

Analiză Matematică - Curs 1

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

1	Elemente de logică matematică	3
1.1	Propoziții, conectori și tabele de adevăr	3
1.2	Predicate și cuantificatori	4
1.3	Teoreme, leme, corolare	5
2	Mulțimi. Relații. Funcții	8
2.1	Mulțimi	8
2.2	Relații	12
	Index	16

Capitolul 1

Elemente de logică matematică

1.1 Propoziții, conectori și tabele de adevăr

O *propoziție* este un enunț care este fie adevărat, fie fals. Cu alte cuvinte unei propoziții i se poate atașa o valoare de adevăr desemnată formal prin 1 (*propoziție adevărată*) sau 0 (*propoziție falsă*). Fiind dată o familie de propoziții, pot fi create propoziții noi cu ajutorul *conectorilor logici*:

- *negație*: $\neg$ (non);
- *conjunție*: $\wedge$ (și);
- *disjunție*: $\vee$ (sau);
- *implicație*: $\rightarrow$ (implică);
- *echivalență*: $\leftrightarrow$ (echivalent).

Valoarea de adevăr a propoziției noi poate fi determinată cu ajutorul *tabelului de adevăr* ca mai jos. În cele ce urmează p și q sunt propoziții.

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Dacă propoziția $p \rightarrow q$ (respectiv, $p \leftrightarrow q$) este adevărată, atunci se folosește notația $p \Rightarrow q$ (respectiv, $p \Leftrightarrow q$).

Următoarele enunțuri au aceeași semnificație cu $p \Rightarrow q$:

- Din p rezultă q .
- Dacă p , atunci q .
- p este o condiție suficientă pentru q .
- q este o condiție necesară pentru p .

Următoarele enunțuri au aceeași semnificație cu $p \Leftrightarrow q$:

- p dacă și numai dacă q .
- p este o condiție necesară și suficientă pentru q .
- q este o condiție necesară și suficientă pentru p .

1.2 Predicate și cuantificatori

Un *predicat* este un enunț ce conține variabile, având proprietatea că devine propoziție în urma înlocuirii variabilelor cu valori (constante). De exemplu, $x + 1 > 7$ este un predikat (presupunând că lucrăm cu numere reale). Conectorii prezentați în secțiunea precedentă pot fi utilizați (ca și în cazul propozițiilor) pentru a forma predicate noi din predicatele existente. Un predikat poate fi transformat într-o propoziție prin utilizarea *cuantificatorilor*:

- *cuantificatorul universal* $\forall$ („oricare ar fi”);
- *cuantificatorul existențial* $\exists$ („există”).

Propoziția $\forall x p(x)$ este adevărată dacă și numai dacă prin înlocuirea lui x cu orice valoarea c din domeniul de valori (presupus dat) se obține o propoziție adevărată. Propoziția $\exists x p(x)$ este adevărată dacă și numai dacă în domeniul de valori (presupus dat) există o valoarea c cu proprietatea că prin înlocuirea lui x cu c se obține o propoziție adevărată.

Într-o propoziție pot apărea ambele tipuri de cuantificatori. *Elementele legate de cuantificatorii $\exists$ (care apar după $\exists$) depind de toate variabilele ce apărut înainte legate de cuantificatori $\forall$.* Dependența este marcată prin indicarea variabilelor ca indice sau enumerarea lor în paranteză. De exemplu, $\forall x, y \exists a_{x,y} \forall z \exists b_{x,y,z} p(x, a_{x,y}, b_{x,y,z})$.

1.3 Teoreme, leme, corolare

Procedura standard pentru stabilirea adevărului în matematică a fost inventată de Euclid. A plecat de la cinci ipoteze despre geometrie, care păreau de necontestat pe baza experienței directe, cum ar fi de exemplu, faptul că prin două puncte disticte trece o singură dreaptă. Pornind de la aceste enunțuri presupuse a fi adevărate (axiome), Euclid a stabilit adevărul multor propoziții suplimentare prin demonstrații. O demonstrație este o succesiune de deducții logice din axiome și afirmații dovedite anterior care se încheie cu propoziția ce se dorește a fi demonstrată.

Deci o *axiomă* este o propoziție care este presupusă a fi adevărată fără vreo demonstrație.

O *teoremă* este o propoziție al cărei adevăr este garantat de o demonstrație (o modalitate de a arăta că o teoremă decurge logic dintr-un set de axiome sau din alte propoziții demonstrate anterior). Se spune că două propoziții p și q sunt echivalente logic, și se scrie $p \equiv q$, dacă și numai dacă au aceeași valoare de adevăr. Presentăm mai jos câteva echivalențe logice utile în demonstrații:

$$\cdot p \wedge p \equiv p$$

$$\cdot p \vee p \equiv p$$

$$\cdot p \vee (\neg p) \equiv 1$$

$$\cdot p \wedge q \equiv q \wedge p$$

- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$
- $\neg(\neg p) \equiv p$
- $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
- $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
- $\neg(\forall x p(x)) \equiv \exists x \neg p(x)$
- $\neg(\exists x p(x)) \equiv \forall x \neg p(x)$

În consecință,

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) &\equiv (\neg p) \vee q \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \\ &\equiv (\neg q \rightarrow \neg p).\end{aligned}$$

Propoziția $\neg q \rightarrow \neg p$ se numește *contrapusa propoziției* $p \Rightarrow q$. Demonstrația prin contrapunere a propoziției $p \rightarrow q$ înseamnă demonstrarea propoziției $\neg q \rightarrow \neg p$. Cum cele două propoziții sunt echivalente, demonstrând una din ele rezultă și cealaltă. Propoziția $q \rightarrow p$ se numește *reciproca propoziției* $p \rightarrow q$ și în general nu este echivalentă cu aceasta. p se numește ipoteza, iar q se numește concluzia propoziției $p \rightarrow q$.

Din faptul că

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg((\neg p) \vee q) \equiv (\neg(\neg p)) \wedge (\neg q) \\ &\equiv p \wedge (\neg q).\end{aligned}$$

rezultă că dacă demonstrăm că propoziția $p \wedge (\neg q)$ este falsă, atunci propoziția $p \rightarrow q$ este adevărată. O astfel de demonstrație a teoremei $p \Rightarrow q$ se numește reducere la absurd (se presupune concluzia q falsă și se arată că în conjuncție cu ipoteza p și axiomele se ajunge la o contradicție).

În cele ce urmează vom lucra doar cu propoziții adevărate. În afară de teoreme vom mai folosi termenii leamnă și corolar. *Lemele* sunt ca și teoremele propoziții adevărate dar care nu sunt considerate ca importante de sine stătătoare, ci ca pași intermediari în demonstrațiile unor teoreme. *Corolarele* sunt consecințe directe ale teoremelor. Vom folosi termenul de *propoziție* pentru desemna un rezultat adevărat dar care este mai puțin important decât o teoremă.

Capitolul 2

Mulțimi. Relații. Funcții

2.1 Mulțimi

Intuitiv o *mulțime* este colecție de obiecte (*elemente*). Vom considera noțiunea de mulțime ca noțiune primară la fel ca și noțiunea de apartenență a unui element (obiect) la o mulțime. Dacă A este o mulțime iar x un element al ei, atunci se utilizează notația $x \in A$ (x aparține lui A). Dacă x nu este un element al lui A , atunci se scrie $x \notin A$ (x nu aparține lui A). Se spune că două mulțimi A și B sunt egale și se scrie $A = B$ dacă și numai dacă au aceleași elemente, adică

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

O mulțime poate fi specificată prin

- enumerarea elementelor sale: $A = \{a, b, c\}$ (A este mulțimea cu elementele a , b și c);
- specificarea unei proprietăți p a elementelor sale: $A = \{x : p(x)\}$ (A este mulțimea tuturor elementelor x pentru care $p(x)$ este adevărată).

Se notează cu $\emptyset$ *mulțimea vidă*, adică mulțimea ce nu conține nici un element. Fiind date două mulțimi A și B se pot forma mulțimi noi folosind operațiile cu mulțimi:

- *reuniunea*: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ sau } x \in B\}$;

- *intersecția*: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- *diferența*: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- *diferența simetrică* : $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Se numește *pereche ordonată* cu primul element a și al doilea element b și se notează (a, b) mulțimea

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Proprietatea de bază a perechilor ordonate este

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \text{ și } b = y.$$

Similar se poate defini noțiunea de *n-tuplu* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ prin proprietatea de bază:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow a_1 = x_1, a_2 = x_2 \dots a_n = x_n.$$

Se numește *produsul cartezian* al mulțimilor A și B și se notează cu $A \times B$ mulțimea perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ și $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Se numește *produsul cartezian* al mulțimilor $A_1, A_2, \dots, A_n$ și se notează cu $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ mulțimea *n-tuplurilor* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ cu $a_1 \in A, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Dacă $A_1 = A_2 = \dots A_n = A$, atunci se notează $A^n = A \times A \times \dots \times A$.

Se spune că A este o *submulțime* a mulțimii B și se scrie $A \subset B$ dacă și numai dacă

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Este ușor de observat că

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ și } B \subset A.$$

Se numește *mulțimea părților* mulțimii A și se notează cu $\mathcal{P}(A)$ sau 2^A mulțimea submulțimilor lui A :

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

Dacă $A \subset X$, atunci $X \setminus A$ se numește complementara lui A față de X și se notează cu $\mathcal{C}_X A$ sau $\mathcal{C}A$ dacă X rezultă din context. Se observă ușor că

- $x \in \mathcal{C}A \Leftrightarrow x \notin A$;
- $\mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A$;
- $A = B \Leftrightarrow \mathcal{C}A = \mathcal{C}B$.

Fie I o mulțime și pentru orice $i \in I$, fie A_i o mulțime. Mulțimea

$$\{A_i : i \in I\}$$

se numește *familie de mulțimi indexată* după I și se notează cu $\{A_i\}_{i \in I}$.

Definiția 2.1.1 (Reuniunea și intersecția unei familii de mulțimi)

Fie o $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de mulțimi indexată după I . Se numește *reuniunea familiei de mulțimi* $\{A_i\}_{i \in I}$ și se notează $\bigcup_{i \in I} A_i$ mulțimea:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}.$$

Se numește *intersecția familiei de mulțimi* $\{A_i\}_{i \in I}$ și se notează $\bigcap_{i \in I} A_i$ mulțimea:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \forall i \in I\}.$$

Dacă $I = \{1, 2, \dots, n\}$ se utilizează notațiile

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

iar dacă $I = \mathbb{N}$, notațiile

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Propoziția 2.1.2 (Relațiile lui De Morgan) Fie o $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de mulțimi indexată după I . Atunci

$$1. \mathcal{C} \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C} A_i;$$

$$2. \mathcal{C} \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C} A_i.$$

Demonstrație. Demonstrăm egalitățile de mulțimi prin dublă incluziune.

1. „ $\subset$ ”: Fie $x \in \mathcal{C} \bigcup_{i \in I} A_i$. Atunci $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$, de unde rezultă că este adevărată negația propoziției

$$\exists i \in I \ x \in A_i$$

și în consecință $\forall i \in I \ x \notin A_i$ sau echivalent $\forall i \in I \ x \in \mathcal{C} A_i$. Ca urmare $x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C} A_i$.

„ $\supset$ ”: Fie $x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C} A_i$. Atunci $\forall i \in I \ x \in \mathcal{C} A_i$ sau echivalent $\forall i \in I \ x \notin A_i$. Dar $\forall i \in I \ x \notin A_i$ reprezintă negația propoziției $\exists i \in I \ x \in A_i$ care este echivalentă cu $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Deci $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ și ca urmare $x \in \mathcal{C} \bigcup_{i \in I} A_i$.

2. „ $\subset$ ”: Fie $x \in \mathcal{C} \bigcap_{i \in I} A_i$. Atunci $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$, de unde rezultă că este adevărată negația propoziției

$$\forall i \in I \ x \in A_i$$

și în consecință $\exists i \in I \ x \notin A_i$ sau echivalent $\exists i \in I \ x \in \mathcal{C} A_i$. Ca urmare $x \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{C} A_i$.

„ $\supset$ ”: Fie $x \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{C} A_i$. Atunci $\exists i \in I \ x \in \mathcal{C} A_i$ sau echivalent $\exists i \in I \ x \notin A_i$. Dar $\exists i \in I \ x \notin A_i$ reprezintă negația propoziției $\forall i \in I \ x \in A_i$ care este echivalentă cu $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Deci $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ și ca urmare $x \in \mathcal{C} \bigcap_{i \in I} A_i$.

Relația 2 poate fi demonstrată și folosind relația 1. Astfel

$$\mathcal{C} \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}(\mathcal{C}A_i) = \bigcap_{i \in I} A_i = \mathcal{C} \left(\mathcal{C} \bigcap_{i \in I} A_i \right),$$

de unde $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i = \mathcal{C} \bigcap_{i \in I} A_i$ (ținând cont că $A = B \Leftrightarrow \mathcal{C}A = \mathcal{C}B$).

■

2.2 Relații

Definiția 2.2.1 Fie X și Y două mulțimi. Se numește relație (de pe X pe Y) o submulțime ρ a produsului cartezian $X \times Y$:

$$\rho \subset X \times Y.$$

Dacă $X = Y$, ρ se numește relație pe X .

Se spune că x este în relația ρ cu y și se scrie $x\rho y$ dacă și numai dacă $(x, y) \in \rho$.

Definiția 2.2.2 Fie X o mulțime și ρ o relație pe X . Relația ρ se numește

- reflexivă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\rho x \ \forall x \in X$;
- ireflexivă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x, x) \notin \rho \ \forall x \in X$;
- simetrică $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\rho y \Rightarrow y\rho x$;
- antisimetrică $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\rho y \text{ și } y\rho x \Rightarrow x = y$;
- tranzitivă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\rho y \text{ și } y\rho z \Rightarrow x\rho z$;
- totală $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\rho y \text{ sau } y\rho x \ \forall x, y \in X$;
- relație de echivalență $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho$ este reflexivă, simetrică și tranzitivă.
- relație de ordine parțială $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho$ este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

· relație de ordine $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho$ este reflexivă, antisimetrică, tranzitivă și totală.

Definiția 2.2.3 Fie X o mulțime înzestrată cu o relație de echivalență notată $\sim$ și fie $x \in X$. Se numește clasa de echivalență a lui x și se notează cu $[x]$ mulțimea elementelor lui X care sunt în relația $\sim$ cu x (echivalente cu x relativ la $\sim$):

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Se numește factorizarea lui X la $\sim$ și se notează cu $X/\sim$ mulțimea:

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}.$$

Se poate demonstra ușor că dacă X este o mulțime înzestrată cu o relație de echivalență $\sim$, atunci

· pentru orice $x, y \in X$ fie $[x] = [y]$, fie $[x] \cap [y] = \emptyset$;

· $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.

Exemple 2.2.4 1. Relația de egalitate pe $\mathbb{R}$ este o relație de echivalență.

2. Relația de egalitate de mulțimi este o relație de echivalență.

3. Relația pe $\mathbb{Z}$ definită prin: $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 2 \mid (y - x)$ este o relație de echivalență. Are două clase de echivalență: mulțimea numerelor pare și mulțimea numerelor impare.

4. Relația de ordine naturală pe $\mathbb{R}$ ($x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$) este o relație de ordine (totală).

5. Relația de ordine naturală pe $\mathbb{R}$ poate fi extinsă la o relație de ordine totală pe $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ punând $-\infty \leq x, x \leq \infty$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $-\infty \leq \infty$.

6. Relația de incluziune de mulțimi este o relație de ordine parțială.

Definiția 2.2.5 Fie X o mulțime înzestrată cu o relație de ordine notată $\leq$ și fie $A \subset X$. Mulțimea A se numește

- mulțime mărginită superior $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists x \in X$ a.î. $a \leq x \forall a \in A$;
- mulțime nemărginită superior A nu este mărginită superior;
- mulțime mărginită inferior $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists x \in X$ a.î. $x \leq a \forall a \in A$;
- mulțime nemărginită inferior $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} A$ nu este mărginită inferior;
- mulțime mărginită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} A$ este mărginită superior și mărginită inferior ($\Leftrightarrow \exists x, y \in X$ a.î. $x \leq a \leq y \forall a \in A$);
- mulțime nemărginită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} A$ nu este mărginită.

Un element $a_0 \in A$ se numește

- element maxim (sau cel mai mare element, sau ultim element) al mulțimii A și se notează cu $\max(A)$ sau $\max A$ sau $\max_{a \in A} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} a \leq a_0 \forall a \in A$;
- element minim (sau cel mai mic element, sau prim element) al mulțimii A și se notează cu $\min(A)$ sau $\min A$ sau $\min_{a \in A} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} a_0 \leq a \forall a \in A$.

Un element $x_0 \in X$ se numește

- majorant al mulțimii $A \stackrel{def}{\Leftrightarrow} a \leq x_0 \forall a \in A$;
- minorant al mulțimii $A \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x_0 \leq a \forall a \in A$;
- margine superiară a mulțimii A și se notează cu $\sup(A)$ sau $\sup A$ sau $\sup_{a \in A} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x$ este cel mai mic element al mulțimii majoranților;
- margine inferioară a mulțimii A și se notează cu $\inf(A)$ sau $\inf A$ sau $\inf_{a \in A} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x$ este cel mai mare element al mulțimii minoranților.

Mulțimea majoranților sau a minoranților poate fi vidă. Este posibil ca elementul minim sau maxim, marginea superioară sau inferioară ale unei mulțimi să nu existe. Dacă însă ele există se poate observa ușor că sunt unice (ținând cont de antisimetria relației de ordine). Dacă există elementul maxim, atunci există și marginea superioară și sunt egale între ele. Dacă există elementul minim, atunci există și marginea inferioară și sunt egale între ele.

Exemple 2.2.6 Considerăm $\mathbb{R}$ înzestrată cu relația de ordine naturală. Atunci

1. $\min [2, 7] = \inf [2, 7] = 2$, $\max [2, 7] = \sup [2, 7] = 7$;
2. $\min(2, 7]$ nu există, $\inf(2, 7] = 2$, $\max(2, 7] = \sup(2, 7] = 7$;
3. $\min[2, 7) = \inf[2, 7) = 2$, $\max[2, 7)$ nu există, $\sup[2, 7) = 7$;
4. $\min(2, 7)$ nu există, $\inf(2, 7) = 2$, $\max(2, 7)$ nu există, $\sup(2, 7) = 7$;
5. $\min(-\infty, 7]$ nu există, $\inf(-\infty, 7] = 2$ nu există, $\max(-\infty, 7] = 7$, $\sup(-\infty, 7] = 7$;
6. $\min[2, \infty) = \inf[2, \infty) = 2$, $\max[2, \infty)$ nu există, $\sup[2, \infty)$ nu există;
7. $\min(2, \infty)$ nu există, $\inf(2, \infty) = 2$, $\max(2, \infty)$ nu există, $\sup(-\infty, \infty)$ nu există;
8. $\min(-\infty, 7)$ nu există, $\inf(-\infty, 7)$ nu există, $\max(-\infty, 7)$ nu există, $\sup(-\infty, 7) = 7$;
9. $\min(-\infty, \infty)$ nu există, $\inf(-\infty, \infty)$ nu există, $\max(-\infty, \infty)$ nu există, $\sup(-\infty, \infty)$ nu există;

Exemple 2.2.7 Considerăm $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ înzestrată cu relația de ordine extinsă de pe $\mathbb{R}$ ca în exemplele 2.2.4. Atunci

1. $\min [2, 7] = \inf [2, 7] = 2$, $\max [2, 7] = \sup [2, 7] = 7$;
2. $\min(2, 7]$ nu există, $\inf(2, 7] = 2$, $\max(2, 7] = \sup(2, 7] = 7$;

3. $\min[2, 7] = \inf[2, 7] = 2$, $\max[2, 7]$ nu există, $\sup[2, 7] = 7$;
4. $\min(2, 7)$ nu există, $\inf(2, 7) = 2$, $\max(2, 7)$ nu există, $\sup(2, 7) = 7$;
5. $\min(-\infty, 7]$ nu există, $\inf(-\infty, 7] = -\infty$, $\max(-\infty, 7] = 7$, $\sup(-\infty, 7] = 7$;
6. $\min[2, \infty) = \inf[2, \infty) = 2$, $\max[2, \infty)$ nu există, $\sup[2, \infty) = \infty$;
7. $\min(2, \infty)$ nu există, $\inf(2, \infty) = 2$, $\max(2, \infty)$ nu există, $\sup(-\infty, \infty) = \infty$;
8. $\min(-\infty, 7)$ nu există, $\inf(-\infty, 7) = -\infty$, $\max(-\infty, 7)$ nu există, $\sup(-\infty, 7) = 7$;
9. $\min(-\infty, \infty)$ nu există, $\inf(-\infty, \infty) = -\infty$, $\max(-\infty, \infty)$ nu există, $\sup(-\infty, \infty) = \infty$;

În cele ce urmează vom trata orice submulțime A de numere reale ca submulțime a lui $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Axiomă: Dacă A este mărginită (ca submulțime a lui $\mathbb{R}$), atunci $\sup(A)$ și $\inf(A)$ există în $\mathbb{R}$.

Este ușor de observat că $M \in \mathbb{R}$ (respectiv, $m \in \mathbb{R}$) este marginea superioară (respectiv, marginea inferioară) a mulțimii A dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

1. $x \leq M$ (respectiv, $x \geq m$) pentru orice $x \in A$.
2. pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon > M - \varepsilon$ (respectiv, $x_\varepsilon < m + \varepsilon$).

Dacă A este nemărginită superior ($\Leftrightarrow$ nu admite majoranți) atunci $\sup(A) = \infty$, iar dacă A este nemărginită inferior ($\Leftrightarrow$ nu admite minoranți) atunci $\inf(A) = -\infty$.

Prin convenție, $\sup(\emptyset) = -\infty$, iar $\inf(\emptyset) = \infty$.