

Analiză Matematică - Curs 2

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

2	Mulțimi. Relații. Funcții (continuare din cursul 1)	3
2.3	Funcții	3
3	Șiruri și serii de numere reale	11
3.1	Șiruri de numere reale	11
	Index	22

Capitolul 2

Mulțimi. Relații. Funcții (continuare din cursul 1)

2.3 Funcții

Definiția 2.3.1 Fie X și Y două mulțimi. Se numește funcție definită pe X cu valori în Y , și se notează cu $f : X \rightarrow Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$ sau $x \mapsto f(x) [: X \rightarrow Y]$ o relație $f \subset X \times Y$ cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ există și este unic $y \in Y$ a.î. $(x, y) \in f$. Unicul element y ce îi corespunde lui x se notează cu $f(x)$. X se numește domeniul funcției f iar Y se numește codomeniul funcției f .

Dacă $A \subset X$, funcția $h : A \rightarrow Y$, definită prin $h(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$, se numește restricția funcției f la A și se notează cu $f|_A$.

Dacă f și g sunt două funcții, atunci $f = g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ și g au același domeniu, același codomeniu și $f(x) = g(x)$ pentru orice x din domeniu.

Definiția 2.3.2 O funcție $f : X \rightarrow Y$ se numește

- injectivă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ($\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$);
- surjectivă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall y \in Y \exists x \in X$ a.î. $y = f(x)$;

· bijectivă $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f$ este injectivă și surjectivă ($\Leftrightarrow \forall y \in Y$ există un unic $x \in X$ a.î. $y = f(x)$)

Definiția 2.3.3 Fie $f : X \rightarrow Y$ și $g : Y \rightarrow Z$ două funcții. Se numește compunerea funcției g cu f funcția $h : X \rightarrow Z$ definită prin

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Funcția h definită mai sus se notează cu $g \circ f$.

Se poate arăta ușor că dacă $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ și $C \xrightarrow{h} D$ sunt trei funcții (ce pot fi compuse), atunci

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Propoziția 2.3.4 Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție.

1. Dacă f este injectivă, atunci există o funcție $g : Y \rightarrow X$ a.î. $g \circ f(x) = x$ pentru orice $x \in X$.
2. Dacă f este surjectivă, atunci există o funcție $g : Y \rightarrow X$ a.î. $f \circ g(y) = y$ pentru orice $y \in Y$.

Demonstrație. 1. Presupunem că f este injectivă și alegem un element arbitrar $x_0 \in X$. Definim $g : Y \rightarrow X$ prin $g(y) = x$ dacă există x a.î. $y = f(x)$, și prin $g(y) = x_0$ în caz contrar. Se observă că dacă presupunem că pentru un $y \in Y$ există două elemente $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) = y$, atunci $x_1 = x_2$ deoarece f este injectivă. Ca urmare g este bine definită, și în plus $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$ pentru orice $x \in X$.

2. Presupunem că f este surjectivă. Atunci pentru orice $y \in Y$ există $x_y \in X$ astfel încât $y = f(x_y)$. Definim $g : Y \rightarrow X$ prin $g(y) = x_y$ pentru orice $y \in Y$ și observăm că $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$ pentru orice $y \in Y$. ■

Propoziția 2.3.5 Fie $f : X \rightarrow Y$ și $g : Y \rightarrow Z$ două funcții.

1. Dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

2. Dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
3. Dacă f și g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă.
4. Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.
5. Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.
6. Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă și g este surjectivă.
7. Dacă $X = Y$, atunci $f \circ f$ este bijectivă $\Leftrightarrow f$ este bijectivă.

Demonstrație. 1. Fie $x_1, x_2 \in X$ a.î. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, sau echivalent $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Deoarece g este injectivă, rezultă că $f(x_1) = f(x_2)$, iar deoarece f este injectivă, rezultă că $x_1 = x_2$. În consecință $g \circ f$ este injectivă.

2. Fie $z \in Z$. Deoarece g este surjectivă, rezultă că există $y \in Y$ astfel încât $z = g(y)$, iar deoarece f este surjectivă, rezultă că există $x \in X$ astfel încât $y = f(x)$. În consecință $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, și deci $g \circ f$ este surjectivă.

3. Este consecința a lui 1 și 2.

4. Fie $x_1, x_2 \in X$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ sau echivalent $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Cum $g \circ f$ este injectivă, rezultă că $x_1 = x_2$. În consecință f este injectivă.

5. Fie $z \in Z$. Deoarece $g \circ f$ este surjectivă, rezultă că există $x \in X$ astfel încât $z = g \circ f(x)$. Dacă notăm $y = f(x)$ atunci $y \in Y$ și $g(y) = g(f(x)) = z$. Deci g este surjectivă.

6. Este consecința a lui 4 și 5.

7. Este consecința a lui 6. ■

Definiția 2.3.6 Funcția $f : X \rightarrow Y$ se numește funcție inversabilă $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există o funcție $g : Y \rightarrow X$ a.î.

$$\begin{aligned}g \circ f(x) &= x \quad \forall x \in X \\f \circ g(y) &= y \quad \forall y \in Y.\end{aligned}$$

Se poate arăta că dacă funcția f este inversabilă există o unică funcție g care satisface definiția de mai sus. În acest caz funcția g se numește *inversa*

funcției f și se notează cu f^{-1} . Dacă pentru o mulțime A se notează cu id_A funcția $id_A : A \rightarrow A$ definită prin $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$, atunci inversa funcției $f : X \rightarrow Y$ este definită de relațiile

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_X \\ f \circ f^{-1} &= id_Y. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.7 *Funcția $f : X \rightarrow Y$ este funcție inversabilă dacă și numai dacă f este bijectivă.*

Demonstrație. „ $\Rightarrow$ ” Presupunem f inversabilă. Atunci există $f^{-1} : Y \rightarrow X$ a.î.

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_X \\ f \circ f^{-1} &= id_Y. \end{aligned}$$

Cum funcția id_X este bijectivă, și din particular injectivă, din propoziția 2.3.4 (punctul 4) rezultă că f este injectivă. Deoarece funcția id_Y este bijectivă, și din particular surjectivă, din propoziția 2.3.5 (punctul 5) rezultă că f este surjectivă. Deci f este bijectivă.

„ $\Leftarrow$ ” Presupunem f este bijectivă. Atunci pentru orice $y \in Y$ există un unic $x_y \in X$ a.î. $f(x_y) = y$. Definim $g : Y \rightarrow X$ prin $g(y) = x_y$ pentru orice $y \in Y$ și observăm că

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= x \quad \forall x \in X \\ f \circ g(y) &= y \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

În consecință f este inversabilă. ■

Definiția 2.3.8 *Se spune că două mulțimi A și B au același cardinal $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow B$.*

Se spune că mulțimea A are cardinalul $n \in \mathbb{N} \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ($\Leftrightarrow A$ are n elemente).

Mulțimea A se numește numărabilă $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.

Mulțimea A se numește cel mult numărabilă $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} A$ este numărabilă sau finită (există $n \in \mathbb{N}$ a.î. A are cardinalul n).

Definiția 2.3.9 (Imaginea și preimagea unei mulțimi printr-o funcție)

Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție.

- Pentru orice $A \subset X$ imaginea (directă) a lui A prin f se notează cu $f(A)$ și definește prin

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in Y : \exists x \in X \text{ a.î. } y = f(x)\} \\ &= \{f(x) : x \in A\}. \end{aligned}$$

- Pentru orice $B \subset Y$ imaginea inversă sau preimagea lui B prin f se notează cu $f^{-1}(B)$ și definește prin

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Propoziția 2.3.10 Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție inversabilă și fie $B \subset Y$. Atunci imaginea directă a lui B prin inversa funcției f și preimagea lui B prin f coincid.

Demonstrație. Pentru a evita confuziile notăm inversa funcției f prin g și demonstrăm că $g(B) = f^{-1}(B)$ prin dublă incluziune.

Fie $x \in g(B)$. Atunci există $y \in B$ a.î. $x = g(y)$ și ca urmare $f(x) = f(g(y)) = y \in B$. Cum $f(x) \in B$ rezultă că $x \in f^{-1}(B)$.

Fie $x \in f^{-1}(B)$. Atunci $f(x) \in B$ și în consecință $g(f(x)) \in g(B)$. Cum $x = g(f(x))$ rezultă că $x \in g(B)$. ■

Propoziția 2.3.11 Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție, $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale lui X , iar $\{B_j\}_{j \in J}$ o familie de submulțimi ale lui Y . Atunci:

$$1. f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j);$$

$$2. f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i);$$

$$3. f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j);$$

$$4. f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i);$$

$$5. \text{ Dacă } f \text{ este injectivă, atunci } f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Demonstrație. 1. „ $\subset$ ”: Fie $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$. Atunci $f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j$, de unde rezultă că există $j \in J$ a.î. $f(x) \in B_j$. Ca urmare $x \in f^{-1}(B_j)$ și în particular $x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

„ $\supset$ ”: Fie $x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$. Atunci există $j \in J$ a.î. $x \in f^{-1}(B_j)$ și ca urmare $f(x) \in B_j$. În particular, $f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j$ și în consecință

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right).$$

2. „ $\subset$ ”: Fie $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$. Atunci există $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ a.î. $y = f(x)$, de unde rezultă că există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$ și $y = f(x)$. Ca urmare există $i \in I$ a.î. $y \in f(A_i)$. În particular $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

„ $\supset$ ”: Fie $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$. Atunci există $i \in I$ a.î. $y \in f(A_i)$ și ca urmare există $x \in A_i$ a.î. $y = f(x)$. Deci există $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ a.î. $y = f(x)$ și în consecință $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

3. „ $\subset$ ”: Fie $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$. Atunci $f(x) \in \bigcap_{j \in J} B_j$, de unde rezultă că $f(x) \in B_j$ pentru orice $j \in J$. Ca urmare $x \in f^{-1}(B_j)$ pentru orice $j \in J$ și deci $x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

„ $\supset$ ”: Fie $x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$. Atunci $x \in f^{-1}(B_j)$ pentru orice $j \in J$ și ca urmare $f(x) \in B_j$ pentru orice $j \in J$. În consecință, $f(x) \in \bigcap_{j \in J} B_j$ de unde

rezultă $x \in f^{-1} \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$.

4. Fie $y \in f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$. Atunci există $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ a.î. $y = f(x)$, de unde rezultă că $x \in A_i$ și $y = f(x)$ pentru orice $i \in I$. Ca urmare $y \in f(A_i)$ pentru orice $i \in I$ și deci $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

5. Deoarece $f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ pentru orice funcție f , rămâne să arătăm că dacă f este injectivă $\bigcap_{i \in I} f(A_i) \subset f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$. Fie $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Atunci $y \in f(A_i)$ pentru orice $i \in I$, de unde rezultă că pentru orice $i \in I$ există $x_i \in A_i$ a.î. $y = f(x_i)$. Fie $i, k \in I$ doi indici arbitrari. Avem $f(x_i) = y = f(x_k)$. Din faptul că f este injectivă rezultă că $x_i = x_k$. Deci toate elementele x_i sunt egale între ele. Notăm cu x_0 valoarea lor comună. Atunci $x_0 = x_i \in A_i$ pentru orice $i \in I$ și $y = f(x_0)$. Ca urmare $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$ și $y = f(x_0)$, de unde rezultă că $y \in f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$. ■

Definiția 2.3.12 Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow B$ o funcție. Funcția f se numește

- crescătoare $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- descrescătoare $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- strict crescătoare $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- strict descrescătoare $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- monotonă $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f$ este crescătoare sau descrescătoare;
- strict monotonă $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f$ este strict crescătoare sau strict descrescătoare.
- mărginită superior $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) \leq M \forall x \in A$;
- nemărginită superior f nu este mărginită superior;

- *mărginită inferior* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} \text{ a.î. } f(x) \geq M \forall x \in A$;
- *nemărginită inferior* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f \text{ nu este mărginită inferior}$;
- *mărginită* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f \text{ este mărginită superior și mărginită inferior } (\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} \text{ a.î. } m \leq f(x) \leq M \forall x \in A \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \text{ a.î. } |f(x)| \leq C \forall x \in A)$;
- *nemărginită* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f \text{ nu este mărginită}$.

Pentru orice $S \subset A$, se notează cu $\sup_S f$ (respectiv, $\inf_S f$) sau $\sup_{x \in A} f(x)$ (respectiv, $\inf_{x \in A} f$) marginea superioară (respectiv, marginea inferioară) a mulțimii $f(S)$.

Definiția de mai sus are sens nu doar pentru submulțimi A și B de numere reale ci pentru orice mulțimi A și B înzestrate cu o relație de ordine $\leq$ considerând că $x \geq y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} y \leq x$, $x < y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x \leq y$ și $x \neq y$, $x > y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} y < x$.

Capitolul 3

Șiruri și serii de numere reale

3.1 Șiruri de numere reale

Definiția 3.1.1 Fie X o mulțime. Se numește șir de elemente din X o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ și se notează cu $f = (f(n))_n$ sau $f = (x_n)_n$ sau $(x_n)_n$, unde $x_n = f(n)$ pentru orice n . $x_n = f(n)$ se numește termen general al șirului $f = (x_n)_n$.

Se numește subșir al șirului $f = (x_n)_n$ șirul $f \circ g$ unde $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare. Notând $k_n = g(n)$, obținem $f \circ g(n) = f(g(n)) = f(k_n) = x_{k_n}$. Notăția uzuală pentru un subșir $f \circ g$ este $(x_{k_n})_n$.

Se numește șir de numere reale un șir de elemente din $\mathbb{R}$ adică o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiția 3.1.2 Șirul $(x_n)_n$ de numere reale se numește

- crescător $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ funcția $n \mapsto f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} x_n \leq x_{n+1}$);
- descrescător $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ funcția $n \mapsto f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ este descrescătoare ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} x_n \geq x_{n+1}$);
- strict crescător $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ funcția $n \mapsto f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} x_n < x_{n+1}$);

- *strict descrescător* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ funcția $n \mapsto f(n) [: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}]$ este *strict descrescătoare* ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ x_n > x_{n+1}$);
- *monoton* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (x_n)_n$ este *crescător sau descrescător*;
- *strict monoton* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (x_n)_n$ este *strict crescător sau strict descrescător*;
- *mărginit superior* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ mulțimea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ este *mărginită superior* în $\mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ a.î. $x_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$);
- *nemărginit superior* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (x_n)_n$ nu este *mărginit superior*;
- *mărginit inferior* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ mulțimea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ este *mărginită inferior* în $\mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ a.î. $x_n \geq m \ \forall n \in \mathbb{N}$);
- *nemărginit inferior* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (x_n)_n$ nu este *mărginită inferior*;
- *mărginit* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (x_n)_n$ este *mărginit superior și mărginit inferior* ($\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}$ a.î. $m \leq x_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}$ a.î. $|x_n| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$);
- *nemărginit* $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (x_n)_n$ nu este *mărginit*.

Se notează cu $\sup_n x_n$ (respectiv, $\inf_n x_n$) *marginea superioară* (respectiv, *marginea inferioară*) a mulțimii $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 3.1.3 Se numește *vecinătate* a unui număr real x o mulțime $V \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V$ ($\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x \in (a, b) \subset V$).

Se numește *vecinătate* a lui ∞ o mulțime V cu proprietatea că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty) \subset V$.

Se numește *vecinătate* a lui $-\infty$ o mulțime V cu proprietatea că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-\infty, a) \subset V$.

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ atunci există o vecinătate V_x a lui x și a vecinătate V_y a lui y a.î. $V_x \cap V_y = \emptyset$ (într-adevăr, dacă $x \neq y$ atunci $\varepsilon = \frac{|x-y|}{3} > 0$, iar $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = \emptyset$).

Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci există o vecinătate V_x a lui x și o vecinătate V_∞ a lui ∞ și o vecinătate $V_{-\infty}$ a lui $-\infty$ a.î. $V_x \cap V_\infty = \emptyset$, $V_x \cap V_{-\infty} = \emptyset$ și $V_\infty \cap V_{-\infty} = \emptyset$ (într-adevăr, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (x + \varepsilon + 1, \infty) = \emptyset$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (-\infty, x - \varepsilon - 1) = \emptyset$ și $(-\infty, x - \varepsilon - 1) \cap (x + \varepsilon + 1, \infty) = \emptyset$).

Definiția 3.1.4 Se spune că șirul $(x_n)_n$ are limita $a \in \overline{\mathbb{R}}$ și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ sau $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice vecinătate V a lui a există $n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$.

Șirul $(x_n)_n$ se numește convergent dacă există $a \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și divergent în caz contrar (adică dacă nu are limită sau limita este ∞ sau $-\infty$).

Teorema 3.1.5 (Unicitatea limitei) Limita unui șir de numere reale dacă există este unică.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale. Presupunem prin absurd că a, b cu $a \neq b$ sunt două limite ale lui $(x_n)_n$. Deoarece $a \neq b$ atunci există o vecinătate V_a a lui a și o vecinătate V_b a lui b a.î. $V_a \cap V_b = \emptyset$. Deoarece a (respectiv b) este limita lui $(x_n)_n$, rezultă că există $n_a \in \mathbb{N}$ (respectiv, $n_b \in \mathbb{N}$) a.î. $x_n \in V_a$ pentru orice $n \geq n_a$ (respectiv, $x_n \in V_b$ pentru orice $n \geq n_b$). Deci pentru $n = n_a + n_b$ avem $x_n \in V_a \cap V_b$, ceea ce contrazice faptul că $V_a \cap V_b = \emptyset$. ■

Teorema 3.1.6 (Caracterizarea limitelor) Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale.

- Șirul $(x_n)_n$ are limita $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.
- Șirul $(x_n)_n$ are limita $\infty \Leftrightarrow$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > c$ pentru orice $n \geq n_c$.
- Șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty \Leftrightarrow$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < c$ pentru orice $n \geq n_c$.

Demonstrație. Demonstrația este evidentă dacă se ține cont de definiția vecinătăților pentru $a \in \mathbb{R}$, ∞ și $-\infty$. ■

Propoziția 3.1.7 Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ (cu convenția $|\infty| = |-\infty| = \infty$)

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

Demonstrație. 1. Presupunem $a \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Ca urmare

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

În consecință, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

Presupunem că $a = \infty$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > c$ pentru orice $n \geq n_c$. Ca urmare

$$|x_n| \geq x_n > c \text{ pentru orice } n \geq n_c.$$

În consecință, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$.

Presupunem că $a = -\infty$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < c$ pentru orice $n \geq n_c$. În particular, există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < 0$ pentru orice $n \geq n_0$. Ca urmare

$$|x_n| = -x_n > c \text{ pentru orice } n \geq \max\{n_{-c}, n_0\}.$$

În consecință, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$.

2. Rămâne să demonstrăm că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $||x_n| - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Ca urmare

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. ■

Propoziția 3.1.8 Dacă $(x_n)_n$ are limita $a \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subșir al său $(x_{k_n})_n$ are limita a .

Demonstrație. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, pentru orice vecinătate a lui a există $n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$. Din faptul că pentru orice n $k_n \geq n$, rezultă că $x_{k_n} \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$. ■

Propoziția 3.1.9 *Orice șir de numere reale convergent este mărginit.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale cu limita $a \in \mathbb{R}$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - a| < 1$ pentru orice $n \geq n_1$, de unde rezultă că

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a| \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

Notând

$$M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, |a| + 1\},$$

obținem $|x_n| \leq M$ pentru orice n ■

Propoziția 3.1.10 (Criterii de convergență) *Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale.*

1. Dacă există $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ și există un șir $(y_n)_n$ cu limita 0 a.î. $|x_n - a| \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
2. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ și există un șir $(y_n)_n$ cu limita ∞ a.î. $x_n \geq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.
3. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ și există un șir $(y_n)_n$ cu limita $-\infty$ a.î. $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Demonstrație. 1. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|y_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Ca urmare

$$|x_n - a| \leq y_n \leq |y_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

2. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $y_n > c$ pentru orice $n \geq n_c$. Ca urmare

$$x_n \geq y_n > c \text{ pentru orice } n \geq n_c.$$

În consecință, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

3. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $y_n < c$ pentru orice $n \geq n_c$. În particular, există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < 0$ pentru orice $n \geq n_0$. Ca urmare

$$x_n \leq y_n < c \text{ pentru orice } n \geq n_c.$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. ■

Propoziția 3.1.11 Fie $A \subset \mathbb{R}$.

1. Dacă A este mărginită superior (respectiv, mărginită inferior), atunci există un șir convergent $(x_n)_n$ cu proprietatea că $x_n \in A$ pentru orice n și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$ (respectiv, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A$).
2. Dacă A este nemărginită superior (respectiv, nemărginită inferior), atunci există un șir convergent $(x_n)_n$ cu proprietatea că $x_n \in A$ pentru orice n și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (respectiv, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

Demonstrație. 1. Fie $M = \sup A$ (respectiv, $m = \inf A$). Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $x_n \in A$ astfel încât $x_n \geq M - \frac{1}{n}$ (respectiv, $x_n \leq m + \frac{1}{n}$). Atunci $|x_n - M| \leq \frac{1}{n}$ (respectiv, $|x_n - M| \leq \frac{1}{n}$) și ca urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ (respectiv, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$).

2. Dacă A este nemărginită superior (respectiv, nemărginită inferior), atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in A$ astfel încât $x_n \geq n$ (respectiv, $x_n \leq -n$). În acest caz avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (respectiv, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$). ■

Extindem operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire de la $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty, -\infty - \infty = -\infty, \\ a + \infty &= \infty + a = \infty \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}, \\ a - \infty &= \infty - a = -\infty \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}, \\ \infty \infty &= \infty, (-\infty)(-\infty) = \infty, (-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty, \\ a\infty &= \infty a = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a < 0 \end{cases} \\ a(-\infty) &= (-\infty)a = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } a > 0 \\ \infty, & \text{dacă } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\infty}{a} = \frac{1}{a}\infty = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{-\infty}{a} = \frac{1}{a}(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } a > 0 \\ \infty, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

$$\infty^\infty = \infty, \infty^{-\infty} = 0, 0^\infty = 0,$$

$$a^\infty = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\infty^a = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 0 \\ 0, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

Nu se acordă nici un sens scrierii:

$$\infty - \infty, -\infty + \infty, 0\infty, \infty 0, 0(-\infty), (-\infty)0, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 1^{-\infty}, \infty^0, 0^0.$$

Teorema 3.1.12 (Operații cu limite de șiruri) Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale care au limită: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

1. Dacă $a+b$ are sens, atunci șirul $(x_n + y_n)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$;
2. Dacă $c \in \mathbb{R}$ și ca are sens, atunci șirul $(cx_n)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = ca$;
3. Dacă $a-b$ are sens, atunci șirul $(x_n - y_n)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$;
4. Dacă ab are sens, atunci șirul $(x_n y_n)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$;
5. Dacă $\frac{a}{b}$ are sens, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$;

Demonstrație. Se utilizează caracterizarea limitelor și inegalități de tipul

$$\begin{aligned} |x \pm y| &\leq |x| + |y| \\ |xz - yw| &\leq |x||z - w| + |w||x - y|. \end{aligned}$$

■

Propoziția 3.1.13 (Trecerea la limită în inegalități) Dacă șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ au limită și există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Demonstrație. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ concluzia este evidentă. Presupunem prin absurd că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ (respectiv, $n_2 \in \mathbb{N}$) a.î. $x_n > 1$ pentru orice $n \geq n_1$ (respectiv, $y_n < 1$ pentru orice $n \geq n_2$). Așadar pentru orice $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ avem pe de o parte $x_n > 1 > y_n$ și pe de altă parte $x_n \leq y_n$ ceea ce este o contradicție.

Deci dacă limitele nu sunt finite are loc inegalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Rămâne să demonstrăm această inegalitate în cazul limitelor finite. Notăm $\varepsilon = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{3}$ și presupunem prin absurd că $\varepsilon > 0$ (sau echivalent că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$). Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ (respectiv, $n_2 \in \mathbb{N}$) a.î. $|x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1$ (respectiv, $|y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_2$). Așadar pentru orice $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ avem pe de o parte

$$x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{3} > \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n + \varepsilon > y_n$$

și pe de altă parte $x_n \leq y_n$ ceea ce este o contradicție. ■

Corolarul 3.1.14 Fie $(x_n)_n$ un șir.

1. Dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x_n \leq b$ și dacă $(x_n)_n$ are limită, atunci $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$. În particular, dacă $x_n \geq 0$ și dacă $(x_n)_n$ are limită, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$.
2. Dacă există două șiruri $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ care au aceeași limită a.î. $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru orice n , atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Propoziția 3.1.15 Orice șir de numere reale monoton $(x_n)_n$ are limită.

1. Dacă $(x_n)_n$ este crescător $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n x_n$ (deci dacă $(x_n)_n$ este crescător și mărginit superior, atunci este convergent).

2. Dacă $(x_n)_n$ este descrescător $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n x_n$ (deci dacă $(x_n)_n$ este descrescător și mărginit inferior, atunci este convergent).

Demonstrație. 1. Avem două cazuri $(x_n)_n$ mărginit superior sau $(x_n)_n$ nemărginit superior. Presupunem $(x_n)_n$ mărginit superior și notăm $a = \sup_n x_n$. Atunci $a \in \mathbb{R}$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Cum $(x_n)_n$ este crescător rezultă că $x_n \geq x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $a = \sup_n x_n$, rezultă că $x_n \leq a < a + \varepsilon$ pentru orice n . Deci pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - a| < \varepsilon$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \sup_n x_n$.

Presupunem $(x_n)_n$ nemărginit superior. Atunci $\sup_n x_n = \infty$. Pe de altă parte pentru orice $c \in \mathbb{R}$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_{n_c} > c$. Cum $(x_n)_n$ este crescător rezultă că $x_n \geq x_{n_c} > c$ pentru orice $n \geq n_c$ și ca urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

2. Se poate face o demonstrație asemănătoare cu cea de la 1 sau putem observa că $(x_n)_n$ descrescător $\Leftrightarrow (-x_n)_n$ crescător, iar $\inf_n x_n = -\sup_n (-x_n)$ și ca urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \sup_n (-x_n) = -\inf_n x_n$$

și cum $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n x_n$. ■

Corolarul 3.1.16 (Proprietatea cleștelui) Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale care au proprietățile:

i) $(x_n)_n$ crescător și $(y_n)_n$ descrescător;

ii) $x_n \leq y_n$ pentru orice n ;

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Atunci $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ sunt convergente și au aceeași limită.

Exemplul 3.1.17 (Numărul lui Euler și constata lui Euler) Șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ definite prin $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ și $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ pentru orice

$n \in \mathbb{N}^*$ satisfac ipotezele corolarului precedent. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \stackrel{\text{inegalitatea Bernoulli}}{>} \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) \\ &= \frac{n+2}{n+1} \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \end{aligned}$$

ca urmare $(x_n)_n$ este strict crescător. Pe de altă parte avem

$$\begin{aligned} \frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \stackrel{\text{inegalitatea Bernoulli}}{>} \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 \end{aligned}$$

și deci $(y_n)_n$ este strict descrescător. În plus $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq x_n$ pentru orice n și $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \frac{1}{n} = 0$ deoarece

$$0 \leq x_n \frac{1}{n} \leq y_n \frac{1}{n} \leq y_1 \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Conform corolarului precedent $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ sunt convergente și au aceeași limită. Limita lor comună se notează cu e și se numește numărul lui Euler. Se poate arăta că e este irațional, $e = 2,718281828459045235\dots$. Deoarece $e = \sup_n x_n = \inf_n y_n$, avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Logaritmând în baza e se obține

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n} \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Înlocuind n cu $1, 2, \dots, n$ și adunând inegalitățile obținem

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Utilizând aceste inegalități se poate demonstra că șirul $(z_n)_n$, unde $z_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, este descrescător și că $z_n > 0$ pentru orice n . Ca urmare $(z_n)_n$ este convergent. Limita lui se notează cu γ și se numește constanta lui Euler. Se poate arăta că γ este irațional, $\gamma = 0.5772156649015328606\dots$

Teorema 3.1.18 (Proprietatea Cesaro) Orice șir de numere reale mărginit are un subșir convergent.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir mărginit de numere reale. Atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x_n \leq b$ pentru orice n . Construim recursiv două șiruri $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ cu proprietatea că pentru orice n intervalul $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_n$. Procedăm în felul următor: $a_1 = a$, $b_1 = b$ și presupunând că a_n, b_n au fost determinate construim $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ mijlocul intervalului $[a_n, b_n]$. Cum $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_n$, cel puțin unul dintre intervalele $[a_n, c_n]$ și $[c_n, b_n]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_n$. Dacă $[a_n, c_n]$ conține o infinitate de termeni ai șirului, luăm $a_{n+1} = a_n$ și $b_{n+1} = c_n$ altfel luăm $a_{n+1} = c_n$ și $b_{n+1} = b_n$. Alegem un element $x_1 \in [a_1, b_1]$ și presupunând că a fost ales $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$, alegem $x_{k_{n+1}} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ a.î. $k_{n+1} > k_n$ (acest lucru este posibil deoarece $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ conține o infinitate de termeni ai șirului). Cum

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \frac{b - a}{2^n}$$

pentru orice n , $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Pe de altă parte $(a_n)_n$ este crescător, $(b_n)_n$ este descrescător și $a_n \leq b_n$ pentru orice n . Deci $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ sunt convergente și au aceeași limită. Cum pentru orice n , $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. ■

Definiția 3.1.19 Șirul $(x_n)_n$ de numere reale se numește șir Cauchy sau șir fundamental $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_m - x_n| < \varepsilon$ pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$ ($\Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}$).

Propoziția 3.1.20 *Orice șir de numere reale convergent este șir Cauchy.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale convergent și fie a limita sa. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Ca urmare pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$,

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci $(x_n)_n$ este șir Cauchy. ■

Propoziția 3.1.21 *Orice șir Cauchy este mărginit.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale care este șir Cauchy. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_m - x_n| < 1$ pentru orice $n, m \geq n_1$. Notăm

$$M = \max \{|x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}| + 1\}.$$

Atunci $|x_n| \leq M$ pentru orice n . ■

Propoziția 3.1.22 *Orice șir de numere reale care este șir Cauchy este convergent.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale care este șir Cauchy. Conform propoziției 3.1.21, $(x_n)_n$ este mărginit și ca urmare conform teoremei 3.1.18 are un subșir $(x_{k_n})_n$ convergent. Fie $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $(x_n)_n$ este șir Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_m - x_n| < \varepsilon$ pentru orice $n, m \geq n'_\varepsilon$. Cum $k_n \geq n$, avem

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq \max \{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$. Deci $(x_n)_n$ are limita a , și în consecință este mărginit. ■

Teorema 3.1.23 (Criteriul lui Cauchy de convergență a șirurilor)
Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.

Demonstrație. Rezultă din propozițiile 3.1.20 și 3.1.22. ■

Index

- cardinal, 6
- codomeniul funcției, 3
- constantă lui Euler, 21
- criteriul lui Cauchy de convergență
a șirurilor de numere reale, 22
- domeniul funcției, 3
- funcție, 3
 - bijectivă, 4
 - codomeniul funcției, 3
 - crescătoare, 9
 - descrescătoare, 9
 - domeniul funcției, 3
 - injectivă, 3
 - inversa funcției, 6
 - mărginită, 10
 - mărginită inferior, 10
 - mărginită superior, 9
 - monotonă, 9
 - nemărginită, 10
 - nemărginită inferior, 10
 - nemărginită superior, 9
 - restricția unei funcții, 3
 - strict crescătoare, 9
 - strict descrescătoare, 9
 - strict monotonă, 9
 - surjectivă, 3
- image directă, 7
- image inversă, 7
- inversa funcției, 6
- limita unui șir, 13
- mulțime
 - mulțime cel mult numărabilă, 6
 - mulțime finită, 6
 - mulțime numărabilă, 6
- numărul lui Euler, 20
- preimage, 7
- restricția unei funcții, 3
- șir, 11
 - subșir, 11
- șir de numere reale, 11
 - șir Cauchy, 21
 - șir fundamental, 21
 - convergent, 13
 - crescător, 11
 - descrescător, 11
 - divergent, 13
 - limita, 13
 - mărginit, 12
 - mărginit inferior, 12
 - mărginit superior, 12
 - monoton, 12
 - nemărginit, 12

nemărginit inferior, [12](#)
nemărginit superior, [12](#)
strict crescător, [11](#)
strict descrescător, [12](#)
strict monoton, [12](#)
subșir, [11](#)
vecinătate
vecinătate în $\overline{\mathbb{R}}$, [12](#)
vecinătate în $\mathbb{R}$, [12](#)