_i >} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} < x, x_i > \overline{< x, x_i >} = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} \left| < x, x_i > \right|^2 .$$

Deci

$$\| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} \left| < x, x_i > \right|^2 \geq 0.$$

Pentru orice $1 \leq j \leq n$, avem

$$<y, x_j> = < x - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i , x_j > = < x, x_i > - < \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i , x_j >$$

$$= < x, x_i > - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > < x_i, x_j > = < x, x_i > - < x, x_j > = 0,$$

deci, y este ortogonal pe x_j.

Teorema 5.3.3. *Fie V un spaţiu euclidian sau unitar şi fie $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un sistem ortonormat de vectori din V. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. S este maximal relativ la incluziune (adică nu este inclus în nici un alt sistem ortonormat).

2. Din $< x, x_i > = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, rezultă $x = 0$.

3. S este un sistem de generatori pentru V.

4. Pentru orice $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i$.

*5. Pentru orice $x, y \in V$, $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > < x_i, y >$ (**identitatea lui Parseval**).*

6. Pentru orice $x \in V$, $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| < x, x_i > \right|^2$.

Demonstraţie. 1 => 2. Presupunem prin absurd că există $x \neq 0$, astfel încât $<x, x_i> = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. Atunci mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n,$

$\frac{1}{\|x\|}x\}$ este un sistem ortonormat care conține pe S, ceea ce contrazice maximalitatea lui S.

2 => 3. Presupunem prin absurd că există $x \in V$ care să nu aparțină spațiului generat de S. Atunci $y = x - \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i \neq 0$. Din propoziția precedentă rezultă că y este ortogonal pe x_i pentru orice $1 \le i \le n$. Din $<y, x_i> = 0$ pentru orice $1 \le i \le n$, rezultă $y = 0$, contradicție.

3 => 4. Deoarece S este sistem de generatori pentru V, rezultă că pentru orice $x \in V$, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Pentru orice $1 \le j \le n$, avem $<x, x_j> = <\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_j> = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i <x_i, x_j> = \alpha_j$.

Deci $x = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i$.

4 => 5. Pentru $x = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i$ şi $y = \sum_{i=1}^{n} < y, x_i > x_i$ avem,

$$<x, y> = <\sum_{i=1}^{n} < x, x_i > x_i, \sum_{i=1}^{n} < y, x_i > x_i> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} < x, x_i > \overline{< y, x_j >} <x_i, x_j>$$

$$= \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > \overline{< y, x_i >} = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i >< x_i, y >.$$

5 => 6. Pentru orice $x \in V$,

$$\| x \|^2 = <x, x> = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i >< x_i, x > = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i > \overline{< x, x_i >} = \sum_{i=1}^{n} |< x, x_i >|^2 .$$

6 => 1. Presupunem că S nu este maximal. Atunci există $x_0 \in V$ cu $\| x_0 \| = 1$ astfel încât $< x_0, x_i> = 0$ pentru orice $1 \le i \le n$. Avem

$\| x_0 \|^2 = = \sum_{i=1}^{n} |< x, x_i >|^2 = 0$ şi obținem o contradicție.

Definiția 5.3.4. *O bază $\{e_i\}_{i\in I}$ a spațiului prehilbertian V se numeşte bază ortogonală dacă este sistem ortogonal (adică dacă $< e_i, e_j> = 0$ pentru orice $i \neq j$). Dacă, în plus, $\|e_i\| =1$ pentru orice $i \in I$, atunci baza $\{e_i\}_{i\in I}$ se numeşte bază ortonormată.*

Propoziția 5.3.5. *Fie V un spațiu euclidian. Fie $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ două baze ortonormate în V şi fie A matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2. Atunci A este o matrice ortogonală (adică $AA^t = A^tA = I_n$).*

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 şi fie $A^t = (a^t_{ij})_{1\le i,j\le n}$ transpusa matricei A ($a^t_{ij} = a_{ji}$). Pentru orice $1 \le i, j \le n$, avem

$$<f_i, f_j> = <\sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k\ ,\ \sum_{p=1}^{n} a_{jp}e_p> = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{ik}a_{jp}<e_k, e_p> = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a^t_{kj}$$

Pe de altă parte, $<f_i, f_j> = 0$ dacă $i \neq j$ şi $<f_i, f_j> = 1$ dacă $i = j$. Deci $AA^t = I_n$(ca urmare, şi $A^tA = I_n$).

Propoziția 5.3.6. *Fie V un spațiu unitar. Fie $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ două baze ortonormate în V şi fie A matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2. Atunci A este o matrice unitară (adică $A\,\overline{A}^t = \overline{A}^tA = I_n$).*

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 şi fie $\overline{A}^t = (a^*_{ij})_{1\le i,j\le n}$ adjuncta matricei A ($a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}$ pentru orice $1 \le i, j \le n$). Atunci pentru orice $1 \le i, j \le n$, avem

$$<f_i, f_j> = <\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k , \sum_{p=1}^{n} a_{jp} e_p > = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{ik} \overline{a}_{jp} <e_k, e_p> = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overline{a}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^{*}_{kj}$$

Cum $<f_i, f_j> = 0$ dacă $i \neq j$ şi $<f_i, f_j> = 1$ dacă $i = j$, rezultă că $A\ \overline{A}^t = I_n$(ca urmare, şi $\overline{A}^t A = I_n$).

Teorema 5.3.7. ***(procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt)*** *Fie V un spațiu euclidian sau unitar şi fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază în V. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ în V astfel încât pentru orice $1 \leq k \leq n$, sistemele de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ şi $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ generează acelaşi subspațiu.*

Demonstrație. Vom construi mai întâi o bază ortonormală $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ în V astfel încât pentru orice $1 \leq k \leq n$, sistemele de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ şi $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ generează acelaşi subspațiu. Baza cu proprietățile din enunțul teoremei se obține din $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ definind

$$e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq n.$$

Luăm

$$f_i = v_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} f_j , \ 1 \leq i \leq n,$$

şi vom determina scalarii α_{ij} ($2 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq i - 1$) din condițiile $<f_i, f_j> = 0$, $i \neq j$. Folosim inducția după k. Pentru $k = 1$, avem $f_1 = v_1 \neq 0$, şi deci $\{f_1\}$ şi $\{e_1\}$ generează acelaşi subspațiu. Pentru $k = 2$, $f_2 = v_2 + \alpha_{21} f_1$. Condiția $<f_2, f_1> = 0$ conduce la

$$\alpha_{21} = - \frac{<v_2, f_1>}{<f_1, f_1>}.$$

Cum $f_1 = v_1$ şi $f_2 = v_2 + \alpha_{21}f_1$, rezultă că f_1 şi f_2 aparţin spaţiului generat de $\{v_1, v_2\}$. Deci spaţiul generat de $\{f_1, f_2\}$ este conţinut în spaţiului generat de $\{v_1, v_2\}$. Reciproc, deoarece $v_1 = f_1$ şi $v_2 = f_2 - \alpha_{21}f_1$, spaţiul generat de $\{v_1, v_2\}$ este conţinut în spaţiului generat de $\{f_1, f_2\}$. Să presupunem că am construit vectorii $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ortogonali doi câte doi şi că, pentru orice $1 \le i \le k$, sistemele de vectori $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_i\}$ generează acelaşi subspaţiu. Avem

$$f_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+1,j} f_j ,$$

iar relaţiile $<f_{k+1}, f_i> = 0$, pentru orice $1 \le i \le k$, sunt echivalente cu

$$\alpha_{k+1,i} = - \frac{< v_{k+1}, f_i >}{< f_i, f_i >},\ 1 \le i \le k.$$

Numitorul $<f_i, f_i>$ este nenul pentru $1 \le i \le k$. În caz contrar, spaţiul generat de vectori $\{f_1, f_2, \ldots, f_i\}$ este egal cu $\{f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}\}$, şi din ipoteza de inducţie rezultă că $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ şi $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ generează acelaşi subspaţiu. Deci v_i se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$, ceea ce contrazice liniar independenţa vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Deoarece $f_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+1,j} f_j$ şi spaţiile generate de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ coincid, rezultă că spaţiul generat de $\{f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}\}$ este conţinut în spaţiul generat de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}\}$. Incluziunea inversă se obţine ţinând cont că $v_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+1,j} f_j$ şi că spaţiile generate de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ coincid.

În consecință , sistemul de vectori $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ generează pe V şi este liniar independent fiind format din vectori ortogonali. Deci $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este o bază ortogonală a lui V. Ca urmare, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde

$$e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i \text{ pentru orice } 1 \le i \le n,$$

este o bază ortonormată a lui V cu proprietatea că pentru orice $1 \le k \le n$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ generează acelaşi subspațiu.

Exemplul 5.3.8. *Fie spațiul vectorial* $\boldsymbol{R}^4$ *înzestrat cu produsul scalar canonic (standard):*

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \quad \textit{pentru } x = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Fie $B = \{v_1, v_2, v_3, v_3\}$, *unde* $v_1 = (-1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, -5, -3)$, $v_3 = (-3, 2, 8, 7)$, $v_4 = (0, -1, 1, 0)$. *Vom aplica bazei B procedeul de ortogonalizare Gram- Schmidt (ca în demonstrația teoremei precedente). Avem*

$$f_1 = v_1 = (-1, 2, 2, 1),\ f_2 = v_2 + \alpha_{21} f_1$$

unde α_{21} *se determină punând condiția ca* $<f_2, f_1> = 0$:

$$\alpha_{21} = -\frac{<v_2, f_1>}{<f_1, f_1>} = -\frac{-10}{10} = 1.$$

Deci $f_2 = v_2 + f_1 = (-2, 3, -3, -2)$. *Mai departe,* $f_3 = v_3 + \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2$, *unde* α_{31} *şi* α_{32} *sunt determinate de condițiile* $<f_3, f_i> = 0$, $i = 1,2$:

$$\alpha_{3i} = -\frac{<v_3, f_i>}{<f_i, f_i>},\quad i = 1,2.$$

Efectuând calculele obținem $\alpha_{31} = -\dfrac{<v_3, f_1>}{<f_1, f_1>} = -\dfrac{30}{10} = -3$

$$\alpha_{32} = -\frac{<v_3, f_2>}{<f_2, f_2>} = -\frac{-26}{26} = 1 \text{ şi } f_3 = v_3 - 3f_1 + f_2 = (-2, -1, -1, 2).$$

Ultimul vector din baza ortogonală este $f_4 = v_4 + \alpha_{41}f_1 + \alpha_{42}f_2 + \alpha_{43}f_3$, *unde* α_{4i} *sunt determinate de condițiile* $<f_4, f_i> = 0,\ i = 1,2,3$:

$$\alpha_{4i} = -\frac{<v_4, f_i>}{<f_i, f_i>},\ \ i = 1,2,3.$$

Efectuând calculele obținem $\alpha_{41} = -\dfrac{<v_4, f_1>}{<f_1, f_1>} = -\dfrac{0}{10} = 0$, $\alpha_{42} = -\dfrac{<v_4, f_2>}{<f_2, f_2>} = -\dfrac{-6}{26} = \dfrac{3}{13}$, $\alpha_{43} = -\dfrac{<v_4, f_3>}{<f_3, f_3>} = -\dfrac{0}{10} = 0$

şi $f_4 = v_4 + 0f_1 + \dfrac{3}{13}f_2 + 0f_3 = v_4 + \dfrac{3}{13}f_2 = (-\dfrac{6}{13}, -\dfrac{4}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{6}{13})$.

Baza ortonormată corespunzătoare $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *se obține luând*

$e_i = \dfrac{1}{\|f_i\|}f_i$, $i = 1,2,3,4$. *Deci* $e_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|}f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 2, 1)$,

$e_2 = \dfrac{1}{\|f_2\|}f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(-2, 3, -3, -2)$, $e_3 = \dfrac{1}{\|f_3\|}f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, -1, 2)$

$$e_4 = \frac{1}{\|f_4\|}f_4 = \frac{1}{\sqrt{8/13}}\left(-\frac{6}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right) = \frac{1}{\sqrt{8/13}}\frac{2}{13}(-3, -2, 2, 3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, -2, 2, 3) = \frac{\sqrt{26}}{26}(-3, -2, 2, 3).$$

Lema 5.3.9. *Fie V un spațiu euclidian sau unitar şi fie* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *o bază în V. Dacă* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *este baza ortogonală obținută prin procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, atunci*

$$\|f_i\| \le \|v_i\| \text{ pentru orice } 1 \le i \le n.$$

Demonstrație. Avem

$$f_i = v_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} f_j, \ 1 \le i \le n.$$

Dacă notăm $w_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} f_j$, atunci $<w_i, f_i> = 0$, pentru orice $1 \le i \le n$. În consecință, $\|v_i\|^2 = \|f_i - w_i\|^2 = < f_i - w_i, f_i - w_i> = \|f_i\|^2 + \|w_i\|^2 \ge \|f_i\|^2$, pentru orice $1 \le i \le n$.

Teorema 5.3.10. *Fie V un spațiu euclidian sau unitar şi fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V. Fie $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ determinantul Gram format cu vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Atunci*

$$0 < \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) \le <v_1, v_1><v_2, v_2>\ldots<v_n, v_n>.$$

Demonstrație. Fie $B_1 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ baza ortogonală obținută prin procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt aplicat bazei $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi fie A matricea de trecere de la baza B_1 la baza B. Matricea A este o matrice triunghiulară care are toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1. Deci det(A) = 1. Pe de altă parte din Propoziția 5.2.8, rezultă că $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = |\det(A)|^2 \, \Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Este uşor de observat că

$$\Gamma(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} <f_1, f_1> & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & <f_2, f_2> & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & <f_n, f_n> \end{vmatrix}$$

$$= < f_1, f_1>< f_2, f_2>\ldots< f_n, f_n>.$$

Prin urmare, $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = < f_1, f_1> < f_2, f_2>\ldots< f_n, f_n>$

$$= \| f_1 \|^2 \| f_2 \|^2 \ldots \| f_n \|^2$$

$$\le \| v_1 \|^2 \| v_2 \|^2 \ldots \| v_n \|^2$$

(am aplicat lema precedentă). Din faptul că Γ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ =$\| f_1 \|^2 \| f_2 \|^2 \ldots \| f_n \|^2$, rezultă că Γ $(v_1, v_2, \ldots, v_n) > 0$.

Observația 5.3.11. Bazele ortonormate simplifică mult calculul. Astfel dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în spațiul euclidian sau unitar V, atunci Pentru orice $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$ şi $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in V$, avem

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i, \ \| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}, \ d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2}.$$

În plus, $<x, e_i> = \alpha_i$, şi prin urmare $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

Să presupunem că V este spațiu euclidian. Dacă $v, w \in V$ şi $w \neq 0$, vectorul $\frac{< v, w >}{< w, w >} w$ se numeşte *proiecția* vectorului v pe w, iar numărul $\frac{< v, w >}{< w, w >}$ se numeşte *mărimea algebrică a proiecției* lui v pe w. Coordonatele unui vector x într-o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sunt egale cu mărimile algebrice ale proiecțiilor vectorului x pe vectorii bazei ($<x, e_i>$, pentru orice i =1,2,..,n). Dacă θ_i este unghiul dintre vectorii x şi e_i, i = 1,2, …, n, atunci

$$\cos \theta_i = \frac{< x, e_i >}{\|x\| \|e_i\|} = \frac{< x, e_i >}{\|x\|} \text{ pentru orice } 1 \le i \le n.$$

În particular, dacă $\| x \| = 1$, atunci

$$x = \sum_{i=1}^{n} \cos(\theta_i) e_i,$$

şi deci coordonatele unui vector de normă 1 într-o bază ortonormată sunt egale cu cosinusurile unghiurilor dintre vectorul x şi vectorii bazei.

5.4. Subspații ortogonale

Teorema 5.4.1. *Fie* V *un spațiu vectorial euclidian sau unitar şi fie $V_1 \subset V$ un subspațiu al lui* V. *Atunci există şi este unic un subspațiu vectorial $V_2 \subset V$ ortogonal pe V_1 ($V_2 \perp V_1$) astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$.*

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ o baza ortonormată a lui V_1. Luăm

$$V_2 = \{v'' \in V : v'' = v - \sum_{i=1}^{m} < v, e_i > e_i \}$$

Deoarece orice vector $v'' = v - \sum_{i=1}^{m} < v, e_i > e_i \in V_2$ satisface condiția

$$<v'', e_k> = <v, e_k> - <v, e_k> = 0 \text{ pentru orice } 1 \le k \le m,$$

rezultă că V_2 este ortogonal pe orice vector din V_1, şi în consecință $V_2 \perp V_1$. Orice vector $v \in V$ se poate reprezenta sub forma $v = v_1 + v_2$, cu $v_1 = \sum_{i=1}^{m} < v, e_i > e_i \in V_1$ şi $v_2 = v - \sum_{i=1}^{m} < v, e_i > e_i \in V_2$, şi prin urmare $V = V_1 + V_2$. Pentru a arăta că $V = V_1 \oplus V_2$, observăm că intersecția a oricăror două subspații ortogonale este formată numai din vectorul zero (dacă $v \in V_1 \cap V_2$, deoarece $V_2 \perp V_1$ rezultă că $<v, v> = 0$, de unde $v = 0$).

Pentru a demonstra unicitatea, să considerăm un subspațiu vectorial V_3, $V_3 \perp V_1$ astfel încât $V = V_1 \oplus V_3$. Fie $v_3 \in V_3$. Cum

$$v_3 \in V_3 \subset V = V_1 \oplus V_2,$$

v_3 se poate reprezenta unic sub forma $v_3 = v_1 + v_2$ cu $v_1 \in V_1$ şi V_2. Din faptul că V_3 şi V_2 sunt ortogonale pe V_1 rezultă că $v_3 - v_2 \perp V_1$ şi deci

$$< v_3 - v_2, v_1> = 0,$$

de unde $< v_1, v_1> = 0$, adică $v_1 = 0$. Ținând cont că $v_3 = v_1 + v_2$, obținem $v_3 = v_2 \in V_2$. Analog se demonstrează că $V_2 \subset V_3$.

Observația 5.4.2. Teorema 5.4.1 este o particularizare (la cazul finit dimensional) a următoarei teoreme: Fie H un spațiu Hilbert şi $A \subset H$ un subspațiu vectorial închis al lui H. Atunci $A^{\perp} = \{x \in H: x \perp A\}$ este un subspațiu vectorial închis al lui H şi $H = A \oplus A^{\perp}$.

Teorema 5.4.3. ***(teorema proiecției)****Fie* V *un spațiu vectorial euclidian sau unitar, $V_1 \subset V$ un subspațiu al lui* V şi $v \in V - V_1$. *Atunci există şi este unic un vector $v_1 \in V_1$ (numit* ***proiecția ortogonală*** *a lui v pe V_1) astfel încât $v - v_1$ să fie ortogonal pe subspațiul V_1.*

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ o baza a lui V_1. Determinăm vectorul $v_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$ impunând condițiile $<v - v_1, e_k> = 0$ pentru orice $1 \le k \le m$.

care conduc la $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i < e_i, e_k > = <v, e_k>$ pentru orice $1 \le k \le m$.

Am obținut astfel un sistem liniar cu m ecuații şi m necunoscute $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Determinantul acestui sistem, fiind determinantul Gram asociat sistemului liniar independent de vectori $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, este nenul. Prin urmare, sistemul este compatibil determinat ceea ce asigură existența şi unicitatea vectorului v_1.

Teorema 5.4.4. *Fie* V *un spațiu vectorial euclidian sau unitar, $V_1 \subset V$ un subspațiu al lui* V, $v \in V - V_1$ şi v_1 *proiecția ortogonală a lui v pe V_1. Atunci*

$$\|v - v_1\| = \min\{ \|v - v''\|, v'' \in V_1\}.$$

Demonstrație. Observăm că $< v - v_1, v_1 - v''> = 0$ pentru orice $v'' \in V_1$ (deoarece $v - v_1$ este ortogonal pe V_1). De aici rezultă că

$$\| v - v''\|^2 = \| v - v_1 + v_1 - v''\|^2 = \| v - v_1\|^2 + \| v_1 - v''\|^2 \geq \| v - v_1\|^2,$$

de unde deducem că $\| v - v_1\|^2 \leq \| v - v''\|^2$ pentru orice $v'' \in V_1$.

5.5. Transformări liniare pe spații euclidiene

Definiția 5.5.1. *Fie V şi W două spații euclidiene (respectiv unitare) şi fie $u : V \to W$ o transformare liniară. Transformarea liniară $u^* : W \to V$ definită prin*

$$<u(x), y> = <x, u^*(y)> \text{ pentru orice } x \in V \text{ şi } y \in W,$$

se numeşte transformarea adjunctă lui u.

Un endomorfism $u : V \to V$ se numeşte operator normal dacă $uu^* = u^*u$. Un endomorfism $u : V \to V$ cu proprietatea că $uu^* = u^*u = I$ (transformarea liniară identică) se numeşte operator unitar, dacă V este spațiu unitar, sau operator ortogonal, dacă V este spațiu euclidian.

Un endomorfism $u : V \to V$ se numeşte autoadjunct dacă $u = u^*$. În cazul în care V este spațiu euclidian, un endomorfism autoadjuct se mai numeşte endomorfism simetric, iar in cazul în care V este unitar, un endomorfism autoadjuct se mai numeşte endomorfism hermitian.

Să arătăm că dacă $u : V \to W$ este o transformare liniară, atunci relația

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle \text{ pentru orice } x \in V \text{ şi } y \in W,$$

defineşte o transformare liniară $u^* : W \to V$. Să observăm că pentru orice $y \in V$, aplicaţia

$$x \to \langle u(x), y\rangle$$

este o aplicaţie liniară. Într-adevăr, pentru orice scalari α_1 şi α_2 şi orice x_1, $x_2 \in V$, avem $\langle u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle = \langle \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2), y\rangle = \alpha_1 \langle u(x_1), y\rangle + \alpha_2 \langle u(x_2), y\rangle$. Conform teoremei lui Riesz (vezi Teorema 6.1.3), există un unic vector z_y astfel încât $\langle u(x), y\rangle = \langle x, z_y\rangle$ pentru orice $x \in V$. Definim $u^*(y) = z_y$, pentru orice $y \in W$. Să arătăm că u^* este transformare liniară. Fie scalarii α_1 şi α_2 şi fie $y_1, y_2 \in W$. Avem

$$\langle u(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle.$$

Pe de altă parte, $\langle u(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \overline{\alpha}_1 \langle u(x), y_1\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle u(x), y_2\rangle$
$= \overline{\alpha}_1 \langle x, u^*(y_1)\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, u(y_2)\rangle = \langle x, \alpha_1 u^*(y_1)\rangle + \langle x, \alpha_2 u(y_2)\rangle$
$= \langle x, \alpha_1 u^*(y_1) + \alpha_2 u(y_2)\rangle$.

În consecinţă, pentru orice scalari α_1 şi α_2 , şi orice $y_1, y_2 \in W$, şi orice $x \in V$, avem

$$\langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle = \langle x, \alpha_1 u^*(y_1) + \alpha_2 u^*(y_2)\rangle,$$

sau echivalent,

$$\langle x, u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2)\rangle = 0.$$

În particular, pentru $x = u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2)$, obţinem

$$\langle u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2), u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2)\rangle = 0,$$

de unde rezultă $u^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 u^*(y_1) - \alpha_2 u^*(y_2) = 0$. Prin urmare u^* este transformare liniară.

Propoziţia 5.5.2. *Fie V un spaţiu euclidian sau unitar. Aplicaţia*

$$u \to u^* \ [: L(V, V) \to L(V, V)]$$

are următoarele proprietăți:

1. $(u + v)^* = u^* + v^*$

2. $(uv)^* = v^*u^*$

3. $(u^*)^* = u$

4. $(\alpha v)^* = \bar{\alpha}u^*$*, dacă V este unitar;* $(\alpha v)^* = \alpha u^*$*, dacă V este euclidian*

5. $I^* = I$ *(I este transformarea liniară identică pe V)*

6. $O^* = O$ *(O este transformarea liniară nulă pe V)*

7. Dacă u este inversabil, atunci $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Demonstrație. Se folosesc proprietățile produsului scalar. Să arătăm, de exemplu, 1. Pentru orice x, y $\in$ V, avem

$$<(u + v)(x), y> = <x, (u + v)^*(y)>.$$

Pe de altă parte,

$$<(u + v)(x), y> =<u(x) + v(x), y> =<u(x), y> + <v(x), y> =$$
$$=<x, u^*(y)> + <x, v^*(y)> =<x, u^*(y) + v^*(y)> =$$
$$= <x, (u^* + v^*)(y)>.$$

Deci pentru orice x, y $\in$ V, avem $<x, (u + v)^*(y)> = <x, (u^* + v^*)(y)>$, sau echivalent $<x, (u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y)> = 0$.

În particular, pentru $x = (u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y)$, obținem $<(u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y), (u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y)> = 0$, de unde $(u + v)^*(y) - (u^* + v^*)(y) = 0$ pentru orice y. În consecință, $(u + v)^* = u^* + v^*$.

Propoziția 5.5.3. *Fie V un spațiu unitar şi* $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *o bază a sa. Fie* $u : V \to V$ *un endomorfism,* $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *matricea asociată lui u în baza B, şi* $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *matricea asociată lui* u^* *în baza B. Dacă* $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *este matricea ai cărei coeficienți sunt dați de*

g_{ij} = <f_i, f_j> pentru orice $1 \le i, j \le n$, atunci

$$\overline{C^t} = G^{-1}AG,$$

unde $\overline{C^t}$ este matricea care se obține din C prin transpunere şi înlocuirea fiecărui element cu conjugatul său.

Demonstrație. Pentru orice $1 \le i, j \le n$, avem

$$<u(f_i), f_j> = <\sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_k\ , f_j> = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ <f_k, f_j> = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} g_{kj}\ .$$

Pe de altă parte,

$$<u(f_i), f_j> = <f_i, u^*(f_j)> = <f_i, \sum_{k=1}^{n} c_{jk} f_k > = \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_{jk}\ <f_i, f_k> = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \overline{c}_{jk}\ .$$

În consecință, pentru orice $1 \le i, j \le n$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \overline{c}_{jk}$, sau echivalent $AG = G\overline{C^t}$.

Corolarul 5.5.4. *Fie V un spațiu unitar. Fie u : V → V un endomorfism şi $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea asociată lui u într-o bază ortonormată. Matricea asociată adjunctului lui u se obține din A prin transpunere şi înlocuirea fiecărui element cu conjugatul său.*

Demonstrație. Fie B ={f_1, f_2, …, f_n} baza ortonormată considerată. Fie C = $(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea asociată lui u^* în baza B. Conform teoremei anterioare $\overline{C^t} = G^{-1}AG$, unde $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ şi g_{ij} = <f_i, f_j> pentru orice $1 \le i, j \le n$. Deoarece B este o bază ortonormată, $G = I_n$ (matricea unitate). Prin urmare, $\overline{C^t} = A$, sau echivalent $C = \overline{A^t}$.

Propoziția 5.5.5. *Fie V un spațiu euclidian şi* $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *o bază a sa. Fie* $u : V \to V$ *un endomorfism,* $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *matricea asociată lui u în baza B, şi* $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *matricea asociată lui* u^* *în baza B. Dacă* $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *este matricea ai cărei coeficienți sunt dați de*

$g_{ij} = \langle f_i, f_j\rangle$ *pentru orice* $1 \le i, j \le n$, *atunci*

$$C^t = G^{-1}AG,$$

unde C^t *este transpusa lui C.*

Demonstrație. Demonstrația este analogă demonstrației Propoziției 5.5. 3.

Corolarul 5.5.6. *Fie V un spațiu euclidian. Fie* $u : V \to V$ *un endomorfism. Într-o bază ortonormată, matricea asociată adjunctului lui u este transpusa matricei asociate lui u.*

Demonstrație. Fie $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ baza ortonormată considerată şi fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea asociată lui u în baza B. Fie $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matricea asociată lui u^* în baza B. Conform teoremei anterioare $C^t = G^{-1}AG$, unde $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ şi $g_{ij} = \langle f_i, f_j\rangle$ pentru orice $1 \le i, j \le n$. Deoarece B este o bază ortonormată, $G = I_n$ (matricea unitate). Prin urmare, $C^t = A$, sau echivalent $C = A^t$.

Propoziția 5.5.7. *Fie V un spațiu unitar (respectiv euclidian) şi* $u : V\to V$ *un endomorfism. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. *u este unitar (respectiv ortogonal)*
2. $u^*u = I$ *(transformarea liniară identică)*
3. *u păstrează produsul scalar (* $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *pentru orice* $x, y \in V$*)*

4. $\|u(x)\| = \|x\|$ pentru orice $x \in V$ ($\|x\| = \sqrt{<x, x>}$)

5. u transformă orice bază ortonormată într-o bază ortonormată.

6. Matricea A a lui u într-o bază ortonormată, satisface condiția $\overline{A^t}\, A = I$ (respectiv, $A^tA = I$).

Demonstrație. 1 => 2. evident. 2 => 1. Din $u^*u = I$ rezultă că *u* este injectivă, deoarece I este, în particular, injectivă. Deoarece V este de dimensiune finită, rezultă că de fapt *u* este o transformare liniară bijectivă. În consecință, condiția $u^*u = I$ implică $u^* = u^{-1}$. Prin urmare $uu^* = uu^{-1} = I$, şi deci *u* este unitar (respectiv, ortogonal).

2 = > 3. Pentru orice $x, y \in V$, $<u(x), u(y)> = <x, u^*(u(y))> = <x, y>$.

3 => 2. Pentru orice $x, y \in V$,

$$<x, y> = <u(x), u(y)> = <x, u^*(u(y))> = <x, u^*u(y)>.$$

Deci, $<x, u^*u(y) - y> = 0$ pentru orice $x, y \in V$. În particular, pentru $x = u^*u(y) - y$, obținem $< u^*u(y) - y, u^*u(y) - y> = 0$, de unde $u^*u(y) - y = 0$ pentru orice $y \in V$. Deci $u^*u = I$.

3 => 4. Pentru orice $x \in V$, $\|u(x)\|^2 = <u(x), u(x)> = <x, x> = \|x\|^2$.

4 => 3. Dacă V este unitar, atunci pentru orice $x, y \in V$

$$<x, y> = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2).$$

Deci pentru orice $x, y \in V$, avem $<u(x), u(y)> = \frac{1}{4}(\| u(x) + u(y)\|^2 - \| u(x) - u(y)\|^2 + i\| u(x) + i u(y)\|^2 - i \| u(x) - i u(y)\|^2) = \frac{1}{4}(\| u(x + y)\|^2 - \| u(x -y)\|^2 + i\| u(x + iy)\|^2 - i \| u(x - iy) \|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2) = <x, y>$

Dacă V este euclidian, atunci pentru orice x, y $\in$ V

$$<x, y> = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Deci pentru orice x, y $\in$ V, avem $<u(x), u(y)> = \frac{1}{4}(\| u(x) + u(y)\|^2 - \| u(x) - u(y)\|^2) = \frac{1}{4}(\| u(x + y)\|^2 - \| u(x -y)\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = <x, y>$. 3 => 5. Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V. Deoarece

$$<u(e_i), u(e_j)> = <e_i, e_j> = 0 \text{ dacă } i \neq j \text{ şi } <u(e_i), u(e_i)> = <e_i, e_i> = 1,$$

rezultă că $\{u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)\}$ este o bază ortonormată.

5 => 3. Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V şi fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in$ V şi $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in V$. Avem $<u(x), u(y)> = <u(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i), u(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i)>$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} <u(e_i), u(e_j)> = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} <e_i, e_j> = <x, y>.$$

2 <=> 6. Fie $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V şi fie A matricea lui u în baza. Conform corolarelor 5.5.4 şi 5.5.6 matricea lui u^* în baza B este $\overline{A^t}$ dacă V este unitar, respectiv A^t dacă V este euclidian. Relația $u^*u = I$ este echivalentă cu $\overline{A^t} A = I$ dacă V este unitar, respectiv cu $A^tA = I$ dacă V este euclidian.

Propoziția 5.5.8. *Fie V un spațiu unitar (respectiv euclidian) şi u : V→V un endomorfism. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. *u este hermitian (respectiv simetric).*

2. Matricea A a lui u într-o bază ortonormată, este hermitică i.e. satisface condiția $\overline{A^t} = A$ *(respectiv, este simetrică i.e.* $A^t = A$ *).*

Demonstrație. Fie B ={e_1, e_2, …, e_n} o bază ortonormată a lui V şi fie A matricea lui *u* în baza B. Conform corolarelor 5.5.4 şi 5.5.6 matricea lui u^* în baza B este $\overline{A^t}$ dacă V este unitar, respectiv A^t dacă V este euclidian. Relația $u^* = u$ este echivalentă cu $\overline{A^t} = A$ dacă V este unitar, respectiv cu $A^t = A$ dacă V este euclidian.

5.6. Vectori şi valori proprii pentru endomorfisme autoadjuncte

Teorema 5.6.1. *Fie V un spațiu unitar. Dacă u: V → V este un endomorfism hermitian, atunci valorile proprii asociate lui u sunt reale.*

Demonstrație. Fie λ o valoare proprie a lui *u* şi fie x un vector propriu asociat valorii proprii λ. Avem

$$\lambda = \frac{< u(x), x >}{< x, x >} = \frac{< x, u(x) >}{< x, x >} = \frac{\overline{< u(x), x >}}{< x, x >} = \bar{\lambda}.\ \text{Deci } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Teorema 5.6.2. *Fie V un spațiu unitar sau euclidian. Dacă u: V → V este un endomorfism autoadjuct, atunci vectorii proprii corespunzători la valorile proprii distincte sunt ortogonali.*

Demonstrație. Fie x_1 şi x_2 vectori proprii corespunzători valorilor proprii λ_1, respectiv λ_2. Avem $\lambda_1 <x_1, x_2> = <\lambda_1 x_1, x_2> = <u(x_1), x_2> = <x_1, u(x_2)> = <x_1, \lambda_2 x_2> = \bar{\lambda}_2 <x_1, x_2> = \lambda_2 <x_1, x_2>$. Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci $<x_1, x_2> = 0$.

Teorema 5.6.3. *Fie V un spațiu unitar sau euclidian. Dacă u: V $\to$ V este un endomorfism autoadjuct, atunci există o bază ortonormată a lui V formată din vectori proprii ai lui u. Prin urmare, u este diagonalizabil.*

Demonstrație. Presupunem că dimensiunea lui V este *n*. Polinomul caracteristic P asociat lui *u* admite cel puțin o rădăcină complexă λ_1 (eventual multiplă de ordinul *n*). Deoarece *u* este autodjunct, conform Teoremei 5.6.1, λ_1 este reală (fiind valoare proprie). Valorii proprii λ_1 îi corespunde un vector propriu e_1. Putem presupune $\|e_1\| = 1$ (eventual înlocuindu-l cu $\frac{1}{\|e_1\|}e_1$) . Fie $V_1 =\{e_1\}^{\perp}$. Spațiul V_1 este invariant la *u*. Într-adevăr, dacă $x \in V_1$, atunci

$$<u(x), e_1> = <x, u(e_1)> = <x, \lambda_1 e_1> = \lambda_1<x, e_1> = 0,$$

şi deci $u(x) \in \{e_1\}^{\perp} = V_1$. Dacă $u_1 = u|V_1$, atunci u_1 este un endomorfism autoadjunct. Fie e_2 un vector propriu de normă 1 al lui u_1 (în particular, e_2 este vector propriu al lui *u*) . Deoarece $e_2 \in V_1$, rezultă că $e_2 \perp e_1$. Fie $V_2 =\{e_1, e_2\}^{\perp}$. De asemenea V_2 este subspațiu invariant al lui *u*. Considerăm $u_2 = u|V_2$ şi continuăm procedeul. La fiecare pas k se obține un subspațiu $V_k = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}^{\perp}$ invariant al lui *u*, cu proprietatea că $e_k \perp e_i$ pentru orice $1 \le i \le k-1$. Dimensiunea lui V_k este n - k (deoarece $V = V_k \oplus sp\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$). După *n* paşi se obține o bază ortonormată a lui V formată din vectori proprii ai lui u. Conform Teoremei 4.8.5, u este diagonalizabil.

Teorema 5.6.4. ***(Principiul minmax)*** *Fie V un spațiu unitar sau euclidian de dimensiune n şi fie u: V $\to$ V un endomorfism autoadjuct. Fie $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$ valorile* *proprii ale lui u. Pentru fiecare subspațiu V_0 al lui V, notăm cu $\mu(V_0)$ =inf {< u(x), x>, $x \in V_0$ şi // x// = 1} şi pentru fiecare $1 \le k \le n$, notăm cu μ_k = sup {$\mu(V_0)$, V_0 subspațiu al lui V de dimensiune k}. Atunci $\lambda_k = \mu_k$ pentru orice $1 \le k \le n$.*

Demonstrație. Conform teoremei anterioare, există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ astfel încât $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pentru orice $1 \le i \le n$. Fie U_k subspațiul vectorial generat de $\{e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ şi fie V_0 un subspațiu de dimensiune k. Deoarece $(n-k+1) + k = n+1 > n$, rezultă că $U_k \cap V_0 \ne \{0\}$. Fie $x \in U_k \cap V_0$, $x \ne 0$. Eventual înlocuind x cu $\frac{1}{\|x\|}x$, putem presupune $\|x\| = 1$. Cum $x \in U_k$, $x = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i$. Avem

$$<u(x), x> = <u(\sum_{i=k}^{n} x_i e_i), \sum_{i=k}^{n} x_i e_i> = <\sum_{i=k}^{n} x_i u(e_i), \sum_{i=k}^{n} x_i e_i> =$$

$$=<\sum_{i=k}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=k}^{n} x_i e_i> = \sum_{i=k}^{n} |x_i|^2 \lambda_i \le \lambda_k \sum_{i=k}^{n} |x_i|^2 = \lambda_k \|x\|$$

$$= \lambda_k.$$

Prin urmare $\mu(V_0) \le \lambda_k$, pentru orice subspațiu V_0 de dimensiune k. Deci $\mu_k \le \lambda_k$. Pentru a demonstra inegalitatea opusă, considerăm V_0 spațiul generat de $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ (V_0 are dimensiunea k). Fie $x \in V_0$ cu $\|x\| = 1$. Atunci $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$. Avem $<u(x), x> = <u(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i), \sum_{i=1}^{k} x_i e_i> =$

$$<\sum_{i=1}^{k} x_i u(e_i), \sum_{i=1}^{k} x_i e_i> =<\sum_{i=1}^{k} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{k} x_i e_i> = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 \lambda_i \ge \lambda_k \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 =$$

$= \lambda_k \|x\| = \lambda_k$. Prin urmare $\mu(V_0) \ge \lambda_k$, de unde $\mu_k \ge \lambda_k$.

5. 7 Exerciții

1. Se consideră spațiul vectorial real $\mathbf{R}^4$ dotat cu produsul scalar canonic. Să se determine vectorul $x \in \mathbf{R}^4$ de normă 1, care împreună cu vectorii a = (1, 0, 1, -1) şi b = (0, 1, 1, 1) formează un sistem ortogonal.

R: Dacă $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ atunci impunând condițiile cerute, $\|x\| = 1$, $< x, a > = 0$, $< x, b > = 0$, obținem sistemul $x_1 + x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Primele două ecuații formează un sistem liniar şi omogen, compatibil nedeterminat, cu soluțiile $x_1 = - \alpha + \beta$, $x_2 = - \alpha - \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Înlocuind aceste soluții în ultima ecuație a sistemului de mai sus, obținem $3\alpha^2 + 3\beta^2 = 1$. Ecuațiile parametrice ale componentelor x_i, i = 1, 2, 3, 4 sunt $x_1 = 1/3(\cos \varphi - \sin \varphi)$, $x_2 = -1/3(\cos \varphi + \sin \varphi)$, $x_3 = (1/3)\cos \varphi$, $x_4 = (1/3)\cos \varphi$.

2. Să se demonstreze că aplicația $< . , . > : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $< z_1 , z_2 > = z_1 \overline{z_2}$ este un produs scalar în spațiul vectorial complex $\mathbf{C}$.

R: Se observă că $< z, z > = \|z\|^2 \geq 0$, iar $< z, z > = 0 \Leftrightarrow z = 0$. De asemenea $< z_1, z_2 > = \overline{< z_2, z_1 >}$ şi, cum liniaritatea în primul argument este un exercițiu simplu pentru cititor, rezultă concluzia.

3. Să se arate că într-un spațiu vectorial complex, dotat cu produs scalar, are loc identitatea

$$4< x, y > = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 .$$

R: Avem $\|x + iy\|^2 = \langle x + i y, x + iy \rangle = \|x\|^2 + i \langle y, x \rangle - i \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ şi analog $\|x - iy\|^2 = \|x\|^2 - i \langle y, x \rangle + i \langle x, y \rangle + \|y\|^2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \|y\|^2$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \|y\|^2$. Folosind relaţiile de mai sus rezultă concluzia.

4. Să se verifice dacă aplicaţia $\langle . , . \rangle : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$

$$\langle x , y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_1} + x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_2},$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbf{C}^2$, defineşte un produs scalar în spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^2$.

R: Avem $\langle x , x \rangle = |x_1|^2 + 2 \operatorname{Re} x_1 \overline{x_2} + |x_2|^2$, unde am notat prin Re z partea reală a numărului complex z. Deoarece $|\operatorname{Re} x_1 \overline{x_2}| \leq |x_1 \overline{x_2}| = |x_1| |x_2|$, este clar că $\langle x , x \rangle \geq |x_1|^2 - 2 |x_1| |x_2| + |x_2|^2 = (|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0$. Dacă $\langle x , x \rangle = 0$, atunci din inegalitatea de mai sus rezultă că $|x_1| = |x_2| = a$. Pe de altă parte avem $2 \operatorname{Re} x_1 \overline{x_2} = - 2a^2$, $x_1 = a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $x_2 = a(\cos \tau + i \sin \tau)$, $\varphi, \tau \in [0, 2\pi)$ (am folosit forma trigonometrică a unui număr complex). De aici obţinem relaţia $2a^2\cos (\varphi - \tau) = - 2a^2$ sau $\varphi - \tau = \pi$. Deci pentru $x = (a, -a)$, $a \neq 0$ avem $\langle x, x \rangle = 0$ şi aplicaţia definită mai sus nu este un produs scalar pe $\mathbf{C}^2$.

5. Să se arate că aplicaţia $\langle . , . \rangle : \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$

$$\langle x , y \rangle = 2x_1 \overline{y_1} + 3 x_2 \overline{y_2},$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbf{C}^2$, defineşte un produs scalar în spaţiul vectorial complex $\mathbf{C}^2$.

Indicație: Se verifică axiomele produsului scalar în maniera prezentată la exercițiul precedent.

6. Folosind procedeul de ortonormare Gram Schmidt să se ortonormeze sistemele de vectori liniar independenți de mai jos:

a) $\{e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (2, 1, -3), e_3 = (-1, 1, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^3$;

b) $\{e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (0, 1, 0, 1), e_3 = (1, -1, 0, 1), e_4 = (1, 1, 1, -1)\} \subseteq \mathbf{R}^4$;

c) $\{e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 0), e_3 = (3, 0, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^3$;

d) $\{e_1 = (2, 1), e_2 = (1, 1)\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

R: a) În prima etapă se construieşte un sistem ortogonal g_1, g_2, g_3. Conform procedeului Gram Schmidt, avem $g_1 = e_1$. Căutăm g_2 de forma $g_2 = e_2 - \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $< g_2, g_1 > = 0$. Obținem $\alpha = < e_2, g_1 >/\|g_1\|^2$. Deci $\alpha = -1/2$ iar $g_2 = (5/2, 1, -5/2)$. Alegerea lui g_3 se face astfel încât $g_3 = e_3 - \alpha g_1 - \beta\, g_2$ şi $< g_3, g_1 > = 0$, $< g_3, g_2 > = 0$. De aici rezultă $\alpha = < e_3, g_1 >/\|g_1\|^2 = -1/2$, $\beta = < e_3, g_2 >/\|g_2\|^2 = -1/9$ şi $g_3 = (-2/9, 10/9, 2/9)$. Sistemul $S = \{g_1/\|g_1\|, g_2/\|g_2\|, g_3/\|g_3\|\}$ este ortonormat. Deci $S = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (5\sqrt{6}/18, \sqrt{6}/18, -5\sqrt{6}/18), (-\sqrt{3}/9, 5\sqrt{3}/9, \sqrt{3}/9)\}$. Procedând asemănător se vor determina sistemelele ortonormate în cazul punctelor b) - d).

Astfel în cazul punctului b) avem sistemul $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}), (2/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})\}$, pentru c) obținem $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\}$, iar în cazul ultimului punct avem sistemul ortonormat $\{(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$.

7. În cele ce urmează presupunem că spaţiul vectorial real $\mathbf{R}^n$, $n\in \mathbf{N}^*$ este dotat cu produsul scalar canonic. Să se determine complementul ortogonal al fiecăruia din subspaţiile generate de familiile de vectori de mai jos:

a) $S_1 = \{e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (2, 1, -3)\} \subseteq \mathbf{R}^3$;

b) $S_2 = \{e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (0, 1, 0, 1)\} \subseteq \mathbf{R}^4$;

c) $S_3 = \{e_1 = (0, 1, 0, 1), e_2 = (1, -1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 1, -1)\} \subseteq \mathbf{R}^4$;

d) $S_4 = \{e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 0)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

R: a) Deoarece S_1 este un sistem liniar independent, este clar că, în spaţiul V_1 generat de aceştia, S_1 va reprezenta o bază. Baza ortogonală obţinută prin procedeul Gram Schmidt este $B_1 = \{(1, 0, 1) , (5/2, 1, -5/2)\}$.

După cum se ştie, aceasta poate fi extinsă la o bază B a lui $\mathbf{R}^3$, de exemplu $B = B_1 \cup \{e_3 = (-1, 1, 0)\}$. Dacă aplicăm din nou procedeul Gram Schmidt pentru vectorii din baza B, vom obţine o bază ortogonală B', care, în mod evident, include baza B_1. În cazul nostru $B' = \{g_1 = (1, 0, 1) , g_2 = (5/2, 1, -5/2), g_3 = (-2/9, 10/9, 2/9)\}$. Spaţiul generat de g_3 este subspaţiul căutat. Deci $V_1^\perp = \{\alpha(-2/9, 10/9, 2/9), \alpha \in \mathbf{R}\}$. În mod asemănător se poate stabili că:

b) $V_2^\perp = \{\alpha(1/2, -1, -1/2, 1) + \beta(2/5, 1/5, -2/5, -1/5), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$;

c) $V_3^\perp = \{\alpha(-2/11, -1/11, 4/11, 1/11), \alpha \in \mathbf{R}\}$;

e) $V_3^\perp = \{\alpha(2, -1, -1), \alpha \in \mathbf{R}\}$.

8. Fie V mulţimea $C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}, f \text{ continuă}\}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că V împreună cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire a acestora cu numere reale capătă o structură de spaţiu vectorial real.

b) Fie $\rho \in C^0([a, b])$ o funcție fixată în V, $\rho(x) > 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$.
Să se arate că aplicația

$$< f, g >_\rho = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

definește un produs scalar pe V, numit produs scalar cu ponderea ρ.

Indicație: a) Se verifică axiomele spațiului vectorial. b) Se verifică axiomele produsului scalar.

9. Fie V_1 subspațiul vectorial al spațiului $V = C^0((a, b))$, $-\infty \le a < b \le \infty$ format din toate polinoamele de orice grad cu nedeterminata *x* și coeficienți reali. Este ușor de văzut că dacă $\rho(x) \in V$, $\rho(x) > 0$ este o pondere adecvată adică integrala din formula de mai jos este convergentă, atunci formula

$$< f, g >_\rho = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

definește în continuare un produs scalar pe V_1. Să se ortogonalizeze sistemul $S = \{ f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = x^3\}$ folosind procedeul Gram Schmidt, dacă ponderea ρ și valorile a și b sunt cele de mai jos:

a) $a = -1, b = 1, \rho(x) = (1 - x^2)^2$;

b) $a = 0, b = \infty, \rho(x) = xe^{-x}$.

R: a) Alegem $g_1 = 1$. Construim $g_2 = f_2 - \alpha g_1$ astfel încât $< g_1, g_2 >_\rho = 0$. Avem $\alpha = < f_2, g_1 >_\rho / \|g_1\|^2$. Deoarece $< f_2, g_1 >_\rho = \int_{-1}^{1} x(1 - x^2)^2dx = 0$ rezultă că $g_2 = x$. Următorul vector g_3 din sistemul ortogonal va satisface condițiile $g_3 = f_3 - \alpha g_1 - \beta g_2$, $< g_1, g_3 >_\rho = 0$, $< g_2, g_3 >_\rho = 0$. Deci $\alpha = < f_3, g_1 >_\rho / \|g_1\|^2$, $\beta = < f_3, g_2 >_\rho / \|g_2\|^2$. Avem $< f_3, g_1 >_\rho = \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)^2dx =$

16/105, $\|g_1\|^2 = < g_1, g_1 >_\rho = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = 16/15$, $< f_3, g_2 >_\rho = \int_{-1}^{1} x^3(1 - x^2)^2 dx = 0$ şi $\|g_2\|^2 = < g_2, g_2 >_\rho = \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)^2 dx = 16/105$. Obținem $g_3 = x^2 - 1/7$. Analog $g_4 = f_4 - \alpha g_1 - \beta g_2 - \gamma g_3$, unde $\alpha = < f_4, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2 = 0$, $\beta = < f_4, g_2 >_\rho /\|g_2\|^2 = 1/3$, $\gamma = < f_4, g_3 >_\rho /\|g_3\|^2 = 0$. Sistemul ortogonal căutat este S' = { $g_1 = 1$, $g_2 = x$, $g_3 = x^2 - 1/7$, $g_4 = x^3 - 1/3x$}.

Polinoamele g_i, i = 1, 2, 3, 4 reprezintă primele 4 polinoame Jacobi corespunzătoare ponderii $\rho(x)$.

b) $g_1 = 1$; $g_2 = f_2 - \alpha g_1$ unde $\alpha = < f_2, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2$, $< f_2, g_1 >_\rho = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$, $\|g_1\|^2 = < g_1, g_1 >_\rho = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1$. Deci $g_2 = x - 2$. Avem $g_3 = f_3 - \alpha g_1 - \beta g_2$ cu $\alpha = < f_3, g_1 >_\rho /\|g_1\|^2$, $\beta = < f_3, g_2 >_\rho /\|g_2\|^2$, $< f_3, g_1 >_\rho = \int_{0}^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 6$, $< f_3, g_2 >_\rho = \int_{0}^{\infty} x^3 (x - 2)e^{-x} dx = 12$, $\|g_2\|^2 = \int_{0}^{\infty} x(x - 2)^2 e^{-x} dx = 2$. Deci $g_3 = x^2 - 6(x - 2) - 6 = x^2 - 6x + 6$.

Analog se stabileşte că $g_4 = f_4 - \alpha g_1 - \beta g_2 - \gamma g_3$, unde $\alpha = - 24$, $\beta = 36$, $\gamma = 12$. Deci $g_4 = x^3 - 12x^2 + 36x - 24$. Polinoamele g_1, g_2, g_3, g_4 se numesc polinoame Laguerre şi formează sistemul ortogonal căutat.

10. Să se determine adjunctul operatorilor liniari de mai jos relativ la produsul scalar canonic:

a) $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y + z, x + z)$;

b) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f_2(x, y) = (x + y, x - 2y, x + 3y)$;

c) $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_3(x, y) = (x + 2y, x)$;

d) $f_4 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $f_4(x, y, z, t) = (x - y, y - z, z - t, t - x)$.

a) R: Matricea $A = (a_{ij})_{i, j = 1, 2, 3}$, asociată lui f_1 în baza canonică $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ a lui $\mathbf{R}^3$, este dată de relațiile $u_1(e_i) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3$, $i = 1, 2, 3$. Deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci matricea operatorului adjunct f_1^* este A^T, iar $f_1^*(x, y, z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Deci $f_1^*: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1^*(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y, - x + y + z)$.

b) $f_2^*: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f_2^*(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y + 3z)$;

c) $f_3^*: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_3^*(x, y) = (x + y , 2x)$;

d) $f_4^*: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $f_4^*(x, y, z, t) = (x - t, - x + y, - y + z, - z + t)$.

11. Se consideră spațiul vectorial $\mathbf{R}_3[X]$ al tuturor polinoamelor, de grad cel mult 2, în nedeterminata x, dotat cu produsul vectorial de la punctul a) al exercițiului 9. Să se determine adjunctul operatorului liniar $u : V_1 \to V_1$, $u(f) = 2f' - 3f$.

R: Se ştie că o bază a spațiului $\mathbf{R}_2[X]$ este $\{1, x, x^2\}$. După cum am arătat deja în exercițiul 9, o bază ortogonală a acestui spațiu este $B' = \{ g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x^2 - 1/7\}$.

Ortonormăm această bază şi obținem baza este $B = \{ g_1 = 15/16, g_2 = 105/16\, x, g_3 = 2205/16\, (x^2 - 1/7)\}$.

În această bază operatorul *u* are matricea asociată $A = (a_{ij})_{i, j = 1, 2, 3}$, unde $u(g_i) = a_{i1}g_1 + a_{i2}g_2 + a_{i3}g_3$, $i = 1, 2, 3$. Avem $u(g_1) = - 45/16$, $u(g_2) = 105/16(2 - 3x)$, $u(g_3) = 2205/16\, (- 3x^2 + 2x + 3/7)$. Deci $a_{11} = < u(g_1), g_1 >_\rho = - 45/16$, $a_{12} = < u(g_1), g_2 >_\rho = 0$, $a_{13} = < u(g_1), g_3 >_\rho = 0$, $a_{21} = < u(g_2),$

$g_1 >_\rho = 105/8$, $a_{22} = < u(g_2), g_2 >_\rho = -315/16$, $a_{23} = < u(g_2), g_3 >_\rho = 0$, $a_{31} = < u(g_3), g_1 >_\rho = 0$, $a_{32} = < u(g_3), g_2 >_\rho = 2205/8$, $a_{33} = < u(g_3), g_3 >_\rho = -6615/4$.

Obținem $A = 15/4\begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 0 \\ 7/2 & -21/4 & 0 \\ 0 & 147/2 & 441 \end{pmatrix}$. Deci matricea asociată operatorului adjunct u^* în aceeaşi bază va fi A^T.

Deoarece $1 = 16/105(7g_1)$, $x = 16/105g_2$ iar $x^2 = 16/105(1/21g_3 + g_1)$, deducem că $u^*(ax^2 + bx + c) = 16/105[a/21g_3 + a\, g_1 + b\, g_2 + 7\, c\, g_1] = 16/105[a/21\, u^*(g_3) + (a + 7c)\, u^*(g_1) + b\, u^*(g_2)\,] = 4/7[a/21(441g_3) + (a + 7c)\, (-3/4g_1 + 7/2g_2) + b(-21/4g_2 + 147/2g_3)] = 6615/8(2a + 7b)(\, x^2 - 1/7) - 45/112a - 45/16c + 105/16(\, 2a - 3b + 14c)x$. Deci $u^*(ax^2 + bx + c) = 6615/8(2a + 7b)(\, x^2 - 1/7) - 45/112a - 45/16c + 105/16(\, 2a - 3b + 14c)x$.

12. Să se verifice dacă operatorul $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (1/\sqrt{2}\,x + 1/\sqrt{2}\,z,\ 5\sqrt{6}/18x + \sqrt{6}/18y - 5\sqrt{6}/18\,z,\ -\sqrt{3}/9x + 5\sqrt{3}/9y + \sqrt{3}/9z)$$

este ortogonal.

R: Matricea asociată operatorului în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 5\sqrt{6}/18 & -\sqrt{3/9} \\ 0 & \sqrt{6}/18 & 5\sqrt{3/9} \\ 1/\sqrt{2} & -5\sqrt{6}/18 & \sqrt{3/9} \end{pmatrix}$. Deoarece $A^T = A^{-1}$ se deduce că într-adevăr operatorul *f* este ortogonal.