

Analiză Matematică - Curs 3

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

3	Șiruri și serii de numere reale (continuare din cursul 2)	3
3.1	Șiruri de numere reale (continuare din cursul 2)	3
3.2	Serii de numere reale	8
3.2.1	Serii cu termeni pozitivi	14
Index		19

Capitolul 3

Șiruri și serii de numere reale (continuare din cursul 2)

3.1 Șiruri de numere reale (continuare din cursul 2)

Teorema 3.1.1 (Teorema lui Toeplitz) Fie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

- i) $f(n, k) \geq 0$ pentru orice $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- ii) $\sum_{k=1}^n f(n, k) = 1$ pentru orice $n \geq 1$.
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k) = 0$ pentru orice $k, 1 \leq k \leq n$.

Atunci pentru orice șir $(x_n)_n$ care are limită, șirul $\left(\sum_{k=1}^n f(n, k) x_k\right)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(n, k) x_k\right)$.

Demonstrație. Avem două cazuri: $(x_n)_n$ mărginit și $(x_n)_n$ nemărginit. Presupunem că $(x_n)_n$ este mărginit și notăm $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Atunci pentru

orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(n, k) x_k - a &= \sum_{k=1}^n f(n, k) x_k - \sum_{k=1}^n f(n, k) a = \sum_{k=1}^n f(n, k) (x_k - a) \\ &= \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} f(n, k) (x_k - a) + \sum_{k=n_\varepsilon}^n f(n, k) (x_k - a) \end{aligned}$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} f(n, k) (x_k - a) = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k) (x_k - a) = 0,$$

iar pentru orice $n \geq n_\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n_\varepsilon}^n f(n, k) (x_k - a) \right| \leq \sum_{k=n_\varepsilon}^n f(n, k) |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_\varepsilon}^n f(n, k) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n f(n, k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} f(n, k) (x_k - a) = 0$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} f(n, k) (x_k - a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n'_\varepsilon$. Ca urmare pentru orice $n \geq \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$ avem

$$\left| \sum_{k=1}^n f(n, k) x_k - a \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} f(n, k) (x_k - a) \right| + \left| \sum_{k=n_\varepsilon}^n f(n, k) (x_k - a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(n, k) x_k \right) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Presupunem că $(x_n)_n$ nemărginit. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Să considerăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Atunci pentru orice $c > 0$ există $n_c \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > 3c$ pentru orice $n \geq n_c$.

Pe de altă parte, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) = \sum_{k=1}^{n_c-1} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k) = 0$, rezultă că există $n'_c \in \mathbb{N}$ a.î. $\left| \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) \right| < \frac{1}{3}$ pentru orice $n \geq n'_c$, iar deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) x_k = \sum_{k=1}^{n_c-1} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k) x_k = 0$, rezultă că există $n''_c \in \mathbb{N}$ a.î. $\left| \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) x_k \right| < c$ pentru orice $n \geq n''_c$. În consecință,

pentru orice $n \geq \max \{n_c, n'_c, n''_c\}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(n, k) x_k &= \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) x_k + \sum_{k=n_c}^n f(n, k) x_k > -c + \sum_{k=n_c}^n f(n, k) x_k \\ &\geq -c + \sum_{k=n_c}^n f(n, k) 3c = -c + 3c \left(\sum_{k=1}^n f(n, k) - \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) \right) \\ &= -c + 3c \left(1 - \sum_{k=1}^{n_c-1} f(n, k) \right) > -c + 3c \left(1 - \frac{1}{3} \right) = c. \end{aligned}$$

de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(n, k) x_k \right) = \infty$.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \infty$, și din cele mai sus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(n, k) (-x_k) = \infty$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(n, k) x_k = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(n, k) (-x_k) = -\infty.$$

■

Teorema 3.1.2 (Teorema Stolz-Cesaro) Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:

i) $(b_n)_n$ crescător și nemărginit

ii) $\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \right)_n$ are limită

Atunci $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$.

Demonstrație. Considerăm funcția $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(n, k) =$

$$\begin{cases} \frac{b_1}{b_n}, & \text{dacă } 1 = k \leq n \\ \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n}, & \text{dacă } 2 \leq k \leq n \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{și șirul } x_n = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, & \text{dacă } n = 1 \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, & \text{dacă } 2 \leq n \end{cases}. \text{ Aplicând}$$

teorema 3.1.1 (teorema Toeplitz) rezultă că

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(n, k) x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{b_n} \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=2}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.\end{aligned}$$

■

Exemplul 3.1.3 *Se cere limita (dacă există) a șirului cu termenul general*

$$x_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Fie $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ și $b_n = \sqrt{n}$. Atunci $(b_n)_n$ este crescător și nemărginit și $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$. Deci

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/6} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = \infty.\end{aligned}$$

Conform teoremei Stolz-Cesaro avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty.$$

Propoziția 3.1.4 (Consecințe ale teoremei Stolz-Cesaro)

1. *Dacă șirul $(x_n)_n$ are limită, atunci și șirul $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.*
2. *Dacă șirul $(x_n)_n$ are limită și $x_n > 0$ pentru orice n , atunci și șirul $\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\right)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.*
3. *Dacă șirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ are limită și $x_n > 0$ pentru orice n , atunci și șirul $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.*

Analiză Matematică - curs 3

Demonstrație. 1. Fie $a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ și $b_n = n$. Atunci $(b_n)_n$ este crescător și nemărginit și $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = x_n$. Conform teoremei Stolz-Cesaro avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Conform 1 avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pe de altă parte dacă $(x_n)_n$ are limită și $x_n > 0$, atunci $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \begin{cases} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (0, \infty) \\ \infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \\ 0, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \end{cases}$$

și nou conform 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$, de unde rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (0, \infty) \\ \infty, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \\ 0, & \text{dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \end{cases} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Din inegalitatea mediilor rezultă că

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

și cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. Considerăm șirul definit prin $y_1 = x_1$, $y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$ pentru orice $n \geq 2$. Atunci $(y_n)_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Din 2 rezultă că $(\sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n})_n$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Dar $\sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} = \sqrt[n]{x_1 \frac{x_2}{x_1} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \sqrt[n]{x_n}$, de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. ■

Exemple 3.1.5 Să se calculeze următoarele limite (dacă există):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

Luăm $a_n = n$ și observăm că $a_n > 0$ pentru orice n și că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Luăm $a_n = \frac{n!}{n^n}$ și observăm că $a_n > 0$ pentru orice n și că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right)^{-\frac{n}{n+1}} \\ &= e^{-1}, \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$. Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

3.2 Serii de numere reale

Definiția 3.2.1 Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale și $s_n = \sum_{k=p}^n x_k$ ($p \in \mathbb{N}$).

Perechea de șiruri $\left((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p} \right)$ se numește serie de numere reale și se notează cu $\sum_{n \geq p} x_n$ sau $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$. Elementele șirului $(x_n)_n$ se numesc termenii seriei, iar elementele șirului $(s_n)_n$ se numesc sume parțiale (x_n se numește termen general al seriei, iar s_n se numește sumă parțială de rang n).

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, seria $\sum_{k \geq n+1} x_k$ se numește restul de rang n al seriei.

Seria $\sum_{n \geq p} x_n$ se numește convergentă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ șirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ este convergent. În caz contrar se numește divergentă.

Limita șirului sumelor parțiale $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (dacă există) se numește suma seriei și în această situație se folosește notația $s = \sum_{n=p}^{\infty} x_n$.

Analiză Matematică - curs 3

Este ușor de observat că pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$ și $n \geq p+q$, seriile $\sum_{n \geq p+q} x_n$ și $\sum_{n \geq p} x_{n+q}$ au sumele parțiale de rang n identice, ca urmare. $\sum_{n \geq p+q} x_n = \sum_{n \geq p} x_{n+q}$.

Exemplul 3.2.2 (Seria geometrică) Fie seria $\sum_{n \geq 0} r^n$, cu $r \in \mathbb{R}$. Termenul ei general este $x_n = r^n$, iar suma parțială de rang n este

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n r^k = \begin{cases} \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, & \text{dacă } r \neq 1 \\ n+1, & \text{dacă } r = 1. \end{cases}$$

Ca urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{dacă } |r| < 1 \\ \infty, & \text{dacă } r \geq 1 \\ \text{nu există,} & \text{dacă } r \leq -1. \end{cases}$$

În consecință, seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ este convergentă $\Leftrightarrow |r| < 1$. Dacă $|r| < 1$, suma seriei $\sum_{n \geq 0} r^n$ este $\frac{1}{1-r}$. Seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ se numește seria geometrică de rație r .

Exemplul 3.2.3 Seria $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ este convergentă și are limita e . Într-adevăr,

suma parțială de rang n este $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ și

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{n} \frac{n}{n} \dots \frac{n}{n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pe de altă parte, pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \geq \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)}{n} \dots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n}$$

și trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$, obținem $e \geq s_j$. Deci $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e$ și trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$.

Propoziția 3.2.4 Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Fie $(s_n)_n$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ și fie $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (limita există și este finită deoarece seria este convergentă). Din faptul că $x_n = s_n - s_{n-1}$ pentru orice $n \geq 2$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$. ■

Exemple 3.2.5 Următoarele serii sunt divergente deoarece termenul lor general nu converge la 0:

1. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \neq 0$.
2. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$, $x_n = (-1)^n$, $(x_n)_n$ nu are limită.

Teorema 3.2.6 (Criteriul lui Cauchy de convergență a seriilor) O serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul $(s_n)_n$ este convergent,

unde $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ pentru orice n . Șirul de numere reale $(s_n)_n$ este convergent $\Leftrightarrow (s_n)_n$ este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \in \mathbb{N}.$$

■

Exemplul 3.2.7 Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ are termenul general $x_n = \frac{\sin(nx)}{2^n}$. Pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| &\leq \\ \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| &\stackrel{|\sin(y)| \leq 1}{\leq} \\ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Analiză Matematică - curs 3

Pentru orice $\varepsilon > 0$ luăm $n_\varepsilon = \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$. Ca urmare pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ și deci $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, de unde rezultă că

$$\left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}$. În consecință conform criteriului de convergență al lui Cauchy seria este convergentă.

Propoziția 3.2.8 Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie și $p \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă restul de rang p al seriei, adică $\sum_{n \geq p+1} x_n$, este o serie convergentă. În caz de convergență dacă notăm $r_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n$ (suma seriei $\sum_{n \geq p+1} x_n$) și s suma seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$, atunci

$$s = \sum_{k=1}^p x_k + r_p \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^p x_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} x_k \right)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = 0.$$

Demonstrație. Suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ este $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ iar a seriei $\sum_{n \geq p+1} x_n$ este $t_n = \sum_{i=p+1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^p x_i = s_n - s_p$. Ca urmare $(t_n)_n$ este convergent dacă și numai dacă $(s_n)_n$ este convergent. În caz de convergență, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_p = s - s_p$. În consecință, $\sum_{n \geq p+1} x_n$ are suma $s - s_p$, adică $r_p = s - s_p$ și cum $\lim_{p \rightarrow \infty} s_p = s$, rezultă că $\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = 0$. ■

Definiția 3.2.9 Se numește suma seriilor $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$, și se notează cu $\sum_{n \geq 1} x_n + \sum_{n \geq 1} y_n$, seria al cărei termen general este $x_n + y_n$. Se numește produsul dintre numărul real α și seria $\sum_{n \geq 1} x_n$, și se notează cu $\alpha \sum_{n \geq 1} x_n$, seria al cărei termen general este αx_n .

Propoziția 3.2.10 (Operații cu serii de numere reale convergente)

1. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ (respectiv, $\sum_{n \geq 1} y_n$) este convergentă și are suma x (respectiv y), atunci $\sum_{n \geq 1} x_n + \sum_{n \geq 1} y_n$ este convergentă și are suma $x + y$.
2. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă și are suma x și dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă și are suma αx .

Demonstrație. Demonstrația este evidentă (se ține cont de operațiile cu limite de șiruri). ■

Exemplul 3.2.11 Să se arate că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{(n-1)!}$ este convergentă și să calculeze suma ei

R: Termenul general este $x_n = \frac{n^3}{(n-1)!}$. Rescriem acest termen plecând de la faptul că pentru orice polinom P de grad d și orice număr întreg q există constantele reale $A_0, A_1, \dots, A_d$ astfel încât

$$\begin{aligned} P(n) &= A_d(n+q)(n+q-1)\dots(n+q-d+1) + \\ &\quad A_{d-1}(n+q)(n+q-1)\dots(n+q-d+2) + \dots + A_0. \end{aligned}$$

Pentru polinomul n^3 avem

$$n^3 = A_3(n-1)(n-2)(n-3) + A_2(n-1)(n-2) + A_1(n-1) + A_0.$$

Prin identificarea coeficienților obținem $A_3 = 1$, $A_2 = 6$, $A_1 = 7$, $A_0 = 1$.
Ca urmare avem

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 6(n-1)(n-2) + 7(n-1) + 1}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-4)!} + 6\frac{1}{(n-3)!} + 7\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}, \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

și

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^3 \frac{n^3}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 4} \frac{n^3}{(n-1)!} = \frac{45}{2} + \sum_{n \geq 4} \frac{n^3}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{45}{2} + \sum_{n \geq 4} \frac{1}{(n-4)!} + 6 \sum_{n \geq 4} \frac{1}{(n-3)!} + 7 \sum_{n \geq 4} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 4} \frac{1}{(n-1)!} \\
 &= \frac{45}{2} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + 6 \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} - 1 \right) + 7 \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} - 1 - 1 \right) + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} - 1 - 1 - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{45}{2} + 15 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} - 22 - \frac{1}{2} \\
 &= 15 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

Deci seria $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{(n-1)!}$ este convergentă și are suma $15e$.

Propoziția 3.2.12 Fie $(a_n)_n$ un șir de numere reale convergent și $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci seria $\sum_{n \geq 1} (a_{n+p} - a_n)$ este convergentă și are suma $p \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \sum_{k=1}^p a_k$.

Demonstrație. Suma parțială de rang n a seriei este

$$s_n = \sum_{k=1}^n (a_{k+p} - a_k) = \sum_{k=1}^n a_{k+p} - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=p+1}^{j+p} a_j - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^p a_k.$$

Ca urmare $(s_n)_n$ este convergent. Așadar $\sum_{n \geq 1} (a_{n+p} - a_n)$ este convergentă

și are suma $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = p \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \sum_{k=1}^p a_k$. ■

Exemplul 3.2.13 Să se arate că seria $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^2-4}$ este convergentă și să calculeze suma ei

R: Termenul general este $x_n = \frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{(n-2)(n+2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n+2}$. Prin identificarea coeficienților rezultă $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Deci $x_n = \frac{1}{4} \frac{1}{n-2} - \frac{1}{4} \frac{1}{n+2}$. Ca în demonstrația propoziției anterioare suma parțială de rang n a seriei este

$$s_n = \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{4} \frac{1}{k-2} - \frac{1}{4} \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=3}^6 \frac{1}{4} \frac{1}{k-2} - \sum_{k=n}^{n+4} \frac{1}{4} \frac{1}{k-2}.$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=3}^6 \frac{1}{4} \frac{1}{k-2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{48}$. Așadar seria este convergentă și are suma $\frac{25}{48}$.

Definiția 3.2.14 Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ se numește absolut convergentă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ seria $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ este convergentă.

Propoziția 3.2.15 *Orice serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstrație. Fie seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ absolut convergentă. Atunci seria $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ este convergentă și conform criteriului de convergență al lui Cauchy

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}|$ pentru orice n și p . Ca urmare

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \in \mathbb{N}.$$

și aplicând din nou criteriului de convergență al lui Cauchy, rezultă că seria este $\sum_{n \geq 1} x_n$ convergentă. ■

Definiția 3.2.16 *O serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă se numește semiconvergentă.*

3.2.1 Serii cu termeni pozitivi

Definiția 3.2.17 *O serie de numere reale $\sum_{n \geq 1} x_n$ se numește serie cu termeni*

pozitivi $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_n > 0$ pentru orice n .

Două serii cu termeni pozitivi au aceeași natură $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ sunt fie ambele convergente, fie ambele divergente.

În cazul seriilor cu termeni pozitivi, șirul sumelor parțiale este un șir crescător. Deci convergența seriilor cu termeni pozitivi este echivalentă cu mărginirea șirului sumelor parțiale.

Teorema 3.2.18 (Criteriul de condensare al lui Cauchy) *Fie $(x_n)_n$ un șir descrescător de numere reale nenegative. Atunci seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.*

Demonstrație. Fie s_{2^n-1} (respectiv, t_n) suma parțială de rang $2^n - 1$ (respectiv, n) asociată seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ (respectiv, $\sum_{n \geq 1} 2^n x_{2^n}$). Pentru orice numere naturale k și j cu proprietatea că $2^k \leq j < 2^{k+1}$ avem

$$x_{2^k} \geq x_j > x_{2^{k+1}} \text{ deoarece } (x_n)_n \text{ este descrescător}$$

și ca urmare

$$2^k x_{2^k} \geq \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} x_j > 2^k x_{2^{k+1}}$$

de unde rezultă că

$$\sum_{k=0}^n 2^k x_{2^k} \geq \sum_{j=1}^{2^{n+1}-1} x_j > \sum_{k=0}^n 2^k x_{2^{k+1}}$$

sau echivalent

$$t_n \geq s_{2^{n+1}-1} > \frac{1}{2} t_{n+1}.$$

Presupunem că $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă. Atunci $(s_n)_n$ este convergent, deci mărginit. În particular, $(s_{2^{n+1}-1})_n$ este mărginit, iar din inegalitatea de mai sus, $(t_{n+1})_n$ este mărginit. Cum $(t_{n+1})_n$ este și crescător, rezultă că $(t_{n+1})_n$, și deci $(t_n)_n$, este convergent. În consecință, seria $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Presupunem că $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ este convergentă. Rezultă că $(t_n)_n$ este mărginit și ca urmare $(s_{2^{n+1}-1})_n$ este mărginit. Pentru orice k există n_k astfel încât $k \leq 2^{n_k+1} - 1$. Cum $(s_k)_k$ este crescător rezultă $s_k \leq s_{2^{n_k+1}-1}$ pentru orice k , și ca urmare $(s_k)_k$ este mărginit. Deci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă. ■

Exemplul 3.2.19 (Seria armonică generalizată) Fie seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ unde

$\alpha \in \mathbb{R}$. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^\alpha} > 0$ pentru orice n .

Dacă $\alpha < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \neq 0$, și deci seria este divergentă.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \neq 0$, și deci seria este divergentă.

Dacă $\alpha > 0$, $(x_n)_n$ este descrescător, și ca urmare conform criteriului de condensare al lui Cauchy seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Pentru orice n , notăm

$$y_n = 2^n x_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = (2^{1-\alpha})^n.$$

Seria $\sum_{n \geq 0} y_n$ este o serie geometrică. Rația ei este $r = 2^{1-\alpha}$. Deci

$$\sum_{n \geq 0} y_n \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă, dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă, dacă } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

În concluzie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă, dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă, dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se numește seria armonică generalizată. În cazul particular $\alpha = 1$, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ se numește seria armonică.

Exemplul 3.2.20 Fie seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\log_a n)^\alpha}$, unde $a > 1$ iar $\alpha \geq 0$. Termenul general al seriei $x_n = \frac{1}{n(\log_a n)^\alpha} > 0$ pentru orice n . Șirul $(x_n)_n$ este descrescător, și ca urmare conform criteriului de condensare al lui Cauchy seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură. Pentru orice n , notăm

$$y_n = 2^n x_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n (\log_a 2^n)^\alpha} = \frac{1}{(\log_a 2)^\alpha} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Seria $\sum_{n \geq 0} y_n$ are aceeași natură cu seria armonică generalizată $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Deci

$$\sum_{n \geq 0} y_n \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă, dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă, dacă } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

și ca urmare

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\log_a n)^\alpha} \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă, dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă, dacă } 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 3.2.21 (Criterii de comparație) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ două serii cu termeni pozitivi.

Criteriul I. Dacă $x_n \leq y_n$ pentru orice n , atunci:

1. Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ convergentă $\Rightarrow$ Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ convergentă.
2. Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ divergentă $\Rightarrow$ Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ divergentă.

Criteriul II. Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ pentru orice n , atunci:

1. Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ convergentă $\Rightarrow$ Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ convergentă.
2. Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ divergentă $\Rightarrow$ Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ divergentă.

Criteriul III. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ au aceeași natură.

Demonstrație. Fie s_n (respectiv, t_n) suma parțială de rang n asociată seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ (respectiv, $\sum_{n \geq 1} y_n$).

Criteriul I. Deoarece $x_n \leq y_n$ pentru orice n , $s_n \leq t_n$ pentru orice n . Și ca urmare dacă $(t_n)_n$ este mărginit, atunci $(s_n)_n$ este mărginit, iar dacă $(t_n)_n$ este nemărginit, atunci $(s_n)_n$ este nemărginit.

Criteriul II. Deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ pentru orice n , rezultă că $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n}$ pentru orice n . Ca urmare

$$\frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{x_1}{y_1} \text{ pentru orice } n.$$

Deci $x_n \leq \frac{x_1}{y_1} y_n$ pentru orice n , și putem aplica mai departe criteriul I seriilor $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} \frac{x_1}{y_1} y_n$.

Criteriul III. Luăm $a, b \in \mathbb{R}$ a.î.

$$0 < a < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} < b < \infty.$$

Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ (respectiv, $n_2 \in \mathbb{N}$) a.î. $\frac{x_n}{y_n} \geq a$ (respectiv, $\frac{x_n}{y_n} \leq b$) pentru orice $n \geq n_1$ (respectiv, $n \geq n_2$). Ca urmare pentru orice $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ avem

$$ay_n \leq x_n \leq by_n.$$

Ținem cont de criteriul I și de faptul că un număr finit de termeni nu influențează convergența sau divergența unei serii, și deducem că $\sum_{n \geq 1} x_n$ și

$\sum_{n \geq 1} y_n$ au aceeași natură. ■

Exemple 3.2.22 Să se precizeze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+2^n}.$

R: Pentru orice n avem

$$\frac{1}{n+2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

iar $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este termenul general al seriei geometrice de rație $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$.

Cum seria $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă, aplicând criteriul I de comparație,

rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+2^n}$ este divergentă

2. $\sum_{n \geq 1} x_n$, unde $(x_n)_n$ are proprietatea că există $r > 1$ a.î. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq r$ pentru orice n .

R: Ținând cont că

$$\frac{r^{n+1}}{r^n} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

și că seria $\sum_{n \geq 1} r^n$ este divergentă pentru $r > 1$, rezultă că aplicând

criteriul al II-lea de comparație obținem divergență $\sum_{n \geq 1} x_n$.

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+1}}{n^2+5}.$

Analiză Matematică - curs 3

R: Fie $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+1}}{n^2+5}$ termenul general al seriei și fie $y_n = \frac{1}{n^{4/3}}$. Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ este convergentă (seria armonică generalizată pentru $\alpha = \frac{4}{3} > 1$). Din faptul că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+1}}{n^2+5} n^{4/3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = 1 \in (0, \infty) \end{aligned}$$

și din al III-lea criteriu de comparație, rezultă că seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ au aceeași natură. Deci seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+1}}{n^2+5}$ este convergentă.

Index

- criterii de comparație a seriilor, [17](#)
- criteriul de condensare al lui Cauchy, [14](#)
- criteriul lui Cauchy de convergență
a seriilor de numere reale, [10](#)
- rest de rang n al seriei, [8](#)
- seria armonică, [16](#)
- seria armonică generalizată, [16](#)
- seria geometrică, [9](#)
- serie absolut convergentă, [13](#)
- serie convergentă, [8](#)
- serie cu termeni pozitivi, [14](#)
 - criterii de comparație, [17](#)
- serie de numere reale, [8](#)
 - rest de rang n , [8](#)
 - serie absolut convergentă, [13](#)
 - serie convergentă, [8](#)
 - serie cu termeni pozitivi, [14](#)
 - serie divergentă, [8](#)
 - serie semiconvergentă, [14](#)
 - sumă parțială, [8](#)
 - suma seriei, [8](#)
 - termen general al seriei, [8](#)
- serie divergentă, [8](#)
- serie semiconvergentă, [14](#)
- suma seriei, [8](#)
- sume parțiale, [8](#)
- teorema lui Toeplitz, [3](#)
- teorema Stolz-Cesaro, [5](#)
- termenii seriei, [8](#)