CAPITOLUL 6

FORME LINIARE, BILINIARE ŞI PĂTRATICE

6.1 Forme liniare

Fie V un spaţiu vectorial peste un corp K.

Definiţia 6.1.1 *Se numeşte formă liniară sau funcţională liniară o aplicaţie $f : V \to K$ care satisface condiţiile:*

a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$(aditivitate), $x, y \in V$;

b) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (omogeneitate), $x\in V$, $\alpha \in K$.

Se observă că *f* este un caz particular de operator liniar, în care codomeniul este chiar corpul K.

Observaţia 6.1.1 (Exerciţiu) 1) Condiţiile a) şi b) din definiţia de mai sus sunt echivalente cu condiţia

c) $f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y)$, $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$.

2) Deoarece *f* este un operator liniar avem $f(0) = 0$.

Exemplul 6.1.1 *Aplicaţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 + x_3$ este o formă liniară (Exerciţiu).*

Notăm cu V^* mulţimea formelor liniare definite pe V. Introducem operaţia de adunare a formelor liniare:

$$(f + g)(x) =_{def} f (x) + g(x),\ f, g \in V^*,\ x\in V$$

şi operaţia de înmulţire a unei forme liniare cu un scalar din corpul K:

$$(\alpha f)(x) =_{def} \alpha f(x),\ f \in V^*,\ \alpha \in K.$$

Dacă ţinem cont de observaţia că funcţionalele liniare sunt cazuri particulare de operatori liniari, atunci operaţiile introduse mai sus sunt de fapt operaţiile de adunare a operatorilor liniari şi respectiv înmulţire a acestora cu scalari. Exact ca în cazul operatorilor liniari se poate demonstra că V^* este un spaţiu vectorial real peste corpul K(exerciţiu).

Definiţia 6.1.2 *Spaţiul vectorial V^* se numeşte spaţiul vectorial dual sau spaţiul conjugat al spaţiului vectorial V.*

Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în V şi $x \in V$ şi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ coordonatele vectorului x în baza B. Definim aplicaţiile $u_i^*: V \to K$,

(6.1.1) $$u_i^*(x) = \xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

şi vom arăta că acestea sunt forme liniare.

Pentru a demonstra că u_i^* $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt forme liniare este suficient să verificăm dacă este îndeplinită condiţia c) din Observaţia 6.1.1. Fie $x, y \in V$ şi $\alpha, \beta \in K$. Dacă $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n$, $y = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \ldots + \zeta_n u_n$, atunci $\alpha x + \beta y = (\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1) u_1 + (\alpha\xi_2 + \beta\zeta_2) u_2 + \ldots + (\alpha\xi_n + \beta\zeta_n) u_n$ iar $u_i^*(\alpha x + \beta y) = \alpha\xi_i + \beta\zeta_i = \alpha\, u_i^*(x) + \beta\, u_i^*(y)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 6.1.2 $u_i^*(u_j) = 0$, dacă $i \neq j$ şi $u_i^*(u_i) = 0$.

Teorema 6.1.1 *Familia $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots u_n^*\}$ este o bază în spaţiul dual V^*.*

Demonstrație. Pentru început vom arăta că B^* este sistem liniar independent. Fie $\alpha_1 u_1^* + \alpha_2 u_2^* + \ldots + \alpha_n u_n^* = 0^*$ [1] o combinație nulă formată cu vectorii bazei B^*. Folosind observația de mai sus avem succesiv: $(\alpha_1 u_1^* + \alpha_2 u_2^* + \ldots + \alpha_n u_n^*)(u_i) = 0^*(u_i) \Leftrightarrow \alpha_1 u_1^*(u_i) + \alpha_2 u_2^*(u_i) + \ldots + \alpha_n u_n^*(u_i) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$, pentru orice indice i = 1, 2, …,n.

Deci B^* este sistem liniar independent. Acum vom demonstra că B^* este sistem de generatori pentru V^*. Fie $f \in V^*$ şi $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n \in V$. Avem $f(x) = f(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n) = \xi_1 f(u_1) + \xi_2 f(u_2) + \ldots + \xi_n f(u_n)$. Folosind definiția formelor liniare u_i^* şi comutativitatea corpului K obținem: $f(x) = f(u_1)\, u_1^*(x) + f(u_2)\, u_2^*(x) + \ldots + f(u_n)\, u_n^*(x)$.

Deci *f* se scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei B^*, ceea ce înseamnă că B^* este sistem de generatori pentru V^*. Demonstrația a fost încheiată.

Definiția 6.1.3 *Familia B^* din teorema de mai sus se numeşte baza duală a bazei B din V.*

Coordonatele unei forme liniare *f* în baza duală a bazei B din V $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ se numesc *coeficienții formei liniare f* în baza B. Din modul de definiție al coeficienților unei formei liniare *f* se deduce că aceştia sunt unic determinați de baza B (pentru forma liniară *f*).

Din teorema de mai sus rezultă şi afirmație reciprocă: dacă $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un sistem de scalari în K şi B este o bază fixată în V, atunci există şi este unică forma liniară *f* ai cărei coeficienți în baza B sunt $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

---

[1] 0^* este notație pentru elementul neutru la adunare din V^*, $0^*(x) = 0$, $x \in V$.

Exemplul 6.1.2 *Fie B = {u_1 =(1, 1, 1), u_2 =(1, 2, 0), u_3 =(3, 0, 0)} o bază în $\mathbf{R}^3$. Să se determine baza duală B^*, precum şi coeficienţii formei liniare de la Exemplul 6.1.1 în bază B.*

Fie x = (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ∈ $\mathbf{R}^3$. Coordonatele acestui vector în baza B sunt (ξ_3, $1/2\xi_2$ - $1/2\xi_3$, $1/3\xi_1$ - $1/6\xi_2$ - $1/6\xi_3$). Atunci, conform relaţiei (6.1.1) avem $u_1^*(x) = \xi_3$, $u_2^*(x) = 1/2\xi_2 - 1/2\xi_3$, $u_3^*(x) = 1/3\xi_1 - 1/6\xi_2 - 1/6\xi_3$.

Coeficienţii formei " f " sunt $f(u_1) = 3$, $f(u_2) = 4$ şi $f(u_3) = 0$.

Observaţia 6.1.3 Dacă $x \in V$, $x \neq 0$ atunci există o formă liniară *f* astfel încât $f(x) \neq 0$. Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza B = {$u_1, u_2, \ldots u_n$} atunci există i ∈ {1, 2,…n} astfel încât $\xi_i \neq 0$. Dacă luăm $f = u_i^*$ atunci $f(x) = \xi_i \neq 0$. Afirmaţia de mai sus se exprimă echivalent astfel : dacă $x \neq y$ atunci există $f \in V'^*$ astfel încât $f(x) \neq f(y)$.

Într-adevăr, dacă $v = x - y \neq 0$ atunci există $f \in V'^*$ astfel încât $f(v) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) \neq 0$.

O altă problemă care poate fi pusă în acest moment este aceea a determinării matricei de trecere de la baza B^* la baza B_1^* atunci când se cunoaşte matricea de trecere de la baza B la baza B_1. Soluţionarea acestei probleme permite, după cum am văzut în primul capitol, determinarea coeficienţilor unei forme liniare în noua bază B_1 atunci când aceştia sunt cunoscuţi în baza veche, B.

Teorema 6.1.2 *Dacă B = {$u_1, u_2, \ldots, u_n$} şi B_1 = {$w_1, w_2, \ldots, w_n$} sunt două baze în V şi $A = (a_{ij})_{i,j = 1,\ldots n}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B_1 atunci $(A^T)^{-1}$ este matricea de trecere* *de la baza B^* la baza B_1^*. Mai mult, coeficienții unei forme în bazele B și B_1 se schimbă tot cu matricea A.*

Demonstrație. Avem $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ şi $B_1^* = \{w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*\}$ unde elementele u_i^* şi respectiv w_i^* sunt definite de relația (6.1.1). Fie $\Lambda = (\alpha_{ij})_{i,j = 1,\ldots n}$ matricea de trecere de la baza B^* la baza B_1^*. Pentru a determina prima linie a acestei matrice observăm că $w_k^* = \alpha_{k1}u_1^* + \alpha_{k2}u_2^* + \ldots + \alpha_{kn}u_n^*$. Atunci pentru orice k, i $\in\{1, 2, \ldots, n\}$ avem $w_k^*(w_i) = \alpha_{k1}u_1^*(w_i) + \alpha_{k2}u_2^*(w_i) + \ldots + \alpha_{kn}u_n^*(w_i) \Leftrightarrow$ [*)] $\delta_k^i = \alpha_{k1}u_1^*(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n) + \alpha_{k2}u_2^*(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots +a_{in}u_n) + \ldots + \alpha_{kn}u_n^*(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n)$. Deci $\delta_k^i = \alpha_{k1} a_{i1} + \alpha_{k2} a_{i2} + \ldots + \alpha_{kn}a_{in}$ pentru toți k, i $\in\{1, 2, \ldots, n\}$. Relația de mai sus se scrie matricial astfel $I = \Lambda A^T$, unde I este matricea unitate de ordinul n cu elemente din K. Se cunoaşte din primul capitol că matricea de trecere A este inversabilă, deci

(6.1.2) $$\Lambda = (A^T)^{-1}.$$

Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt coeficienții unei forme liniare $f \in V^*$ în baza B şi $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ sunt coeficienții aceleiaşi forme în baza B_1 atunci rezultă, conform formulelor (1.4.2) şi (6.1.2),

(6.1.3) $$\xi' = A\xi$$

şi am obținut concluzia.

Exemplul 6.1.3 *Considerăm forma liniară f definită în exemplul 6.1.1 şi bazele $B = \{u_1 =(1, 0, 0), u_2 =(0, 1, 0), u_3 =(0, 0, 1)\}$, $B_1 = \{u_1 =(1, 1, 1), u_2 =(1, 2, 0), u_3 =(3, 0, 0)\}$ în $\boldsymbol{R}^3$.*

a) Să se determine matricea de trecere de la baza B^* la baza B_1^*.

b) Să se determine coeficienții formei liniare f în baza B_1^*.

[*] δ_i^j este simbolul lui Kronecker, $\delta_i^j = 0$, dacă $i \neq j$ şi $\delta_i^j = 1$, dacă $i = j$.

a) Matricea de trecere de la baza B la baza B_1 este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicând teorema de mai sus, rezultă că matricea de trecere la baza B^* la baza B_1^* este $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$. *b) Coeficienţii formei f în baza canonică B sunt* $f(u_1) =_{not} \xi_1 = 0$, $f(u_2) =_{not} \xi_2 = 2$, $f(u_3) =_{not} \xi_3 = 1$ *şi ţinând cont de formula (6.1.3) deducem că* $\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ *sau* $\xi_1' = 5$, $\xi_2' = 4$, $\xi_3' = 0$.

Propoziţia 6.1.1 *Fie f, g* $\in V^*$. *Dacă Ker f* $\subseteq$ *Ker g atunci există* $\alpha \in K$ *astfel încât* $g(x) = \alpha f(x)$, $x \in V$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că pentru fiecare $\alpha \in K$ există cel puţin un vector $x_\alpha \in V$ astfel încât $g(x_\alpha) \neq \alpha f(x_\alpha)$. Dacă $y \in$ Ker f atunci $y \in$ Ker g şi $g(y) - \alpha f(y) = 0$. Deci $x_\alpha \notin$ Ker f. Există $x_1 \notin$ Ker f astfel încât $g(x_\alpha)f(x_1) \neq g(x_1)f(x_\alpha)$. Într-adevăr dacă $g(x_\alpha)f(x) = g(x)f(x_\alpha)$, $x \in V$ - Ker f şi luăm $\alpha_1 = g(x_\alpha)(f(x_\alpha))^{-1}$ şi obţinem $g(x) = \alpha_1 f(x)$, $x \in V$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Atunci sistemul

$$g(ax_\alpha + bx_1) = 1,$$
$$f(ax_\alpha + bx_1) = 0,\ a,b \in K$$

admite o soluție unică, deoarece determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} g(x_\alpha) & g(x_1) \\ f(x_\alpha) & f(x_1) \end{vmatrix} = g(x_\alpha)f(x_1) - g(x_1)f(x_\alpha) \neq 0$. Dacă a, b este soluția acestui sistem, atunci $z = ax_\alpha + bx_1$ are proprietatea că $g(z) = 1$, $f(z) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza Ker f $\subseteq$ Ker g. Demonstrația este completă.

Teorema 6.1.3(*a lui Riesz)Dacă V este un spațiu euclidian real sau complex atunci pentru oricare formă liniară $f \in V^*$ există şi este unic un vector $x_0 \in V$ astfel încât $f(x) = <x, x_0>$, oricare ar fi $x \in V$.*

Demonstrație. Fie U = Ker f. Avem dim Ker f = dim V - 1. Fie $U^\perp$ complementul ortogonal al lui U. Deoarece dim $U^\perp$ = dim V - dim U = 1, putem spune că $\{x_1\}$ este o bază a lui $U^\perp$, oricare ar fi $x_1 \neq 0$, $x_1 \in U^\perp$.

Aplicația $g : V \to K$, $g(x) = <x, x_1>$ este o formă liniară. Conform definiției complementului ortogonal al unui subspațiu, deducem că Ker g $\supseteq$ U. Deci Ker g $\supseteq$ Ker f şi aplicând propoziția de mai sus, rezultă că există $\alpha \in K$ astfel încât $f(x) = \alpha g(x) \Leftrightarrow f(x) = \alpha<x, x_1>$. Luăm $x_0 = \alpha x_1$ şi avem $f(x) = <x, x_0>$. Existența a fost demonstrată.

Pentru a arăta că x_0 cu proprietatea de mai sus este unic, presupunem prin absurd că există $x_2 \neq x_0$ astfel încât $f(x) = <x, x_2>$.

Deci $<x, x_2 - x_0> = 0$, oricare ar fi $x \in V$, în particular şi pentru $x = x_2 - x_0$. Atunci $< x_2 - x_0, x_2 - x_0 > = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_0$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Exemplul 6.1.4. *Fie " f " forma liniară de la exemplul 6.1.1. Să se găsească vectorul $x_0 \in \boldsymbol{R}^3$ cu proprietatea că $f(x) = <x, x_0>$, oricare ar fi*

$x \in \mathbf{R}^3$.

Dacă $x_0 = (a_1, a_2, a_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ atunci relația $f(x) = <x, x_0>$, $x \in \mathbf{R}^3$ este echivalentă cu $2x_2 + x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, oricare ar fi $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$. Identificând coeficienții celor două polinoame cu 3 variabile, obținem $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$. Deci $x_0 =(0, 2, 1)$.

6.2 Forme biliniare

I. Definiția formei biliniare. Matrice asociată

Fie V şi W două spații vectoriale peste corpul numerelor reale **R**.

Definiția 6.2.1 *O aplicație $B : V \times W \to \mathbf{R}$ care îndeplineşte condițiile de mai jos, pentru orice x_1, $x_2 \in V$, y_1, $y_2 \in W$ α, $\beta \in \mathbf{R}$, se numeşte formă biliniară.*

a) $B(x_1 + x_2, y_1) = B(x_1, y_1) + B(x_2, y_1)$;

b) $B(\alpha x_1, y_1) = \alpha B(x_1, y_1)$;

c) $B(x_1, y_1 + y_2) = B(x_1, y_1) + B(x_1, y_2)$;

d) $B(x_1, \alpha y_1) = \alpha B(x_1, y_1)$.

Observația 6.2.1 1) Condițiile a), b), c) şi d) de mai sus sunt echivalente cu condițiile

a)' $B(\alpha x_1 + \beta x_2, y_1) = \alpha B(x_1, y_1) + \beta B(x_2, y_1)$;

b') $B(x_1, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x_1, y_1) + \beta B(x_1, y_2)$;

2) Avem $B(0, y) = B(x, 0) = 0$ oricare ar fi $x \in V$, $y \in W$. Într-adevăr din definiția de mai sus rezultă că pentru $x \in V$, fixat, aplicația $y \to B(x, y)$

definită pe W cu valori reale este o formă liniară. De asemenea, dacă fixăm $y \in W$ atunci aplicaţia $x \to B(x, y)$ definită pe V cu valori reale este tot o formă liniară. Din Observaţia 6.1.1 rezultă concluzia.

Exemplul 6.2.1. *Se consideră aplicaţiile*

a) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 - 3x_2y_2 + 2x_3y_2 + x_3y_4$, *unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$;

b) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 - x_2^2 y_2 + 3x_3y_3$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Să se verifice dacă aplicaţiile de mai sus sunt forme biliniare.

a) Se constată că sunt verificate condiţiile a') şi b') din Observaţia 6.2.1, deci B(.,.) este o formă biliniară. b) Fie $\alpha = 2$, $x_0 = (0, 1, 0)$, $y_0 = (0, 1, 1)$. *Avem* $B(\alpha x_0, y_0) = -4$ *în timp ce* $\alpha B(x_0, y_0) = -2$. *Deoarece* $B(\alpha x_0, y_0) \neq \alpha B(x_0, y_0)$ *rezultă că nu este îndeplinită condiţia b) din Definiţia 6.2.1 şi B(.,.) nu este o formă biliniară.*

Fie acum $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în V şi $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ o bază în W. Dacă $x = \xi_1u_1 + \xi_2u_2 + \ldots + \xi_nu_n \in V$ şi $y = \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_mw_m \in W$ atunci $B(x, y) = B(\xi_1u_1 + \xi_2u_2 + \ldots + \xi_nu_n, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_mw_m)$ şi ţinând cont de proprietăţile a') şi b') ale formei biliniare avem succesiv $B(x, y) = \xi_1B(u_1, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_mw_m) + \xi_2B(u_2, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_mw_m) + \ldots + \xi_nB(u_n, \zeta_1w_1 + \zeta_2w_2 + \ldots + \zeta_mw_m) \Leftrightarrow$

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \xi_i\zeta_jB(u_i, w_j).$$

Notând $a_{ij} = B(u_i, w_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ obţinem

(6.2.1) $$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \xi_i\zeta_j.$$

Definiţia 6.2.2 *Matricea $A = (a_{ij})_{i = 1,n,\ j = 1,m}$ definită mai sus se numeşte matricea asociată formei biliniare B(.,.) în perechea de baze B şi B_1 iar elementele a_{ij} se numesc coeficienţii formei biliniare în aceeaşi pereche de baze.*

Observaţia 6.2.2 a) Expresia matricială a formulei (6.2.1) este B(x, y) $=\xi^T A\zeta$, unde ξ^T şi respectiv ζ^T sunt matricele linie ($\xi_1\ \xi_2\ldots\xi_n$) şi respectiv ($\zeta_1\ \zeta_2\ldots\zeta_m$).

b) Dacă V = W atunci se consideră aceeaşi bază B = $\{u_1, u_2, \ldots,u_n\}$ pentru V şi W, elementele matricei asociate formei biliniare fiind $a_{ij} = B(u_i, u_j)$, i, j = 1, 2,…,n.

Exemplul 6.2.2. *Se consideră forma biliniară definită în exemplul 6.2.1. Să se determine matricea asociată acestei forme biliniare în perechea de baze B = $\{u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 3, 0), u_3 = (- 2, 0, 0)\}$, în $\mathbf{R}^3$ şi $B_1 = \{w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 2, 0), w_3 = (1, -1, 0, 0) , w_4 = (3, 0, 0, 0)\}$, în $\mathbf{R}^4$.*

Calculăm $a_{11} = B(u_1, w_1) = 1 - 3 + 4 + 2 = 4$, $a_{12} = B(u_1, w_2) = 1- 3 + 4 + 0 = 2$ etc. şi obţinem matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -8 & 10 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Observaţia 6.2.3 Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea matricelor $A \in M_{nxm}(\mathbf{R})$ şi mulţimea formelor biliniare definite pe V x W, unde $\dim_{\mathbf{R}} V = n$ şi $\dim_{\mathbf{R}} W = m$. Într- adevăr dacă B(.,.) este o formă biliniară definită pe V x W şi (B, B_1) este o pereche de baze (B în V şi B_1 în W) fixată, atunci, am văzut mai sus că, formei biliniare B(.,.) i se asociază în mod unic o matrice $A\in M_{nxm}(\mathbf{R})$. Reciproc, dacă $A\in M_{nxm}(\mathbf{R})$ $A = (a_{ij})_{i = 1,n,\ j = 1,m}$, atunci definim aplicaţia $B : V \times W \to \mathbf{R}$, B(x, y) =

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,\xi_i\zeta_j$, unde $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ şi respectiv $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$ sunt coordonatele vectorilor x şi respectiv y în bazele B şi B_1. Funcţia definită mai sus este o formă biliniară (exerciţiu).

Observaţia 6.2.4 Fie B : $\mathbf{R}^n x \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i y_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, o formă biliniară (exerciţiu). Dacă B şi respectiv B_1 sunt bazele canonice în $\mathbf{R}^n$ şi $\mathbf{R}^m$ atunci matricea asociată formei biliniare în perechea de baze aleasă este $A = (a_{ij})_{i\,=\,1,n, j\,=\,1,m.}$, adică elementul a_{ij} al matricei A este de fapt coeficientul lui $x_i y_j$ din expresia formei biliniare.

Exemplul 6.2.3. *Matricea asociată formei biliniare de la exemplul precedent în perechea formată din bazele canonice din* $\boldsymbol{R}^3$ *şi respectiv* $\boldsymbol{R}^4$ *este* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II. Schimbarea matricei asociate când se schimbă bazele

Ca şi în cazul operatorilor liniari, se pune problema determinării legăturii între matricele asociate formei biliniare în perechi de baze diferite. Astfel, avem teorema de mai jos:

Teorema 6.2.1 *Dacă* $A = (a_{ij})_{i\,=\,1,n,\; j\,=\,1,m}$ *şi* $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i\,=\,1,n,\; j\,=\,1,m}$ *sunt matricele asociate formei biliniare B(.,.) în perechile de baze (B, B'), (B_1, B_1'), diferite şi M, respectiv P, sunt* *matricele de trecere de la baza B la baza B_1 în V şi respectiv de la baza B' la baza B_1' în W, atunci*

$$\Lambda = M\,A\,P^T. \tag{6.2.2}$$

Demonstraţie. Fie B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, B' = $\{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ baze în V şi $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, $B_1' = \{w_1', w_2', \ldots, w_m'\}$ baze în W.

Conform definiţiei matricei asociate unei forma biliniare B(.,.) avem $\lambda_{ij} = B(u_i', w_j') = B(m_{i1}u_1 + \ldots + m_{in}u_n, p_{j1}w_1 + \ldots + p_{jm}w_m)$. Folosind proprietăţile a) - d) din Definiţia 6.2.1 obţinem

$$\lambda_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ir}p_{jk}B(u_r, w_k) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ir}a_{rk}p_{jk}.$$

Deci λ_{ij} este elementul de pe linia i şi coloana j a matricei M A P^T. Demonstraţia este completă.

Exemplul 6.2.4 *Să se rezolve problema de la exemplul 6.2.1 folosind formula (6.2.2). Este cunoscută matricea A asociată formei biliniare B(.,.) în perechea de baze canonice ale spaţiilor pe care aceasta este definită (vezi exemplul 6.2.3). Pentru a determina matricea asociată formei în perechea formată din bazele de la exemplul 6.2.2, este suficient să determinăm matricele care dau schimbările de baze în spaţiile $\boldsymbol{R}^3$ şi $\boldsymbol{R}^4$. Astfel, conform definiţiei matricei de trecere şi respectând notaţiile din Teorema 6.2.1, avem* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *şi* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicăm formula (6.2.2) şi avem $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -8 & -8 & 10 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Observația 6.2.5 Dacă V = W şi M este matricea schimbării de bază în spațiul V atunci formula (6.2.2) devine

$$\Lambda = M\, A\, M^T.$$

Definiția 6.2.3 *a) Două matrice de acelaşi tip sunt echivalente dacă reprezintă aceeaşi formă biliniară în perechi de baze diferite.*

b) Două matrice de acelaşi ordin sunt asemenea dacă reprezintă aceeaşi formă biliniară în baze diferite.

Exemplul 6.2.5 *Matricele A şi Λ din exemplul de mai sus sunt echivalente. Dacă este dată forma biliniară $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 - x_2y_1 + 2\, x_2y_2 - x_3y_3$, atunci matricea asociată ei în baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este A =* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*, conform Observației 6.2.4. Pentru a determina matricea asociată formei biliniare în baza $B_1 = \{u_1 = (-1, -1, -2), u_2 = (3, -1, 0), u_3 = (2, 0, 0)\}$ este suficient să observăm că matricea de trecere de la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ la baza B_1 este M =* $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Aplicăm formula (6.2.2) şi avem Λ =* $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 6 & 14 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Matricele A şi Λ sunt asemenea.

Teorema 6.2.2 *a) Două matrice $A, \Lambda \in M_{nm}(\mathbf{R})$ sunt echivalente dacă şi numai dacă există alte două matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$, $P \in M_m(\mathbf{R})$, inversabile astfel încât $\Lambda = M\, A\, P^T$.*

b) Două matrice $A, \Lambda \in M_n(\mathbf{R})$ sunt asemenea dacă şi *numai dacă există matricea $M \in M_n(\mathbf{R})$, inversabilă astfel încât $\Lambda = M\,A\,M^T$.*

Demonstrație. a) Dacă matricele A, $\Lambda \in M_{nm}(\mathbf{R})$ sunt echivalente, atunci concluzia rezultă aplicând Teorema 6.2.1. Reciproc, date fiind matricele A, $\Lambda \in M_{nm}(\mathbf{R})$ definim forma biliniară B: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i y_j$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Dacă vom schimba bazele din $\mathbf{R}^n$ şi respectiv $\mathbf{R}^m$ cu ajutorul matricelor M şi respectiv P, atunci matricea asociată formei biliniare în noile baze este $M\,A\,P^T$, adică chiar matricea Λ. Pentru a demonstra punctul b) se procedează asemănător (exercițiu).

III. Spațiile nule ale unei forme biliniare

Dacă B: $V \times W \to \mathbf{R}$ este o formă biliniară atunci introducem mulțimile:

$$V_0 = \{x \in V / \ B(x, y) = 0, \text{ oricare ar fi } y \in W\} \subseteq V,$$

$$W_0 = \{y \in W / \ B(x, y) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in V\} \subseteq W.$$

Propoziția 6.2.1 *Mulțimile de vectori V_0, W_0, împreună cu operațiile de adunare a vectorilor şi înmulțire a acestora cu scalari definite pe spațiile V şi respectiv W, au o structură de subspații vectoriale.*

Demonstrație. Deoarece $0 \in V_0$, deducem că $V_0 \neq$ |. Dacă $x_1, x_2 \in V_0$ atunci $B(x_1, y) = 0$, $B(x_2, y) = 0$, oricare ar fi $y \in W$. De aici deducem că

$B(x_1 + x_2, y) = 0$, $B(\alpha x_1, y) = 0$, oricare ar fi $y \in W$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Deci $x_1 + x_2$, $\alpha x_1 \in V_0$, ceea ce înseamnă că V_0 este subspațiu vectorial al lui V. Analog se demonstrează că W_0 este subspațiu vectorial al lui W.

Definiția 6.2.4 *Subspațiile vectoriale V_0 şi W_0 definite mai sus se numesc subspațiile nule în primul şi respectiv al doilea argument ale formei biliniare B(.,.).*

Avem următoarea teoremă de caracterizare a subspațiilor nule.

Teorema 6.2.3 *Fie B(.,.) o formă biliniară definită pe V* x *W. a) Dacă $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ este o bază în W atunci $x \in V_0$ dacă şi numai dacă $B(x, w_i) = 0$, i =1, 2, .., m.*

b) Dacă $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în V atunci $y \in W_0$ dacă şi numai dacă $B(u_i, y) = 0$, i =1, 2 ,.., n.

Demonstrație. Dacă $x \in V_0$ atunci, conform definiției lui V_0, rezultă că $B(x, w_i) = 0$, i =1,2,..,m. Reciproc, fie $y \in W$, $y = \zeta_1 w_1 + \zeta_2 w_2 + \ldots + \zeta_n w_n$. Dacă $B(x, w_i) = 0$, i =1, 2, .., m atunci $B(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i B(x, w_i) = 0$. Deci, conform definiției, $x \in V_0$. Raționând asemănător se demonstrează şi punctul b).

Propoziția 6.2.2. *Fie B(.,.) o formă biliniară definită pe V* x *W şi B, respectiv B_1 baze în V şi respectiv W. Dacă matricea A asociată formei biliniare în perechea de baze B şi B_1 are rangul r şi V_1, respectiv W_1, sunt subspațiile complementare ale subspațiilor nule V_0 şi W_0 atunci dim W_1 = dim V_1 = r.*

Demonstrație. Deoarece dim V_1 = dim V - dim V_0, conform Observației 1.8.5, este suficient să determinăm dimensiunea subspațiului vectorial V_0 pentru a afla dimensiunea lui V_1. Dacă B şi B_1 sunt bazele în V şi W considerate în Teorema 6.2.3 atunci $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n \in V_0$ dacă şi numai dacă $B(x, w_j) = 0$, j =1, 2, .., m. Deci coordonatele $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ale lui x în baza B verifică sistemul:

$$\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{21} + \ldots + \xi_n a_{n1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_1 a_{m1} + \xi_2 a_{2m} + \ldots + \xi_n a_{nm} = 0$$

Matricea sistemului este A^T şi are rangul *r*. Aplicăm Teorema 1.7.3 şi deducem că mulțimea U a soluțiilor acestui sistem este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{R}^n$ de dimensiune n - r. Deoarece subspațiul V_0 este izomorf cu U, deducem că $\dim_{\mathbf{R}} V_0 = n - r$ (se aplică Teorema 1.6.1).
Deci într-adevăr $\dim_{\mathbf{R}} V_1 = r$. În acelaşi mod se stabileşte că $\dim_{\mathbf{R}} W_1 = r$.

Din teorema de mai sus se deduce că rangul a două matrice echivalente, respectiv asemenea este acelaşi. Într-adevăr, dimensiunea subspațiile nule asociate unei forme biliniare este invariantă la schimbarea bazele spațiilor de definiție ale formei. Deci rangul oricărei matrice asociate formei biliniare, în orice pereche de baze, este acelaşi (este egal cu dimensiunea subspațiilor complementare subspațiilor nule) Definiția 6.2.3 completează raționamentul.

Definiția 6.2.5 *Numim rang al formei biliniare B(.,.), dimensiunea comună a subspațiilor complementare subspațiilor nule.*

Observația 6.2.6 Dacă V = W, atunci subspațiile nule în primul şi al doilea argument sunt în general diferite, dar au aceeaşi dimensiune, conform Teoremei 6.2.3.

Definiția 6.2.6 *Spunem că forma biliniară B(.,.) definită pe V* x *V este nedegenerată dacă spațiile nule sunt formate numai din vectorul 0. În caz contrar forma se numeşte degenerată.*

Exemplul 6.2.6 *Se consideră forma biliniară* $B : \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_4 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ *. Să se determine subspațiile nule ale formei şi să se calculeze rangul formei.*

Avem $V_0 = \{x \in \mathbf{R}^3 / 3x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_4 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3 = 0$, *oricare ar fi* $y_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, 3, 4\}$. *Deoarece* $3x_1y_1 + (2x_2 - x_1)y_2 - 3x_3y_3 + x_1y_4 = 0$ *pentru toți* $y_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow 3x_1 = 0, 2x_2 - x_1 = 0, -3x_3 = 0, x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *rezultă că* $V_0 = (0)$.

Din definiția lui W_0 *deducem că* $y \in W_0 \Leftrightarrow 3x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_4 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3 = 0$, *oricare ar fi* $x_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow 3x_1(y_1 - y_2 + y_4) + 2x_2y_2 - 3x_3y_3 = 0$, *oricare ar fi* $x_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow y_1 - y_2 + y_4 = 0, 2y_2 = 0, -3y_3 = 0$. *Sistemul obținut este compatibil nedeterminat şi are soluția* $y_1 = \alpha \in \boldsymbol{R}$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = \alpha$. *Deci* $W_0 = \{\alpha(1,0,0,1), \alpha \in \boldsymbol{R}\}$ *şi* $\dim W_0 = 1$. *Rangul formei este egal cu* $4 - \dim_{\boldsymbol{R}} W_0$, *adică cu 3.*

IV. Forme biliniare simetrice

Definiţia 6.2.7 *Spunem că forma biliniară B(.,.) definită pe V x V este o formă biliniară simetrică dacă B(x, y) = B(y, x).*

Observaţia 6.2.7 Dacă B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în V, atunci condiţia din definiţia de mai sus implică relaţiile $a_{ij} = B(u_i, u_j) = B(u_j, u_i) = a_{ji}$ oricare ar fi i, j = 1,..n, ceea ce înseamnă că matricea asociată formei biliniare într-o bază oarecare a spaţiului este simetrică. Este adevărată şi afirmaţia reciprocă, adică dacă matricea asociată formei biliniare B(.,.) într-o bază a spaţiului V este simetrică, atunci forma biliniară este simetrică.

Exemplul 6.2.7 *Să se verifice care din aplicaţiile de mai jos este o formă biliniară simetrică:*

a) *B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + 3x_2y_2 - 4x_3y_3$, *unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$;

b) *B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + 3x_2y_2 + 3x_2y_1 - x_3y_1 - 4x_3y_3$;

c) *B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + 3x_2y_2 + 3y_1x_2 - y_1x_3 - 4x_3y_3 + 1$.

Fie B = $\{E_1, E_2, E_3\}$, *baza canonică în* $\boldsymbol{R}^3$. *a) Se verifică axiomele a) - d) din definiţia formei biliniare (Exerciţiu). Deoarece* $B(E_1, E_2) = 3$ *iar* $B(E_2, E_1) = 0$ *şi* $B(E_1, E_2) \neq B(E_2, E_1)$, *rezultă, conform definiţiei de mai sus, că B(.,.) nu este formă biliniară simetrică.*

b) Aplicaţia B(.,.) este o formă biliniară (Exerciţiu). Matricea asociată formei în baza canonică este

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *şi, deoarece este simetrică, deducem, conform observaţiei de mai sus, că forma biliniară este simetrică.*

c) Aplicaţia nu este formă biliniară deoarece $3 = B(2E_1, E_1) \neq 2B(E_1, E_1) = 4$ *şi nu avem satisfăcută condiţia de omogeneitate în primul argument.*

Exemplul 6.2.8 *Să se determine forma biliniară simetrică definită pe* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3$*, a cărei matrice asociată în baza* $B = \{u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, -3, 0), u_3 = (3, 0, 0)\}$ *este* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se găsească expresia formei biliniare în B şi în baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^3$.

b) Să se calculeze spaţiile nule în primul şi al doilea argument şi să se stabilească dacă forma este nedegenerată sau nu.

Dacă $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$, $y = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3 \in \boldsymbol{R}^3$*, atunci se ştie că* $B(x, y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, \xi_i \zeta_j$*. Deci expresia formei în baza B este* $B(x, y) = \xi_1\zeta_1 - 2\xi_1\zeta_2 - 2\xi_2\zeta_1 + 3\xi_2\zeta_2$*. Deoarece matricea M de trecere de la baza B la baza canonică este dată de formula* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *aplicăm formula (6.2.2) pentru a determina matricea* Λ *asociată formei biliniare simetrice în baza canonică şi obţinem*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Dacă $x = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$, $y = y_1E_1 + y_2E_2 + y_3E_3 \in \mathbf{R}^3$, *unde* E_1, E_2, E_3 *sunt vectorii bazei canonice, atunci* $B(x, y) = 1/3\, x_2y_2 + 1/2x_2y_3 + 1/2\, x_3y_2 + 2/3\, x_3y_3$.

b) Din definiția spațiilor nule deducem că $x \in V_0 \Leftrightarrow y_2(1/3x_2 + 1/2x_3) + y_3(1/2\ x_2 + 2/3x_3) = 0$, *oricare ar fi* y_1, y_2, $y_3 \in \mathbf{R}$. *Deci* $x \in V_0 \Leftrightarrow$ *coordonatele vectorului x în baza canonică verifică sistemul* $1/3x_2 + 1/2x_3 = 0$, $1/2\ x_2 + 2/3x_3 = 0$. *Rezolvând sistemul deducem că* $V_0 = \{(\alpha, 0,0),\ \alpha \in \mathbf{R}\} \neq (0)$. *Analog, se stabileşte că subspațiul nul în al doilea argument coincide cu* V_0. *În concluzie, forma biliniară este degenerată.*

Observația 6.2.8 Spațiile nule în primul şi al doilea argument ale unei formei biliniare simetrice coincid. (Pentru demonstrație se foloseşte definiția spațiilor nule şi cea a formai biliniare simetrice). Dacă o formă biliniară simetrică este nedegenerată, atunci matricea asociată ei, în orice bază a spațiului pe care este definită, este nesingulară.

Teorema 6.2.4 *Fie B(.,.) o formă biliniară simetrică de rang r, definită pe V* x *V,* $\dim_{\mathbf{R}} V = n$. *Atunci există o bază* $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots, u_n\}$ *în V în care matricea asociată formei biliniare are forma*

$$(6.2.3) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mai mult, restricția[*)] *formei biliniare B(.,.) la subspațiul generat de familia $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ este nedegenerată.*

Demonstrație. Dacă V_0 este spațiul nul asociat formei biliniare simetrice B(.,.), atunci, conform Propoziției 6.2.2, rezultă că $\dim_{\mathbf{R}} V_0 = n - r$.

Fie V_1 un subspațiu complementar al spațiului vectorial V_0. Dacă $B = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ este o bază în V_1 şi $B' = \{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ este o bază în V_0, atunci se ştie că $B \cup B'$ este bază în V. Din Teorema 6.2.3 rezultă că

$$a_{ij} = B(u_i, u_j) = 0 \text{ şi } B(u_j, u_i) = a_{ji} = 0,$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $j \in \{ r+1, r+2, \dots, n\}$. Deci în baza $B \cup B'$ matricea asociată formei este dată de relația (6.2.3).

Restricția $B_1(.,.)$ a formei biliniare B(.,.) la V_1 este o formă biliniară nedegenerată. Într-adevăr, dacă ar exista $x \neq 0$ astfel încât $B_1(x, y_1) = 0$, oricare ar fi $y_1 \in V_1$, atunci, conform definiției restricției unei forme biliniare simetrice, avem $B(x, y_1) = 0$, $y_1 \in V_1$. Fie $y \in V$. Atunci există şi sunt unici $y_1 \in V_1$ şi $y_2 \in V_0$ astfel încât $y = y_1 + y_2$. Deoarece $B(x, y) = B(x, y_1) + B(x, y_0) = 0$, conform celor spuse mai sus şi conform definiției

[*] Prin restricția unei forme biliniare simetrice $B(.,.) : V \times V \to R$ la subspațiul V_1 al lui V înțelegem aplicația $B_1(.,.) : V_1 \times V_1 \to R$, $B_1(x, x) = B(x, x)$, care este tot o formă biliniară simetrică.

spaţiului nul V_0, rezultă că $x \in V_0$. Dar $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, şi am obţinut o contradicţie. Deci $B_1(.,.)$ este nedegenerată.

Definiţia 6.2.8 *Spunem că forma biliniară B(.,.) simetrică, definită pe V x V, este pozitiv definită dacă $B(x, x) > 0$, oricare ar fi $x \in V$, $x \neq 0$. Forma este negativ definită dacă $B(x, x) < 0$, oricare ar fi $x \in V$, $x \neq 0$.*

Definiţia 6.2.9 *Forma biliniară B(.,.) simetrică, definită pe V x V, este pozitiv (respectiv negativ) semidefinită dacă $B(x, x) \geq 0$, (respectiv $B(x, x) \leq 0$) oricare ar fi $x \in V$ şi există $x \neq 0$ astfel încât $B(x, x) = 0$.*

Definiţia 6.2.10 *Dacă forma biliniară B(.,.) simetrică, definită pe V x V, nu este nici pozitiv, nici negativ semidefinită, atunci spunem că este nedefinită.*

Observaţia 6.2.9 Spaţiul nul al unei formei biliniare simetrice pozitiv (negativ) definită (căci putem vorbi despre un singur spaţiu nul, conform Observaţiei 6.2.8) este egal cu spaţiul (0) şi forma biliniară este nedegenerată. Într-adevăr, dacă $x \in V_0$, atunci $B(x, y) = 0$, oricare ar fi $y \in V$. În particular avem şi $B(x, x) = 0$, dar forma fiind pozitiv (negativ) definită rezultă că $x = 0$. Deci $V_0 = (0)$.

Exemplul 6.2.9 *Forma biliniară simetrică $B: \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ este pozitiv definită deoarece $B(x, x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0$ şi $B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.*

În acelaşi mod se verifică faptul că forma biliniară simetrică B: $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$*,* $B(x, y) = -x_1y_1 - 2x_2y_2 - 4x_3y_3$ *este negativ definită. Dacă vom considera forma biliniară simetrică B:* $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$*,* $B(x, y) = x_1y_1 - 3x_2y_2 + 4x_3y_3$*, se constată că* $B((1,0,1),(1,0,1)) = 5 > 0$*, în timp ce* $B((0,1,0),(0,1,0)) = -3 < 0$*. În acest caz, forma nu este nici pozitiv, nici negativ semidefinită şi este nedefinită.*

Teorema 6.2.5 *Dacă B(.,.) este o formă biliniară, simetrică, nedegenerată, definită pe V* x *V, atunci există cel puțin o bază în V astfel încât minorii principali din matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ *asociată formei în baza respectivă să fie nenuli.*

Demonstrație. Se foloseşte metoda inducției matematice pentru a demonstra că există o bază B' în V astfel încât pentru fiecare k =1, .., n minorul principal de ordin k să fie nenul. Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o bază în V. Demonstrația se desfăşoară în două etape:

A. Vom demonstra că pentru k =1 există o bază în V astfel încât $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$. Într-adevăr, dacă $a_{11} \neq 0$ atunci afirmația se verifică. Deoarece forma biliniară, fiind nedegenerată, este neidentic nulă, avem următoarele cazuri:

A1) există cel puțin un element $a_{ii} \neq 0$, $i \in \{2,\ldots n\}$. Facem schimbarea de bază $v_1 = u_i$, $v_2 = u_2, \ldots, v_i = u_1, \ldots, v_n = u_n$ şi avem $B(v_1, v_1) = B(u_i, u_i) = a_{ii} \neq 0$.

A2) $a_{ii} = 0$, $i = 1,\ldots n$ şi există $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$, $i, j = 1,\ldots,n$. Facem schimbarea de bază $v_i = u_i$, $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, $v_j = u_i + \beta u_j$, $\beta \neq 0$.

Obținem $B(v_j, v_j) = 2\beta\, a_{ij} \neq 0$ şi suntem în situația de la punctul A1). Se face schimbarea de bază corespunzătoare şi rezultă concluzia.

B. Presupunem că am găsit baza $B_k = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, în care matricea asociată formei B(.,.) are proprietatea că minorii principali Δ_i, $i = 1,\ldots,k$, $k > 1$ sunt nenuli. Vom arăta că există o bază B_{k+1} în care minorii principali Δ_i sunt nenuli, $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k + 1$.

B1) Dacă există un minor de ordinul $k + 1$, obţinut din Δ_k prin bordarea lui cu o linie şi o coloană de acelaşi indice $j > k$, care este diferit de zero, atunci în baza $v_1 = g_1,\ldots, v_k = g_k$, $v_{k+1} = g_j \ldots, v_j = g_{k+1},.., v_n = g_n$ minorii principali Δ_i, $i = 1, \ldots, k + 1$ sunt nenuli.

B2) Dacă nu se întâmplă situaţia de la punctul B1) atunci există un minor nenul, de rang k+1, Δ_{pj}, obţinut prin bordarea lui Δ_k cu o linie de indice p şi o coloană de indice j, $p \neq j$, $p, j > k$. Atunci se face schimbarea de bază

$v_i = g_i$, $i = 1, \ldots, p - 1, p + 1,\ldots,n$, $v_p = g_p + \beta g_j$, $\beta \neq 0$.

Minorul obţinut prin bordarea minorului de ordin k cu linia şi coloana p este nenul. Într-adevăr, dacă $i \neq p$, $B(v_i, v_p) = B(v_i, g_p + \beta g_j) = a_{ip} + \beta a_{ij}$ şi minorul de ordin k + 1 obţinut ca mai sus este

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} & \alpha_{1p} + \beta\alpha_{1j} \\ . & \ldots & . & . \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} & \alpha_{kp} + \beta\alpha_{kj} \\ \alpha_{p1} + \beta\alpha_{j1} & \ldots & \alpha_{pk} + \beta\alpha_{jk} & \alpha_{pp} + 2\beta\alpha_{pj} + \beta^2\alpha_{jj} \end{vmatrix}.$$

Folosind proprietăţile determinanţilor avem

$$\Delta_{k+1}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1k} & \alpha_{1p} \\ . & ... & . & . \\ \alpha_{k1} & ... & \alpha_{kk} & \alpha_{kp} \\ \alpha_{p1}+\beta\alpha_{j1} & ... & \alpha_{pk}+\beta\alpha_{jk} & \alpha_{pp}+\beta\alpha_{pj} \end{vmatrix} +$$

$$\beta\begin{vmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1k} & \alpha_{1j} \\ . & ... & . & . \\ \alpha_{k1} & ... & \alpha_{kk} & \alpha_{kj} \\ \alpha_{p1}+\beta\alpha_{j1} & ... & \alpha_{pk}+\beta\alpha_{jk} & \alpha_{pj}+\beta\alpha_{jj} \end{vmatrix} = 2\beta\Delta_{jp} \neq 0.$$

Acum suntem în condițiile de la punctul B1) şi făcând schimbarea de bază indicată la punctul respectiv se obține concluzia.

Exemplul 6.2.10 *Să se verifice dacă forma biliniară simetrică B :* $\boldsymbol{R}^3$x $\boldsymbol{R}^3$ $\to \boldsymbol{R}$, *B(x, y) =* $x_1y_2 + x_2y_1 - 1/2y_1x_3 - 1/2x_1y_3 + y_2x_3 + x_2y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ *este nedegenerată. În caz afirmativ să se găsească o bază în care forma biliniară simetrică are proprietatea din teorema de mai sus.*

Matricea asociată formei biliniare în baza canonică din $\boldsymbol{R}^3$, *B* $=\{E_1, E_2, E_3\}$ *este A =* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Se observă că ne aflăm în situația A2) din demonstrația teoremei de mai sus. Alegem* $a_{12} \neq 0$ *şi facem schimbarea de bază* $u_2 = E_2$, $u_3 = E_3$, $u_1 = E_1 + E_2$. *În această bază matricea asociată este A =* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *şi se constată că aceasta are proprietatea că toți minorii săi principali sunt nenuli.*

6.3 Forme pătratice. Reducerea la forma canonică

I. Forme pătratice. Definiţie. Proprietăţi. Matrice asociată

Fie B : V x V $\rightarrow$ **R**, o formă biliniară simetrică, unde V este un spaţiu vectorial real.

Definiţia 6.3.1 *Aplicaţia A: V $\rightarrow$ **R** definită de formula A(x) = B(x, x) se numeşte forma pătratică asociată formei biliniare simetrice B(.,.) iar forma B(.,.) se numeşte forma polară a formei pătratice A.*

Propoziţia 6.3.1 *Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea formelor pătratice definite pe spaţiul vectorial V şi mulţimea formelor biliniare simetrice definite pe V* x *V.*

Demonstraţie. Faptul că fiecărei forme biliniare simetrice B(.,.) i se asociază în mod unic o formă pătratică rezultă din definiţia de mai sus. Pentru a demonstra afirmaţia reciprocă, vom demonstra mai întâi că între o formă biliniară simetrică şi forma pătratică asociată există relaţia

(6.3.1) $$B(x, y) = \frac{1}{2}[A(x + y) - A(x) - A(y)].$$

Într-adevăr A(x + y) = B(x + y, x + y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y) = A(x) + 2B(x, y) + A(y) şi de aici rezultă concluzia. Deci fiecărei forme pătratice i se poate asocia o formă biliniară.

Exemplul 6.3.1 *a) Să se determine forma pătratică asociată formei biliniare simetrică B: $\mathbf{R}^3$* x *$\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $B(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 + 4x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. b) Dacă A: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$,*

$A(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3^2$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ este o formă pătratică, să se determine forma sa polară.

a) $A(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$. b) Forma polară este $B(x, y) = \frac{1}{2}[A(x + y) - A(x) - A(y)] = 2x_1y_1 + 3/2x_1y_2 - x_1y_3 + 3/2x_2y_1 - x_3y_1 + x_3y_3$, conform relației (6.3.1).

Definiția 6.3.2 *Forma pătratică A: V $\rightarrow$ **R** este pozitiv definită (respectiv negativ definită) dacă forma sa polară este pozitiv definită (respectiv negativ definită). Analog se definesc noțiunile de formă pătratică pozitiv semidefinită (respectiv negativ semidefinită) sau de formă pătratică nedefinită.*

Observația 6.3.1 O reformulare a definiției de mai sus este următoarea: forma pătratică A este:

- pozitiv (negativ) definită $\Leftrightarrow$ $A(x) > 0$ ($A(x) < 0$), $x \in V$, $x \neq 0$;

- pozitiv (negativ) semidefinită $\Leftrightarrow$ $A(x) \geq 0$,($A(x) \leq 0$) $x \in V$ şi există $x \in V$, $x \neq 0$ astfel încât $A(x) = 0$.

- nedefinită dacă A(.) ia atât valori pozitive cât şi valori negative.

Ca şi în cazul formelor biliniare simetrice, se pune problema asocierii la fiecare formă pătratică A: V $\rightarrow$ **R** a unei matrice într-o bază B a spațiului vectorial real V.

Definiția 6.3.3 *Se numeşte matrice asociată formei pătratice A: V $\rightarrow$ **R** în baza B a spațiului V, matricea asociată formei sale polare în aceeaşi bază.*

Dacă B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în V şi B(.,.) este forma biliniară simetrică, polară a formei pătratice A(.) şi $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n \in V$ atunci $A(x) = B(x, x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i \xi_j$, conform relaţiei (6.2.1).

Expresia de mai sus se scrie matricial astfel

(6.3.2) $$A(x) = \xi^T A \xi,$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j = 1,..,n}$ şi ξ^T este matricea linie $(\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n)$.

Relaţia (6.3.2) poate fi folosită pentru a calcula mai uşor forma polară a unei forme pătratice. Astfel, deoarece $a_{ij} = a_{ji}$ oricare ar fi i, j = 1, .., n, avem

(6.3.3) $$A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, \xi_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij}\, \xi_i \xi_j$$

şi putem face următoarea observaţie:

- elementele a_{ii}, i = 1, .., n, de pe diagonala matricei asociate formei polare sunt chiar coeficienţii termenilor ce conţin ξ_i^2 din formula de mai sus

- elemetele a_{ij} i, j = 1,..,n, i < j, de sub diagonala matricei asociate, sunt egale cu 1/2 din coeficienţii termenilor ce conţin $\xi_i \xi_j$, i < j.

- elementele de deasupra diagonalei matricei asociate sunt egale cu cele de sub diagonală deoarece matricea asociată este simetrică: $a_{ij} = a_{ji}$ i, j = 1,.., n.

Exemplul 6.3.2 *Dacă A: $\boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}$, $A(x) = - 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ este o formă pătratică, să se determine forma sa polară. Matricea asociată formei pătratice în baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^5$ este*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3/2 & -1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 2 & 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci forma biliniară simetrică B(.,.), a cărei matrice asociată în baza canonică este cea de mai sus, este $B(x, y) = - 3x_1y_1 + 3/2x_1y_2 - x_1y_3$ $3/2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 -1/2x_2y_5 - x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 + 1/2x_4y_5 -$ $1/2x_5y_2 + 1/2x_5y_4$.

II. Reducerea la forma canonică a unei forme pătratice

Definiția 6.3.4 *Se numeşte formă canonică a unei formei pătratice* $A: V \to \mathbf{R}$, *unde V este un spațiu de dimensiune n, orice scriere a acesteia într-o bază B a lui V de forma*

$$(6.3.4) \qquad A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2, \text{ unde } \alpha_i \in \mathbf{R}, \text{ iar } \xi_i,\ i = 1,\dots, n$$

sunt coordonatele vectorului x în baza B.

O problemă ridicată de definiția de mai sus este dacă orice formă pătratică poate fi scrisă sub formă canonică, adică, dacă există o bază B a spațiului V astfel încât, în acea bază, expresia formei pătratice să fie cea din relația (6.3.4). În limbaj matriceal, problema este următoarea: dacă pentru matricea simetrică asociată formei pătratice într-o bază oarecare a spaţiului V există o matrice diagonală $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$[*)] asemenea cu aceasta.

Dacă spaţiul vectorial V este euclidian, atunci această problemă a fost rezolvată deja în secţiunea rezervată operatorilor autoadjuncţi.

A. Metoda vectorilor şi valorilor proprii

Bazându-ne pe rezultatele stabilite în secţiunea dedicată operatorilor autoadjuncţi, putem demonstra teorema de mai jos.

Teorema 6.3.1 *Dacă V este un spaţiu euclidian real de dimensiune n şi A : V $\to$ **R** este o formă pătratică, atunci există o bază ortonormată în V pentru care matricea asociată formei pătratice este diagonală.*

Demonstraţie. Considerăm $B = \{e_1, e_2,\ldots,e_n\}$ o bază ortonormată în V. Matricea A asociată formei pătratice în această bază este simetrică.

Considerăm operatorul liniar $f : V \to V$ a cărui matrice asociată în baza B este chiar matricea A. Deoarece matricea A este simetrică rezultă că operatorul liniar f este autoadjunct.

În această situaţie, se cunoaşte faptul că există o altă bază ortonormată $B' = \{f_1, f_2,\ldots,f_n\}$ în care matricea D asociată lui f are forma diagonală $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Dacă M este matricea de trecere de la baza B la baza B' atunci avem relaţia $D = MAM^{-1}$ între matricele D şi A. Deoarece $f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_j$,

[*] Convenim să folosim notaţia $\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ pentru matricea de ordinul n care are pe diagonală scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ celelalte elemente fiind egale cu 0.

oricare ar fi i = 1,…, n şi B' este bază ortonormată rezultă că $\delta_i^k = \langle f_i, f_k \rangle$ $= \sum_{j=1}^{n} m_{ij}m_{kj}$, i, k = 1,…,n.

Ultima relație se scrie matricial $MM^T = I$. Deci $M^{-1} = M^T$*). Atunci relația dintre matricele D şi A devine $D = MAM^T$. Din Teorema 6.2.1 se deduce că D este de fapt matricea asociată formei biliniare polare a formei pătratice A în baza B'. În concluzie, expresia formei pătratice A(.) în baza B' este o formă canonică a acesteia.

Teorema demonstrată mai sus ne asigură că, în spații euclidiene reale, orice formă pătratică are o formă canonică, sau altfel spus orice formă pătratică poate fi adusă la forma canonică.

Pentru a determina efectiv baza ortonormată B' în care forma pătratică are forma canonică, facem trimitere la demonstrația teoremei referitoare la diagonalizarea operatorilor autoadjuncți, care ne asigură de existența bazei B'.

Din această demonstrație rezultă că baza B' este formată din vectorii proprii de normă 1 ai matricei A, iar elementele de pe diagonala matricei D sunt valorile proprii ale matricei A.

Din acest motiv metoda de reducere la forma canonică a unei forme pătratice oferită de teorema de mai sus se numeşte *metoda vectorilor şi valorilor proprii* sau *metoda transformărilor ortogonale*.

Exemplul 6.3.3 *Să se aducă la forma canonică forma pătratică A:* $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $A(x) = -5/3\, x_1^2 + 11/6\, x_2^2 + 3/2 x_3^2 - 2/\sqrt{18}\, x_1x_2 - 2/\sqrt{6}\, x_1x_3 - 1/\sqrt{3}\, x_2 x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

[*] O matrice care îndeplineşte această condiție va fi numită matrice ortogonală .

Se observă că matricea asociată formei pătratice în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale acestei matrice sunt soluțiile ecuației det(A - λI) = 0. Rezolvând această ecuație obținem $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Pentru a găsi vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ_i (i =1, 2) se rezolvă ecuația vectorială $Ax^T = \lambda_i x^T$, unde $x^T = (x_1\ x_2\ x_3)$. Pentru $\lambda = 1$ obținem sistemul compatibil, simplu nederminat

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{18}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = x_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{18}}x_1 + \frac{11}{6}x_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 = x_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = x_3 \end{cases}$$

. Mulțimea soluțiilor acestui sistem este $S_1 = \{\alpha\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \alpha \in \mathbf{R}\}$. Un vector propriu de normă 1 corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = 2$, cu ordinul de multiplicitate 2 se obține sistemul

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{18}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 2x_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{18}}x_1 + \frac{11}{6}x_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 = 2x_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

compatibil, dublu nedeterminat, cu mulțimea soluțiilor $S_2 = \{\alpha\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) + \beta\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

Deoarece o bază ortonormată în subspațiul S_2 al lui $\mathbf{R}^3$ este formată *chiar din vectorii* $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$ *deducem că aceştia sunt vectorii proprii de normă 1 corespunzători valorii proprii* $\lambda_2 = 2$.

Atunci baza ortonormată B' căutată este formată din vectorii v_1, v_2, v_3. *Matricea M de trecere de la baza canonică, în care cunoaştem matricea A asociată formei biliniare, la baza B' este*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicând formula (6.2.2) rezultă că, în baza B', matricea asociată formei pătratice este $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Dacă* ξ_i, $i = 1,2,3$ *sunt coordonatele vectorului x în baza B', atunci expresia formei pătratice în această bază este* $A(x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2$.

Legătura între coordonatele din baza B şi cele din baza B' este dată de formula $\xi^T = M^T x$ *(căci am ținut cont de faptul că M este matrice ortogonală). Deci*

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_3$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2.$$

B. Metoda lui Gauss

Teorema următoare ne asigură de existența formei canonice a unei forme pătratice în cazul mai general în care, eliminând ipoteza ca spațiul V să fie euclidian, presupunem doar că V este un spațiu vectorial real.

Facem observația că această teoremă poate fi extinsă şi la cazul unui spațiu vectorial peste un corp oarecare, dacă admitem că forma pătratică şi respectiv forma sa polară iau valori în corpul K şi nu neapărat reale.

Teorema 6.3.2 *Dacă V este un spațiu vectorial real de dimensiune n şi A : V $\rightarrow$ **R** este o formă pătratică care nu este identic nulă, atunci există o bază B în V pentru care matricea asociată formei pătratice este diagonală.*

Demonstrație. Fie B = $\{u_1, u_2,\ldots, u_n\}$ o bază a spațiului vectorial V şi A = $(a_{ij})_{i,j\,=\,1,n}$ matricea asociată formei în această bază.

Dacă $x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n \in$ V atunci $A(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}\,\xi_i^2 + 2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}\,\xi_i\xi_j$, conform formulei (6.3.3). Deoarece A(.) nu este identic nulă, există cel puțin un coeficient $a_{ij} \neq 0$. Deosebim două cazuri:

a) Există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea $a_{ii} \neq 0$. În acest caz, folosind proprietatea de asociativitate a adunării numerelor reale,

a1) se grupează toți termenii ce conțin scalarul ξ_i astfel:

$$A(x) = a_{ij}\,\xi_i^2 + 2a_{i1}\,\xi_i\xi_1 + 2a_{i2}\,\xi_i\xi_2 + \ldots + 2a_{ii-1}\,\xi_i\xi_{i-1} + 2a_{ii+1}\,\xi_i\xi_{i+1} + \ldots$$

$$+2a_{in}\,\xi_i\xi_n + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} a_{ii}\,\xi_i^2 + 2\sum_{\substack{k,j=1\\ k<j,k\neq i,j\neq i}}^{n} a_{kj}\,\xi_k\xi_j.$$

Dacă notăm $R_i(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ii}\,\xi_i^2 + 2\sum_{\substack{k,j=1 \\ k<j,k\neq i,j\neq i}}^{n} a_{kj}\,\xi_k\xi_j$, atunci obținem

$$A(x) = a_{ii}\,[\xi_i^2 + 2\xi_i\,(\frac{a_{i1}}{a_{ii}}\xi_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}\xi_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}\xi_{i+1} +$$

$$\ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}\xi_n)] + R_i(x).$$

a2) se formează un pătrat perfect folosind toți termenii ce conțin ξ_i şi avem succesiv:

$$A(x) = a_{ii}\,(\xi_i + \frac{a_{i1}}{a_{ii}}\xi_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}\xi_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}\xi_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}\xi_n)^2 -$$

$$(\frac{a_{i1}}{a_{ii}}\xi_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}\xi_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}\xi_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}\xi_n)^2 + R_i(x) \text{ şi}$$

$$A(x) = a_{ii}\,(\xi_i + \frac{a_{i1}}{a_{ii}}\xi_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}\xi_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}\xi_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}\xi_n)^2 + R_{i,1}(x),$$

unde am folosit notația $R_{i,1}(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1},\ldots, \xi_n) = -\,(\frac{a_{i1}}{a_{ii}}\xi_1 + \ldots$ $+\frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}\xi_{i-1} + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}\xi_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}\xi_n)^2 + R_i(x)$.

a3) Se face schimbarea de coordonate

$\zeta_1 = \xi_1, \ldots, \zeta_{i-1} = \xi_{i-1}$,

$\zeta_i = \frac{a_{i1}}{a_{ii}}\xi_1 + \ldots + \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}}\xi_{i-1} + \xi_i + \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}}\xi_{i+1} + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ii}}\xi_n$,

$\zeta_{i+1} = \xi_{i+1},\ldots, \zeta_n = \xi_n$.

Deci matricea de trecere M_1 de la baza B la baza B' = $\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$, în care vectorul x are coordonatele de mai sus se poate obține din relația

$$(M_1^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{a_{i1}}{a_{ii}} & ... & \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}} & 1 & \frac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}} & ... & \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

În baza B', forma pătratică A(.) va avea expresia $A(x) = a_{ii}\,\zeta_i^2 + R_{i,1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n)$. Mai mult, este clar că $R_{i,1}$ este o formă pătratică ce nu mai depinde de ζ_i şi dacă se consideră restricţia $R_{i,1}$ *) a acestei forme la subspaţiul lui V generat de familia B' - $\{v_i\}$ atunci R_i este o formă pătratică (exerciţiu) definită pe un spaţiu de dimensiune n-1.

Dacă forma pătratică $R_{i,1}$(.) este în formă canonică, atunci am obţinut forma canonică pentru forma A(.), baza căutată fiind B'.

Dacă $R_{i,1}$(.) nu este în formă canonică atunci algoritmul continuă cu aducerea la forma canonică a acestei forme pătratice, adică cu pasul a1), dacă suntem în condiţiile cazului a) sau cu pasul b1) dacă suntem în cazul b), acesta din urmă fiind expus în cele ce urmează.

Noua schimbare de coordonate, fiind efectuată pentru subspaţiul V_i, nu va afecta coordonata ζ_i, care suferă doar o redenumire. Se va constata că la fiecare aplicare a paşilor a1) -- a3) sau b1) + a1) -- a3), dimensiunea spaţiului pe care este definită forma pătratică ce rămâne de adus la forma canonică scade cu cel puţin o unitate. Deci într-un număr finit de paşi algoritmul se încheie cu obţinerea formei canonice a formei pătratice A(.).

$R_{i,1} : V_i \to R$, $R_{i,1}(x) = R_{i,1}(x)$, unde am notat cu V_i subspaţiul lui V generat de B' - $\{v_i\}$.

b) Nu există nici un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$. Atunci există indicii $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, pentru care $a_{ij} \neq 0$.

b1) Se face schimbarea de coordonate $\xi_k = \zeta_k$, pentru $k \neq i, j$ şi

$$\zeta_i = 1/2(\xi_i + \xi_j),$$

$$\zeta_j = 1/2(\xi_i - \xi_j).$$

Matricea schimbării de coordonate este

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 1/2 & \ldots & 1/2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1/2 & \ldots & -1/2 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de la baza B la noua bază B' este $(M_1^T)^{-1}$. Expresia formei pătratice în baza B' este $A(x) = 2a_{ij}(\zeta_i^2 - \zeta_j^2) + \ldots$ şi este clar că în acest moment, dacă nu am obţinut deja forma canonică, putem continua cu aplicarea cazului a).

Dacă $M_1, M_2, \ldots, M_k$ sunt matricele de schimbarea a coordonatelor obţinute la paşii $P_1, \ldots, P_k$, rezultaţi din aplicarea algoritmului de mai sus atunci matricea de schimbare a coordonatelor $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ în coordonatele finale $(x_1, \ldots, x_2)$ este $M = M_k M_{k-1} .. M_1$ iar matricea de trecere de la baza B la baza în care forma pătratică este în formă canonică este $(M^T)^{-1}$. Demonstraţia este completă.

Exemplul 6.3.4 *Să se determine forma canonică a formei pătratice obținută la exemplul 6.3.2. Deoarece $a_{11} = -3 \neq 0$, suntem în cazul a) din demonstrația teoremei de mai sus şi, conform pasului a1), avem*

$A(x) = -3[x_1^2 +2x_1(-1/2x_2 + 1/3x_3)] + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 +2x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5.$

Completând pătratul perfect de la punctul a2) avem

$$A(x) = -3(x_1 -1/2x_2 + 1/3x_3)^2 + 3(-1/2x_2 + 1/3x_3)^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2 x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5 \text{ sau}$$

$A(x) = -3(x_1 -1/2x_2 + 1/3x_3)^2 -2/3 x_3^2 + 11/4x_2^2 + x_4^2 + x_2 x_3 - x_2x_5 + x_4x_5.$

Facem schimbarea de coordonate

(6.3.5) $\quad y_1 = x_1 -1/2x_2 + 1/3x_3,\ y_i = x_i,\ i = 2, 3, 4, 5$

şi obținem $A(x) = -3y_1^2 + R_1(y_2, y_3, y_4, y_5) = -3y_1^2 -2/3 y_3^2 + 11/4y_2^2 + y_4^2 + y_2 y_3 - y_2y_5 + y_4y_5$. *Procedeul continuă cu reducerea la forma canonică a formei pătratice* $R_1(.)$. *Avem* $R_1(y_2, y_3, y_4, y_5) = y_4^2 +2y_4(1/2y_5) -2/3 y_3^2 + 11/4y_2^2 + y_2 y_3 - y_2y_5 = (y_4 +1/2y_5)^2 -1/4y_5^2 -2/3 y_3^2 + 11/4y_2^2 + y_2 y_3 - y_2y_5$ *şi făcând o nouă schimbare de coordonate*

(6.3.6) $\quad z_4 = y_4 + 1/2y_5,\ z_i = y_i,\ i = 1, 2, 3, 5$ *obținem*

$R_1(y_2, y_3, y_4, y_5) = z_4^2 -1/4z_5^2 -2/3 z_3^2 + 11/4z_2^2 + z_2 z_3 - z_2z_5 = z_4^2 + R_2(z_2, z_3, z_5)$ *unde* $R_2(z_2, z_3, z_5) = -1/4(z_5^2 +2 z_5 2 z_2) -2/3 z_3^2 + 11/4z_2^2 + z_2 z_3 = -1/4(z_5 + 2 z_2) + 15/4z_2^2 -2/3 z_3^2 + z_2 z_3$. *Facem schimbarea de coordonate*

(6.3.7) $\quad t_5 = z_5 + 2 z_2,\ t_i = z_i,\ i =1, 2, 3, 4.$

Atunci $R_2(z_2, z_3, z_5) = -1/4t_5^2 + 15/4t_2^2 -2/3 t_3^2 + t_2 t_3 = -1/4t_5^2 + R_3(t_2, t_3)$, *iar* $R_3(t_2, t_3) =15/4[t_2^2 + 2t_2(2/15\ t_3)] -2/3 t_3^2 = 15/4 (t_2 + 2/15\ t_3)^2 - 11/15t_3^2$.

După o ultimă schimbare de coordonate

(6.3.7) $\quad \zeta_2 = t_2 + 2/15\ t_3,\ \zeta_i = t_i,\ i =1, 3, 4, 5.$

observăm că $R_3(t_2, t_3) = 15/4\zeta_2^2 - 11/15\zeta_3^2$ *este în formă canonică. Ținând cont de cele spuse până acum deducem că forma canonică a formei pătratice A(.) este* $A(x) = -3\zeta_1^2 + 15/4\zeta_2^2 - 11/15\zeta_3^2 + \zeta_4^2 - 1/4\zeta_5^2$. *Din relațiile (6.3.5) - (6.3.7) rezultă următoarele formule de schimbare a coordonatelor, de la cele inițiale la cele finale:*

$$\zeta_1 = x_1 - 1/2x_2 + 1/3x_3$$
$$\zeta_2 = x_2 + 2/15\ x_3$$
$$\zeta_3 = x_3$$
$$\zeta_4 = x_4 + 1/2\ x_5$$
$$\zeta_5 = 2\ x_2 + x_5.$$

Matricea de trecere de la baza canonică, în care este exprimată inițial forma pătratică, la baza B' în care are forma canonică este

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2/5 & -2/15 & 1 & -2/15 & 4/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

iar B' = {(1, 0, 0, 0, 0), (1/2, 1, 0, 1, -2), (-2/5, -2/15, 1, -2/15, 4/15), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, -1/2, 1)}.

Exemplul 6.3.5 *Să se determine forma canonică a formei pătratice A :* $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Se observă că deoarece toți coeficienții $a_{ii} = 0$, $i = 1,2,3$ *suntem în cazul b) din demonstrația teoremei precedente.*

Deoarece coeficientul $a_{12} = 1 \neq 0$, *facem schimbarea de coordonate*

$$y_1 = 1/2(\ x_1 + x_2),\ y_2 = 1/2(\ x_1 - x_2),\ y_3 = x_3$$

şi forma pătratică A devine

$$A(x_1, x_2, x_3) = 2\ y_1^2 - 2y_2^2\ + y_1y_3 - 3\ y_2y_3.$$

Acum putem aplica algoritmul de la punctul a) al aceleiaşi teoreme. Avem $A(x_1, x_2, x_3) = 2\ [y_1^2 + 2y_1\ (1/4\ y_3)] - 2y_2^2 - 3y_2y_3 =$ $2\ (y_1\ +\ 1/4\ y_3)^2\ -\ 2y_2^2\ -\ 1/8y_3^2 -\ 3y_2y_3$ *şi facem o nouă schimbare de variabilă* $z_1 = y_1 + 1/4\, y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3$.

Obţinem $A(x) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 1/8z_3^2 - 3z_2z_3 = 2z_1^2 + R(z_2, z_3)$.

Deoarece $R(z_2, z_3) = -\ 2[z_2^2 + 2\ z_2(3/4\ z_3)]^2\ \ 1/8z_3^2 = -2(z_2 + 3/4z_3)^2 + z_3^2$*, facem schimbarea de variabile* $t_2 = z_2 + 3/4z_3,\ t_1 = z_1,\ t_3 = z_3$ *şi obţinem forma canonică a lui A(.):* $A(x) = 2t_1^2 - 2t_2^2 + t_3^2$.

Relaţia între coordonatele x_1, x_2, x_3 *şi* t_1, t_2, t_3 *este*

$$t_1 = 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/4x_3,\ t_2 = 1/2x_1 - 1/2x_2 + 3/4x_3,\ t_3 = x_3,$$

Deci matricea de trecere de la baza canonică la baza B' în care forma pătratică este în formă canonică, este

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

iar $B' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 1/2, 1)\}$.

C. Metoda lui Jacobi

Fie A(.) : $V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică care are expresia

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

într-o bază $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ($x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$). Atunci avem următoarea teoremă de aducere la forma canonică a formei pătratice A, :

Teorema 6.3.3 *(Teorema lui Jacobi) Dacă coeficienţii a_{ij}, i, j =1,…, n din expresia de mai sus a formei pătratice A(.) au proprietatea că şirul de determinanţi $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a_{11}$, Δ_2*

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ *are toţi termenii diferiţi de zero,*

atunci există o bază B' ={g_1, g_2,…, g_n} în care A(.) are forma canonică

(6.3.8) $\quad A(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi_i^2$, *unde ξ_i, i = 1,…, n sunt coordonatele vectorului x în baza B' iar $\beta_1 = \Delta_0/\Delta_1$, $\beta_2 = \Delta_1/\Delta_2$, …, $\beta_n = \Delta_{n-1}/\Delta_n$.*

Demonstraţie. Fie B(.,.) forma polară a formei pătratice A(.). Vom determina baza B' = {g_1, g_2,…, g_n} astfel încât

$$\begin{aligned} & g_1 = b_{11}u_1; \\ (6.3.9) \qquad & g_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & g_n = b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{nn}u_n \end{aligned}$$

şi să avem îndeplinite condiţiile

(6.3.10) $\qquad B(g_i, g_j) = 0$, oricare ar fi $i \neq j$ şi

(6.3.11) $\qquad B(e_i, g_i) = 1$, i = 1,…,n.

Este evident că dacă există o astfel de bază B', atunci forma pătratică A(.) este în formă canonică, adică $A(x) = b_{11}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2 + \dots + b_{nn}\xi_n^2$, unde $\xi_1,\dots,\xi_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza B'.

Pentru a completa demonstrația teoremei este suficient să arătăm că există scalarii $b_{i,j}$, $1 \le i \le j \le n$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile (6.3.9) - (6.3.11), şi să demonstrăm că $b_{ii} = \Delta_{i-1}/\Delta_i$, $i = 1, 2,\dots, n$.

Se poate demonstra prin inducție după *j* că afirmația (6.3.10) este echivalentă cu

(6.3.12) $$B(g_j, u_i) = 0, \text{ oricare ar fi } i < j,\ j = 2,.., n.$$

Într-adevăr, dacă $j = 2$ atunci avem relația $B(g_2, g_1) = 0$, relație care este echivalentă cu relația $b_{11}\ B(g_2, u_1) = 0$. Deoarece B' este, în particular, sistem liniar independent trebuie să avem $g_1 \neq 0$, deci $b_{11} \neq 0$.

Rezultă $B(g_2, u_1) = 0$. Vom demonstra afirmația pentru $j \in \{3,.., n\}$. Din (6.3.10) rezultă că pentru orice $p < j$, avem $B(g_j, g_p) = 0$. Pentru $p = 1$ avem $B(g_j, g_1) = 0$ şi de aici rezultă, raționând ca mai sus, că $B(g_j, e_1) = 0$. Folosind inducția după $p < j$ se stabileşte că $B(g_j, u_p) = 0$ oricare ar fi $p < j$. Într-adevăr, presupunem că $B(g_j, u_k) = 0$, oricare ar fi $k < p$ şi demonstrăm că $B(g_j, u_p) = 0$. Avem $B(g_j, b_{p1}u_1 + \dots + b_{pp-1}u_{p-1} + b_{pp}u_p) = 0$. Deoarece $b_{pp} \neq 0$, altfel g_{p-1}, g_p nu ar mai fi liniar independenți, folosim ipoteza de inducție şi deducem că $b_{pp}B(g_j, u_p) = 0$ şi $B(g_j, u_p) = 0$. Deci $B(g_j, u_p) = 0$ pentru toți $p < j$ şi demonstrația este completă.

Pentru a calcula coeficienții b_{ij}, $j = 1,\dots,i$, $i = 1,\dots,n$ se procedează astfel: a) dacă $i = 1$ atunci avem $B(g_1,e_1) = 1$ şi rezultă $b_{11}a_{11} = 1$. Deci $b_{11} = \dfrac{1}{a_{11}} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}$

b) pentru fiecare $i = 2,\ldots n$ avem $B(u_j, g_i) = B(g_i, u_j) = 0$, $j = 1,\ldots, i - 1$, conform relației (6.3.12) şi $B(u_i, g_i) = B(g_i, u_i) = 1$, conform relației (6.3.11). Se obține sistemul:

$$b_{i1}B(u_j, u_1) + b_{i2} B(u_j, u_2) + \ldots + b_{ii} B(u_j, u_i) = 0, \; j = 1,\ldots, i - 1$$

$b_{i1}B(u_i, u_1) + b_{i2} B(u_i, u_2) + \ldots + b_{ii} B(u_i, u_i) = 1$, care se mai scrie, ținând cont de faptul că $a_{ij} = B(u_i, u_j)$,

$$\begin{aligned} & b_{i1}a_{11} + b_{i2} a_{12} + \ldots + b_{ii} a_{1i} = 0 \\ & b_{i1}a_{21} + b_{i2} a_{22} + \ldots + b_{ii} a_{2i} = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & b_{i1}a_{i1} + b_{i2} a_{i2} + \ldots + b_{ii} a_{ii} = 1. \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Deoarece determinantul matricei asociate acestui sistem este chiar $\Delta_i \neq 0$, deducem că sistemul este compatibil determinat şi, aplicând regula lui Cramer, avem $b_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} = \beta_i$ oricare ar fi $i = 2,\ldots,n$. Demonstrația este încheiată.

Observația 6.3.2 a) Demonstrația teoremei de mai sus, reprezintă o nouă metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice, metoda lui Jacobi.

b) Principalul neajuns al acestei teoreme constă în faptul că nu se poate aplica decât cu condiția ca şirul de determinanți Δ_i, $i = 1,\ldots,n$ să aibă toți termenii nenuli. Astfel, pentru a aduce la forma canonică forma pătratică din Exemplul 6.3.5, nu putem folosi metoda lui Iacobi.

Într-adevăr, matricea asociată formei pătratice A(.), din exemplul amintit, în baza canonică, este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi, deoarece $\Delta_1 = a_{11} = 0$, nu putem aplica teorema de mai sus.

Această problemă poate fi rezolvată folosind Teoremele 6.2.4 şi 6.2.5. Deosebim două situații:

i) Forma polară a formei pătratice A: V $\rightarrow$ **R** este nedegenerată. Atunci, conform Teoremei 6.2.5, există o bază în spațiul V în care şirul de minori principali ai matricei asociate formei pătratice nu are termeni nuli şi forma pătratică poate fi adusă la forma canonică prin metoda lui Jacobi.

ii) Forma polară a formei pătratice A: V $\rightarrow$ **R** este degenerată. Fie B(.,.) forma polară a formei pătratice A(.), V_0 spațiul nul asociat acesteia şi V_1 astfel încât $V_0 \oplus V_1 = V$.

Dacă B_1(.,.) este restricția formei biliniare simetrice la subspațiul V_1, ca în Teorema 6.2.4, atunci, deoarece B_1(.,.) este nedegenerată, putem folosi punctului i) de mai sus pentru a aduce forma pătratică asociată lui B_1(.,.) la forma canonică. Fie B' baza din V_1 în care se obține forma canonică a formei biliniare B_1(.,.) prin metoda lui Iacobi. Dacă B" este o bază oarecare în V_0 atunci B" $\cup$ B' este o bază în V în care A(.) are forma canonică. (Această afirmație este consecința faptului că dacă $x \in V$ atunci x se scrie în mod unic ca o sumă de doi vectori $x_0 \in V_0$ şi $x_1 \in V_1$ iar A(x) = A(x_1)).

Exemplul 6.3.6 *Să se folosească metoda lui Jacobi pentru a aduce la forma canonică forma pătratică de la Exercițiul 6.3.4* $A : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}$, $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Se observă că matricea asociată formei pătratice în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *şi conform celor arătate în exemplul 6.2.10 găsim o altă bază* $B = \{ u_2 = E_2, u_3 = E_3, u_1 = E_1 + E_2\}$ *în care matricea asociată formei pătratice îndeplineşte ipotezele teoremei lui Jacobi. În această bază matricea asociată este* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *şi* $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -1$. *Forma canonică este* $A(x) = 1/2\xi_1^2 -2\, \xi_2^2 + \xi_3^2$, *unde* ξ_i, $i = 1, 2, 3$ *sunt coeficienții vectorului x în baza determinată de condițiile (6.3.9) - (6.3.11) din demonstrația teoremei lui Jacobi. Am văzut că* $g_1 = 1/2u_1 = 1/2(E_1 + E_2)$, $g_2 = b_{21}\, u_1 + b_{22}\, u_2$, *unde* $b_{22} = -2$, *iar* $b_{21} = 1$, *aşa cum rezultă din rezolvarea sistemului (6.3.13). Deci* $g_2 = E_1 - E_2$. *Analog se obține* $g_3 = b_{31}\, u_1 + b_{32}\, u_2 + b_{33}\, u_3$, *unde* $b_{31} = -1$, $b_{32} = 3/2$ *şi* $b_{33} = 1$, *adică* $g_3 = -E_1 + 1/2E_2 + E_3$. *În concluzie, baza căutată este* $B' = \{(1/2, 1/2, 0), (1, -1, 0), (-1, 1/2, 1)\}$.

Exemplul 6.3.7 *Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Jacobi forma pătratică* $A : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 4\, x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 - 2\, x_3x_4$.

Matricea asociată formei pătratice în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Deoarece* $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = -13$, $\Delta_4 = -23$, *putem aplica teorema lui Jacobi pentru a aduce forma pătratică la forma* *canonică. Rezolvând sistemul (6.2.13) pentru i = 2, 3, 4 obținem $b_{21} = 1$, $b_{22} = 1$, $b_{31} = 5/13$, $b_{32} = 3/13$, $b_{33} = -1/13$, $b_{41} = 9/23$, $b_{42} = -5/23$, $b_{43} = -7/23$, $b_{44} = 13/23$ iar $b_{11} = 1$. Conform formulelor (6.3.9) obținem baza B' formată din vectorii $g_1 = E_1$, $g_2 = E_1 + E_2$, $g_3 = 5/13E_1 + 3/13\, E_2 - 1/13\, E_3$, $g_4 = 9/23E_1 - 5/23\, E_2 - 7/23E_3 + 13/23\, E_4$, unde $E_i = (0,..0, 1, 0,..0)$, componenta egală cu 1 fiind pe poziția i, i = 1, 2, 3, 4 sunt vectorii din baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$. Forma canonică a formei pătratice este $A(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1/13\xi_3^2 + 13/23\xi_4^2$, $x = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \xi_3 g_3 + \xi_4 g_4$. Făcând calculele determinăm explicit baza B': B' = {(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (5/13, 3/13, -1/13, 0), (9/23, -5/23, -7/23, 13/23)}.*

III. Legea inerției

Lema 6.3.1. *Vie V un spațiu vectorial de dimensiune n peste un corp K ş fiei V_1, V_2 două subspații ale sale de dimensiuni m şi respectiv r astfel încât $m + r > n$. Atunci $V_1 \cap V_2 \neq (0)$.*

Demonstrație. Fie $B = \{e_1,\dots, e_m\}$ o bază în V_1 şi $B' = B = \{g_1,\dots, g_r\}$ o bază în V_2. Familia $B \cup B'$ este liniar dependentă deoarece $m + r > n$. Atunci există scalarii $\alpha_i \in K$, i = 1,.., m , $\beta_j \in k$, j = 1,.., r nu toți nuli astfel încât $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \alpha_m e_m + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_r g_r = 0$. Deci $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \alpha_m e_m = - \beta_1 g_1 - \beta_2 g_2 - \dots - \beta_r g_r \in V_1 \cap V_2$. Este clar că $x \neq 0$. Într-adevăr, dacă x = 0, atunci rezultă, din liniar independența familiilor B şi B', că toți scalarii α_i, β_j, i = 1,.., m, j = 1,.., r sunt nuli, ceea ce este absurd.

Teorema 6.3.4 *(Legea inerției)Fie V este un spațiu vectorial real de dimensiune n şi $A : V \to \mathbf{R}$ o formă pătratică pe care o aducem la forma canonică în două baze diferite. Numărul* *coeficienților pozitivi cât și cel al coeficienților negativi din formele canonice respective este același.*

Demonstrație. Fie B = $\{e_1,\dots, e_n\}$ şi B' = $\{g_1,\dots, g_n\}$ două baze diferite în care forma pătratică A are forma canonică. Dacă $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, atunci $A(x) = \alpha_1x_1^2 + \dots + \alpha_mx_m^2 - \beta_{m+1}x_{m+1}^2 + \dots + \beta_{m+s}x_{m+s}^2$, unde toți scalarii α_i, β_j, $i = 1,\dots,m$, $j = m + 1,\dots, m + s$, $m + s \le n$ sunt pozitivi.

Dacă în baza B', pentru acelaşi vector $x = \xi_1g_1 + \dots + \xi_ng_n$ avem

$$A(x) = \gamma_1\xi_1^2 + \dots + \gamma_p\xi_p^2 - \delta_{p+1}\xi_{p+1}^2 - \dots - \delta_{p+r}\xi_{p+r}^2,$$

toți scalarii γ_i, β_j, $i = 1,\dots,p$, $j = p + 1,\dots, p + r$, $p + r \le n$ fiind pozitivi, atunci trebuie să demonstrăm că $m = p$ şi $s = r$.

Presupunem prin absurd că $m > p$. Subspațiile V_1 şi $V_2 \subseteq V$ generate de familiile $\{e_1,\dots, e_m\}$ şi respectiv $\{g_{p+1},\dots, g_n\}$ au dimensiunile m şi respectiv n - p. Deoarece $m + n - p > n$ (căci $m > p$), deducem, conform lemei de mai sus, că există un vector $x \ne 0$ astfel încât $x \in V_1$ şi $x\in V_2$. Acest vector x are coordonatele $(x_1, \dots x_m, 0,\dots,0)$ în baza B şi $(0, \dots,0 , \xi_{p+1}, \dots\xi_n)$ în baza B'. Atunci expresia formei pătratice, în baza B, pentru vectorul x considerat mai sus este $A(x) = \alpha_1x_1^2 + \dots+ \alpha_mx_m^2 > 0$, în timp ce, în baza B', este $A(x) = - \delta_{p+1}\xi_{p+1}^2 - \dots - \delta_{p+r}\xi_{p+r}^2 < 0$.
Am ajuns la o contradicție. Deci m = p. În acelaşi mod se arată că s = r.

Exemplul 6.3.8. *Se observă că forma pătratică din exemplul 6.3.4 a fost adusă la forma canonică în două baze diferite (a se vedea şi Exemplul 6.3.6) şi afirmația din teorema de mai sus este verificată, adică în ambele baze are un coeficient pozitiv şi doi negativi.*

Fie A : V $\rightarrow$ **R** o formă pătratică. Dacă A(.) are forma canonică

$$A(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_m x_m^2 - \beta_{m+1} x_{m+1}^2 + \ldots + \beta_{m+s} x_{m+s}^2,\ m + s \leq n$$

într - o bază B = $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, atunci introducem următoarele noțiuni:

Definiția 6.3.5 **Numărul natural *m* se numeşte indexul pozitiv al formei pătratice A(.), numărul *s* se numeşte indexul negativ al formei, iar perechea (*m*, *s*) se numeşte signatura formei.**

Teorema 6.3.4 demonstrează de fapt că signatura unei forme pătratice nu se schimbă la schimbarea bazei.

6.4 Exerciții

1. Să se stabilească dacă aplicațiile de mai jos sunt forme liniare.

a) $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4$;

b) $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 1$;

c) $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 - 3x_3$;

d) $f : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}\right) = a + c$;

e) $f : M_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, $f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$;

f) $f : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}\right) = ac - bd$.

R: a) Da. b) Nu. Se poate arăta că nu este îndeplinită condiția de aditivitate. c) Nu. Se poate arăta că nu este îndeplinită condiția de omogeneitate. d) Da. e) Da. Facem observația că formele liniare definite la punctele d) şi e) sunt cunoscute sub numele de aplicații *urmă* sau *trace* şi pentru fiecare $A \in M_n(\mathbf{R})$ se foloseşte notația Tr(A) pentru suma elementelor de pe diagonala principală a matricei. Evident, aplicația poate fi definită şi pe $M_n(K)$. f) Nu. Se demonstrează că aplicația nu are proprietatea de omogeneitate.

2. Să se determine coeficienții formei liniare de la punctul a), al exercițiului 1 de mai sus, în baza B = $\{u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (-2, 2, 3, -1), u_3 = (1, 3, -1, 0), u_4 = (0, 1, 4, 1)\}$.

R: Coeficienții formei în baza B sunt $f(u_1) = -2$, $f(u_2) = -9$, $f(u_3) = 10$, $f(u_3) = -8$.

3. Să se determine baza duală a bazei B de la exercițiul precedent.

R: Fie $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Aplicând formula 1. 4. 2 obținem coordonatele acestui vector în baza B:

$$\xi_1 = 8/11x_1 - 5/33x_2 + 3/11x_3 - 31/33x_4,$$

$$\xi_2 = -1/11x_1 + 2/33x_2 + 1/11x_3 - 14/33x_4,$$

$$\xi_3 = 1/11x_1 + 3/11x_2 - 1/11x_3 + 1/11x_4,$$

$$\xi_4 = -1/11x_1 + 2/33x_2 + 1/11x_3 + 19/33x_4.$$

Atunci avem, conform relației (6.1.1), $u_1^*(x) = 8/11x_1 - 5/33x_2 + 3/11x_3 - 31/33x_4$, $u_2^*(x) = -1/11x_1 + 2/33x_2 + 1/11x_3 - 14/33x_4$, $u_3^*(x) = 1/11x_1 + 3/11x_2 - 1/11x_3 + 1/11x_4$, $u_4^*(x) = -1/11x_1 + 2/33x_2 + 1/11x_3 + 19/33x_4$.

4. Să se determine o formă liniară *f* neidentic nulă, definită pe spaţiul vectorial $\mathbf{R}^3$ astfel încât f(1, 0, 2) = 0 şi f(-1, 1, 2) = 0.

R: Deoarece familia de vectori G = {u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (-1, 1, 2)} este liniar independentă ea poate fi completată la o bază pentru $\mathbf{R}^3$. Într-adevăr B = {u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (-1, 1, 2), u_3 = (0, 0, 1)} este o bază în $\mathbf{R}^3$.

Coeficienţii formei în baza B vor fi $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$ şi $f(u_3) = a \in \mathbf{R}$. Dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ atunci el are coordonatele $\xi_1 = x_1 + x_2$, $\xi_2 = x_2$ şi $\xi_3 = -2x_1 - 4x_2 + x_3$. Deci $f(x) = \xi_1 f(u_1) + \xi_2 f(u_2) + \xi_3 f(u_3) = a\xi_3 = -2ax_1 - 4ax_2 + ax_3$. Pentru orice $a \neq 0$ obţinem o formă liniară care satisface cerinţele problemei.

5. Să se determine o formă liniară *f* , definită pe spaţiul vectorial $\mathbf{R}^3$ astfel încât f(1, 0, 2) = 2.

R: Procedând ca la exerciţiul de mai sus găsim o bază B = {u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)} în $\mathbf{R}^3$ care să includă vectorul pentru care se cunoaşte valoarea formei liniare. Coordonatele unui vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ în această bază sunt $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$ şi $\xi_3 = -2x_1 + x_3$. Dacă $f(u_2) = a$ şi $f(u_3) = b$, $a, b \in \mathbf{R}$, atunci $f(x) = 2x_1 + ax_2 - 2bx_1 + bx_3$, $a, b \in \mathbf{R}$.

4. Să se arate că dacă *n* forme liniare f_i , i = 1,…, n iau valoarea zero pentru un acelaşi vector $x \neq 0$ din spaţiul vectorial V şi $\dim_K V = n$, atunci formele liniare sunt liniar dependente.

R: Fie B = {u_1 , u_2 ,…, u_n} o bază în V şi fie B^* = {u_1^* , u_2^* ,…, u_n^*} baza sa duală. Coordonatele formei liniare f_i, i = 1,…, n în baza B^* sunt de fapt coeficienţii formei, $a_{ji} = f_i(u_j)$, j = 1,…, n în baza B. Conform Propoziţiei 1.2.1, pentru a demonstra că formele liniare f_i , i = 1,…, n sunt liniar dependente este suficient să arătăm că matricea care are pe coloane coeficienții formelor în baza B are rangul mai mic strict decât n.

Fie $x = (x_1, x_2,\dots, x_n) \in V$, $x \neq 0$ vectorul din ipoteză. Avem $f_i(x) = 0$, $i = 1,\dots, n \Leftrightarrow a_{11}x_1 + a_{21}x_2 +\dots+ a_{n1}x_n = 0$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 +\dots+ a_{n2}x_n = 0,\dots, a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 +\dots+ a_{nn}x_n = 0$. Astfel, am obținut un sistem liniar şi omogen a cărui matrice asociată este chiar matricea ce are pe linii coeficienții formelor f_i în baza B, sistem care admite o soluție nenulă.

Deci rangul matricei sistemului este mai mic strict decât *n* şi demonstrația a fost încheiată.

5. Fie V un spațiu vectorial peste corpul K. Să se arate că pentru orice

bază $B^* = \{u_1^*, u_2^*,\dots, u_n^*\}$ din V^* există o baza B în V astfel încât B^* să fie baza sa duală.

R: Fie $B = \{v_1, v_2,\dots, v_n\}$ o bază în V şi fie a_{ij}, $i, j = 1,\dots, n$ coeficienții formei u_i^* în baza B, $u_i^*(v_j) = a_{ji}$, $j = 1,\dots, n$. Aceştia reprezintă coordonatele formelor liniare u_i^* în baza duală B^*. Deoarece u_i^*, $i = 1,.., n$ este o bază în V^*, atunci aplicăm Propoziția 1.2.1 şi rezultă că matricea $A = (a_{ji})_{i, j=1,n}$ are rangul egal cu *n*, deci este inversabilă. Fie $B' = \{u_1, u_2,\dots, u_n\}$ o bază în V astfel încât matricea $(A^T)^{-1}$ reprezintă matricea de trecere de la bază B la baza B'. Atunci aplicăm teorema 6.1.2 şi deducem formula de legătură între coeficienții α_{ji}, $j = 1,\dots, n$ ai formelor liniare u_i^*, $i = 1,.., n$ în baza B' şi cei din baza B:

$$\Lambda = A(A^T)^{-1}, \text{ unde } \Lambda = (\alpha_{ji})_{i, j=1,n}.$$

Deci $u_i^*(u_j) = \delta_i^j$, $i, j = 1,\dots,n$. Conform definiției bazei duale, rezultă că duala bazei B' este chiar B^*.

6. Care din funcțiile de mai jos sunt forme biliniare ?

a) $B : P(t) \times P(t) \to \mathbf{R}$, $B(f, g) = f(2) + g(2)$, unde *P(t)* este spaţiul polinoamelor în nedeterminata *t,* de orice grad, cu coeficienţi reali;

b) $B : P(t) \times P(t) \to \mathbf{R}$, $B(f, g) = f(2)g(2)$;

c) $B : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + 4x_3y_4$;

d) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3 + 1$;

e) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3$;

f) $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_2^2$.

Dacă $x \in \mathbf{R}^n$, atunci convenim că $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ sunt componentele lui x.

R: a) Nu. Se poate arată că nu este satisfăcută condiţia de omogeneitate în primul argument. b) Da. Avem $B(\alpha f + \beta g, h) = [\alpha f(2) + \beta g(2)]h(2) = \alpha\, f(2)h(2) + \beta g(2)h(2) = \alpha B(f, h) + \beta\, B(g, h)$ şi analog se arată liniaritatea în al doilea argument. c) Da. d) Nu. Se poate arăta că nu este îndeplinită condiţia de aditivitate în oricare argument. e) Da. f). Nu. Se poate că nu este satisfăcută condiţia de omogeneitate în primul argument.

7. Se consideră forma biliniară B(.,.) definită pe $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^5$ a cărei matrice asociată în perechea formată din bazele canonice ale spaţiilor de definiţie este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Să se determine matricea asociată formei biliniare în perechea de baze B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} şi $B_1 = \{u_1 = (1, 1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0, 0), u_3 = (3, 2, 1, 1, 0), u_4 = (0, 0, 1, 1, 1), u_5 = (1, 0, 0, 0, 0)\}$. b) Să se determine subspaţiile nule ale formei biliniare $B_1(.,.)$ definită pe $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^5$ a cărei matrice asociată în

perechea formată din bazele canonice ale spațiilor de definiție este matricea obținută la puntul a).

R: a) Matricele de trecere de la bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi respectiv $\mathbf{R}^5$ la bazele B şi respectiv B_1 sunt M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi respectiv P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se aplică formula 6.2.2 şi avem

$$\Lambda = MAP^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Dacă V_0 este subspațiul nul în primul argument atunci $x \in V_0 \Leftrightarrow B_1(x,y) = 0$, oricare ar fi $y \in \mathbf{R}^5$. Dacă $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ atunci forma biliniară $B_1(.,.)$ are următoarea expresie $B_1(x, y) = 2x_1y_1 + 6x_1y_2 - x_1y_3 + 4\, x_1y_4 + 2\, x_1y_5 + 5x_2y_2 - 2\, x_2y_3 + 3\, x_2y_4 + x_2y_5 - x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_4 + x_3y_5$. Deci $x \in V_0 \Leftrightarrow y_1(2x_1 - x_3) + y_2(6x_1 + 5x_2) + y_3(- x_1 - 2\, x_2 - x_3) + y_4(4\, x_1 + 3\, x_2 + x_3) + y_5(2\, x_1 + x_2 + x_3) = 0$, pentru toți $y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,..,5$. Se obține sistemul $2x_1 - x_3 = 0$, $6x_1 + 5x_2 = 0$, $- x_1 - 2\, x_2 - x_3 = 0$, $4\, x_1 + 3\, x_2 + x_3 = 0$, $2\, x_1 + x_2 + x_3 = 0$, care are numai soluția nulă. Deci $V_0 = (0)$. În mod asemănător se constată că $y \in W_0$, unde W_0 este subspațiul nul pentru al doilea argument, dacă şi numai dacă $y_1 = -8/5\alpha - 4/5\beta$, $y_2 = \alpha$, $y_3 = 12/5\alpha + 6/5\beta$, $y_4 = \beta$, y_5 $-1/5\alpha - 3/5\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Deci $W_0 = \{(-8/5, 1, 12/5, 0, -1/5) + \beta(-4/5, 0, 6/5, 1, -3/5), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\ \}$ fiind un subspațiu de dimensiune 2.

8. Să se verifice dacă aplicațiile de mai jos sunt forme biliniare simetrice, şi în caz afirmativ să se scrie formele pătratice asociate.

a) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 - 3x_2y_1 + x_3y_1$;

b) $B : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 - 2x_3y_3 + x_4y_4$;

c) $B : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3 + x_4y_3$;

d) $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$.

R: a) Da. $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $A(x) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3$. b) Da. $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $A(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; c) Nu, deoarece B(.,.) nu are un domeniu de definiție corespunzător. d) Da. $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A(x) = x_2^2 + 4x_1x_2$.

9. Să se aducă la forma canonică formele pătratice de la exercițiul 8, prin una din cele trei metode studiate.

R: Pentru rezolvare punctului a) vom folosi toate cele trei metode, pentru a exemplifica modul de lucru.

a1) Aducem forma pătratică la forma canonică prin metoda vectorilor şi valorilor proprii. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{11}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{11}$, iar vectorii proprii corespunzători sunt $v_1 = (0, 1, 3)$, $v_2 = (-1/3 - 1/3\sqrt{11}, 1, -1/3)$, $v_3 = (-1/3 + 1/3\sqrt{11}, 1, -1/3)$. Deci forma canonică este $A(x) = (1 + \sqrt{11})\xi_1^2 + (1 - \sqrt{11})\xi_2^2$, unde ξ_i, $i = 1, 2, 3$ sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2, x_3)$ în baza $B = \{v_1/\|v_1\|, v_2/\|v_2\|, v_3/\|v_3\|\}$, unde $\|v\|$ este norma euclidiană a vectorului v.

a2) Dacă utilizăm metoda lui Gauss avem $A(x) = 2[x_1^2 - 2x_1 (\frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3) + (\frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3)^2] - (\frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3)^2$. Facem schimbarea de coordonate $y_1 = x_1 - \frac{3}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3$, $y_2 = \frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3$, $y_3 = x_3$ şi obţinem $A(x) = 2y_1^2 - y_2^2$. Deoarece matricea de schimbare de coordonatelor (obţinute prin

trecerea de la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ la baza în care avem expresia canonică a formei pătratice) este $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere da la baza canonică la baza finală este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deci baza căutată este $B = \{(1, 1, 0), (0, 2/3, 1/3), (0, 0, 1)\}$.

a3) Deoarece şirul de minori principali ai matricei asociate formei pătratice în baza canonică este $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -9$, $\Delta_3 = 0$, forma polară a formei pătratice este degenerată şi metoda lui Jacobi nu se poate aplica direct. Spaţiul nul al formei polare este generat de vectorul $u_3 = (0, 1, 3)$. Familia $\{E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), u_3\}$ formează o bază în $\mathbf{R}^3$. Deci este suficient să aducem la forma canonică restricţia formei pătratice la subspaţiul vectorial generat de E_1 şi E_2. Aceasta este $A_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A_1(x) = 2x_1^2 - 6x_1x_2$ şi, conform metodei lui Jacobi, are forma canonică $A_1(x) = 2\xi_1^2 - 9\xi_2^2$, unde ξ_1, ξ_2 sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2)$ în baza $u_1 = 2E_1$, $u_2 = 1/3E_1 - 2/9E_2$. Deci în baza $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ obţinem forma canonică $A(x) = 2\xi_1^2 - 9\xi_2^2$, pentru forma pătratică iniţială. b) Deoarece avem $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = -7$, $\Delta_4 = -7$, se poate aplica metoda lui Jacobi, pentru aducerea formei pătratice în formă canonică. Avem $A(x) = 1/2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2/7\xi_3^2 + \xi_4^2$, unde $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ în baza $u_1 = 1/2E_1$, $u_2 = - E_1 + E_2$, $u_3 = 3/7\ E_1 - 2/7E_2 - 2/7E_3$, $u_4 = E_4$. d) Aplicăm metoda lui Gauss şi avem $A(x) = -4\xi_1^2 + \xi_2^2$, unde ξ_1, ξ_2 sunt coordonatele vectorului $x = (x_1, x_2)$ în baza $u_1 = - E_2$, $u_2 = - E_1 + 2E_2$.

10. Să se precizeze dacă formele pătratice obținute prin rezolvarea exercițiului 8 sunt pozitiv, negativ definite (semidefinite) sau nedefinite.

R. Deoarece o formă canonică a formei pătratice de la punctul a) (vezi a3 exercițiul 9) este $A(x) = 2\xi_1^2 - 9\xi_2^2$ este clar că pentru orice vector $v = \alpha u_2$, $\alpha \neq 0$ avem $A(v) = - 9\alpha^2 > 0$, în timp ce pentru $v = \beta u_1$, $\beta \neq 0$, $A(v) = 2\beta^2 < 0$. Deci forma este nedefinită. Analog se arată că formele pătratice obținute la punctele b) şi d) ale ex. 8 sunt nedefinite.

11. Care este signatura formelor pătratice studiate la exercițiul precedent?

R: a) (1, 1). b) (3, 1). d) (1,1).

12.[*)] Dacă $A : V \to \mathbf{R}$ este o formă pătratică a cărei matrice $A = (a_{ij})_{i,j\ =\ 1,\ldots,n}$, asociată formei în raport cu o bază, are proprietatea că toți minorii principali Δ_i, $i = 1,\ldots, n$ (a se vedea teorema lui Jacobi) sunt pozitivi (respectiv $(- 1)^i\Delta_i > 0$) atunci forma pătratică este pozitiv (respectiv negativ) definită.

Indicație: Se aplică teorema lui Jacobi.

[*] Exercițiul de mai sus este un rezultat cunoscut sub numele de criteriul lui Sylvester.