

Analiză Matematică - Curs 4

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

3	Șiruri și serii de numere reale (continuare din cursul 3)	3
3.2	Serii de numere reale(continuare din cursul 3)	3
3.2.1	Serii cu termeni pozitivi (continuare din cursul 3) - Criterii de convergență	3
3.2.2	Serii alternate	9
3.2.3	Serii cu termeni oarecare	11
3.2.4	Produsul convolutiv a două serii	15
Index		18

Capitolul 3

Șiruri și serii de numere reale (continuare din cursul 3)

3.2 Serii de numere reale(continuare din cursul 3)

3.2.1 Serii cu termeni pozitivi (continuare din cursul 3) - Criterii de convergență

Propoziția 3.2.1 (Criteriul rădăcinii al lui Cauchy) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

1. Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $L = 1$, nu se poate decide natura seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ (mai precis, există serii $\sum_{n \geq 1} x_n$ pentru care $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ și sunt convergente și există serii $\sum_{n \geq 1} x_n$ pentru care $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ și sunt divergente).

Demonstrație. 1. Deoarece $0 \leq L < 1$ există $r > 0$ a.î. $L < r < 1$. Cum $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ și $r < L$ există $n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $\sqrt[n]{x_n} < r$ pentru orice $n \geq n_r$. Ca urmare $x_n < r^n$ pentru orice $n \geq n_r$, iar seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ este convergentă fiind o serie geometrică de rație $r \in (0, 1)$. Conform criteriului I de comparație, seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece $L > 1$ există r a.î. $L > r > 1$. Din faptul că $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, rezultă că există un subșir $(\sqrt[k_n]{x_{k_n}})_n$ al șirului $(\sqrt[n]{x_n})_n$ a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{x_{k_n}} = L > r$. Ca urmare există $n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $\sqrt[k_n]{x_{k_n}} > r$ pentru orice $n \geq n_r$, de unde rezultă că $x_{k_n} > r^{k_n} > 1$ pentru orice $n \geq n_r$. Deci $(x_{k_n})_n$ și în consecință $(x_n)_n$ nu poate converge la 0. Așadar seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

3. Considerăm seria armonică generalizată $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = 1$, iar seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$. ■

Propoziția 3.2.2 (Criteriul raportului al lui d'Alembert) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

1. Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $L = 1$, nu se poate decide natura seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$.

Demonstrație. 1. Deoarece $0 \leq L < 1$ există $r > 0$ a.î. $L < r < 1$. Cum $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ și $r < L$ există $n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$ pentru orice $n \geq n_r$. Ca urmare $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{r^{n+1}}{r^n}$ pentru orice $n \geq n_r$, iar seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ este convergentă, fiind o serie geometrică de rație $r \in (0, 1)$. Conform criteriului al II-lea de comparație, seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece $L > 1$ există r a.î. $L > r > 1$. Din faptul că $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ și $r < L$ există $n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $\frac{x_{n+1}}{x_n} > r$ pentru orice $n \geq n_r$. Ca urmare

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{r^{n+1}}{r^n}$ pentru orice $n \geq n_r$, iar seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ este divergentă, fiind o serie geometrică de rație $r > 1$. Conform criteriului al II-lea de comparație, seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

3. Considerăm seria armonică generalizată $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1,$$

iar seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$. ■

Propoziția 3.2.3 (Criteriul lui Kumer) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă există un șir de numere reale pozitive $(a_n)_n$ a.î.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \right) > 0,$$

atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

2. Dacă există un șir de numere reale pozitive $(a_n)_n$ a.î. seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$

este divergentă și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \right) < 0$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1. Fie $r \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \right) > r > 0$. Atunci există $n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} > r$ pentru orice $n \geq n_r$. Ca urmare $a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1} > r x_{n+1}$ pentru orice $n \geq n_r$ și deci

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_r+1}^n x_k &< \frac{1}{r} \sum_{k=n_r+1}^n (x_{k-1} a_{k-1} - x_k a_k) = \\ \frac{1}{r} (x_{n_r} a_{n_r} - x_{n_r+1} a_{n_r+1} + x_{n_r+1} a_{n_r+1} - x_{n_r+2} a_{n_r+2} + \dots + x_{n-1} a_{n-1} - x_n a_n) &= \\ \frac{1}{r} (x_{n_r} a_{n_r} - x_n a_n) &\leq \frac{1}{r} x_{n_r} a_{n_r}. \end{aligned}$$

Deci şirul $\left(\sum_{k=n_r+1}^n x_k\right)_n$ este mărginit şi crescător şi în consecinţă convergent.
 Ca urmare seria $\sum_{n \geq n_r} x_n$ este convergentă, şi în consecinţă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

2. Fie $r \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right) < r < 0$. Atunci există $n_r \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < r$ pentru orice $n \geq n_r$. Ca urmare $\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{a_{n+1}+r}{a_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ şi deci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} \text{ pentru orice } n \geq n_r,$$

iar seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ este divergentă. Conform criteriului al II-lea de comparaţie, seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă. ■

Propoziţia 3.2.4 (Criteriul Raabe-Duhamel) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$.

1. Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Demonstraţie. Caz particular al criteriului Kumer pentru $a_n = n$. ■

Conform unei consecinţe a teoremei Stolz-Cesaro, dacă şirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ are limită şi $x_n > 0$ pentru orice n , atunci şi şirul $(\sqrt[n]{x_n})_n$ are limită şi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Aşadar dacă $x_n > 0$ pentru orice n , iar şirurile $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ şi $(\sqrt[n]{x_n})_n$ au limită, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Ca urmare dacă aplicarea criteriului raportului a dus la indecizie, nu se încearcă în continuare aplicarea criteriului rădăcinii, ci a unui alt criteriu cum ar fi Raabe-Duhamel. La fel pentru criteriul rădăcinii.

Exemple 3.2.5 Să se precizeze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:

1. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 3} \right)^n$

R: *Seria $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 3} \right)^n$ este divergentă conform criteriului rădăcinii, deoarece*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 3} = 3 > 1.$$

2. $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{2} \right)^n$

R: *Seria $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{2} \right)^n$ este convergentă conform criteriului raportului, deoarece*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{1}{2n+3}$

R: *Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{1}{2n+3} > 0$ pentru orice n . Avem*

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \frac{1}{2n+5} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \frac{2n+3}{1} \\ &= \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)(2n+5)} \end{aligned}$$

Deoarece $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, nu putem stabili natura seriei utilizând criteriului raportului. Încercăm să utilizăm criteriul Raabe-Duhamel:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(\frac{(2n+2)(2n+5)}{(2n+3)^2} - 1 \right) \\ &= n \frac{2n+1}{4n^2 + 14n + 10} \\ &= \frac{2n^2 + n}{4n^2 + 14n + 10} \end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{4n^2+14n+10} = \frac{1}{2} < 1$, seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{1}{2n+3}$$

este divergentă conform criteriului Raabe-Duhamel.

O serie care are numai un număr finit de termeni negativi poate fi asimilată cu o serie cu termeni pozitivi. De asemenea studiul unei serii $\sum_{n \geq 1} x_n$ care are numai un număr finit de termeni pozitivi este echivalent cu studiul seriei $-\sum_{n \geq 1} (-x_n)$ care are doar un număr finit de termeni negativi.

Criteriile de convergență pentru seriile cu termeni pozitivi pot fi utilizate pentru studiul absolut convergenței unei serii după cum urmează.

Propoziția 3.2.6 Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ două serii cu proprietățile:

i) $|x_n| \leq y_n$ pentru orice n ;

ii) Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ convergentă

Atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ absolut convergentă.

Demonstrație. Este consecință a criteriului I de comparație. ■

Propoziția 3.2.7 Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie și fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.

1. Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

2. Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Criteriul rădăcinii aplicat seriei $\sum_{n \geq 1} |x_n|$. ■

Propoziția 3.2.8 Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie și fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$.

1. Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă.
2. Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Criteriul raportului aplicat seriei $\sum_{n \geq 1} |x_n|$. ■

3.2.2 Serii alternate

Definiția 3.2.9 O serie de numere reale $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x_n$ se numește serie alternată $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_n > 0$ pentru orice n .

Propoziția 3.2.10 (Criteriul lui Leibniz) O serie alternată

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x_n$$

cu proprietatea că $(x_n)_n$ este un șir descrescător cu limita zero, este o serie convergentă. Dacă s este suma ei iar s_n o sumă parțială, atunci pentru orice $n \geq 1$, avem

$$|s - s_n| < x_{n+1}.$$

Demonstrație. Deoarece pentru orice $n \geq 1$ avem

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + (-x_{2n+2} + x_{2n+3}) \leq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} &= s_{2n} + (x_{2n+1} - x_{2n+2}) \geq s_{2n}, \end{aligned}$$

rezultă că $(s_{2n+1})_n$ este descrescător iar $(s_{2n+2})_n$ este crescător. În plus, $s_{2n+2} = s_{2n+1} - x_{2n+2} \leq s_{2n+1}$ iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+2} = 0$. Aplicând proprietatea cleștelui rezultă că $(s_{2n+1})_n$ și $(s_{2n+2})_n$ sunt convergente și au aceeași limită. Ca urmare $(s_n)_n$ este convergent. În consecință, seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x_n$ este convergentă și are suma

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+2}.$$

Pe de altă parte pentru orice $n \geq 0$, avem

$$|s - s_{2n+1}| = s_{2n+1} - s < s_{2n+1} - s_{2n+2} = x_{2n+2}$$

iar

$$|s - s_{2n+2}| = s - s_{2n+2} < s_{2n+3} - s_{2n+2} = x_{2n+3}$$

și deci pentru orice $n \geq 1$,

$$|s - s_n| < x_{n+1}.$$

■

Exemplul 3.2.11 Să se precizeze natura seriei $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

R: Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este o serie alternată cu proprietatea că $(x_n)_n$ ($x_n = \frac{1}{n}$) este un șir descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Conform criteriului lui Leibniz, $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este o serie convergentă. Pe de altă parte seria

$$\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

este divergentă (seria armonică) și deci $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ nu este absolut convergentă.

În concluzie $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ este semiconvergentă.

Exemplul 3.2.12 (Calculul aproximativ al sumei unei serii alternate)

Să se calculeze cu trei zecimale exacte suma seriei $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^n}$.

R: Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^n}$ este o serie alternată cu proprietatea că $(x_n)_n$ ($x_n = \frac{1}{(2n-1)^n}$) este un șir descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^n} = 0$. Conform criteriului lui Leibniz, $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^n}$ este o serie convergentă. Dacă s este suma ei iar s_n o sumă parțială, atunci pentru orice $n \geq 1$, avem

$$|s - s_n| < x_{n+1}, \text{ unde } x_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)^{n+1}}.$$

Dacă $x_{n+1} \leq \frac{1}{10^3}$, atunci $|s - s_n| < \frac{1}{10^3}$. Dar

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow (2n+1)^{n+1} \geq 1000,$$

de unde rezultă $n \geq 3$. Aproximăm deci suma seriei cu

$$s_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{1009}{1125} = 0,896888...$$

3.2.3 Serii cu termeni oarecare

În această secțiune considerăm serii de numere reale $\sum_{n \geq 1} x_n$ fără a impune vreo restricție asupra semnului termenului general x_n .

Lema 3.2.13 (Identitatea lui Abel) Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale. Atunci

$$1. \sum_{k=n}^{n+p} x_k (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=n}^{n+p-1} (x_k - x_{k+1}) y_k + x_{n+p} y_{n+p} - x_n y_{n-1}.$$

$$2. \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (x_k - x_{k+1}) s_k + x_{n+p} s_{n+p} - x_{n+1} s_n, \text{ unde}$$

$$s_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Demonstrație. 1. Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} x_k (y_k - y_{k-1}) &= \sum_{k=n}^{n+p} x_k y_k - \sum_{k=n}^{n+p} x_k y_{k-1} \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} x_k y_k + x_{n+p} y_{n+p} - \sum_{j=n-1}^{n+p-1} x_{j+1} y_j \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} x_k y_k + x_{n+p} y_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} x_{k+1} y_k - x_n y_{n-1} \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} (x_k - x_{k+1}) y_k + x_{n+p} y_{n+p} - x_n y_{n-1}. \end{aligned}$$

2. Se obține înlocuind în 1 șirul $(y_n)_n$ cu $(s_n)_n$, n cu $n+1$ și p cu $p-1$.

■

Propoziția 3.2.14 (Criteriul Abel-Dirichlet) Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n|$ convergentă.

ii) $\sup_n |s_n| < \infty$ unde $s_n = \sum_{k=1}^n y_k$ pentru orice $n \geq 1$.

Atunci $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Aplicând identitatea lui Abel rezultă

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |x_k - x_{k+1}| |s_k| + |x_{n+p}| |s_{n+p}| - |x_{n+1}| |s_n|.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+p}| |s_{n+p}| &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1}| |s_n| &= 0 \end{aligned}$$

(produsul unui șir cu limita 0 cu un șir mărginit) și de asemenea cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$$

(termenul general al unei serii convergente) avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |x_k - x_{k+1}| |s_k| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_{n+2}| |s_{n+1}| + \dots + \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+p-1} - x_{n+p}| |s_{n+p-1}| = 0. \end{aligned}$$

Aplicând criteriul de convergență al lui Cauchy, rezultă că $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă. ■

Corolarul 3.2.15 (Criteriul lui Dirichlet) Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:

i) $(x_n)_n$ descrescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

ii) $\sup_n |s_n| < \infty$ unde $s_n = \sum_{k=1}^n y_k$ pentru orice $n \geq 1$.

Atunci $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Avem $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n \geq 1} x_n - x_{n+1}$, iar suma parțială de rang n este

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k - x_{k+1} = x_1 - x_{n+1}.$$

de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_1$. Ca urmare $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n \geq 1} x_n - x_{n+1}$ este convergentă. Aplicând criteriul Abel-Dirichlet, rezultă că $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă. ■

Exemplul 3.2.16 Să se arate că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n) \cos(n^2)}{\sqrt[3]{n}}$ este convergentă.

R: Aplicăm criteriul lui Dirichlet pentru $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ și $y_n = \sin(n) \cos(n^2) = \frac{1}{2} (\sin n(n+1) - \sin(n-1)n)$ observând că

$$|s_n| = \left| \sum_{k=1}^n y_k \right| = \left| \frac{1}{2} \sin(n+1)(n+2) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Corolarul 3.2.17 Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:

i) $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n|$ convergentă.

ii) $\sum_{n \geq 1} y_n$ convergentă.

Atunci $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Deoarece $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n|$ convergentă, rezultă că $\sum_{n \geq 1} x_{n+1} - x_n$ este convergentă. Cum

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k),$$

șirul $(x_n)_n$ este convergent. Fie $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Aplicând criteriul Abel-Dirichlet, rezultă că $\sum_{n \geq 1} (x_n - x) y_n$ este convergentă. În consecință,

$$\sum_{n \geq 1} x_n y_n = \sum_{n \geq 1} (x_n - x) y_n + x \sum_{n \geq 1} y_n$$

este convergentă. ■

Corolarul 3.2.18 (Criteriul lui Abel) *Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:*

i) $(x_n)_n$ monoton și mărginit.

ii) $\sum_{n \geq 1} y_n$ convergentă.

Atunci $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Putem presupune că $(x_n)_n$ este mărginit și crescător (altfel înlocuim x_n cu $-x_n$). Avem $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n \geq 1} x_{n+1} - x_n$, iar suma parțială de rang n este

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_{k+1} - x_k = x_{n+1} - x_1.$$

de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_1$. Ca urmare $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n \geq 1} x_{n+1} - x_n$ este convergentă. Aplicând criteriul Abel-Dirichlet, rezultă că $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă. ■

Exemplul 3.2.19 *Să se arate că seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\sqrt[3]{n}}$ este convergentă.*

R: *Aplicăm criteriul lui Abel pentru $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ și $y_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ observând că $\sum_{n \geq 1} y_n = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz.*

Corolarul 3.2.20 (Variantă a criteriului lui Leibniz) Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale cu proprietățile:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
- ii) $\sum_{n \geq 1} |x_{n+1} - x_n|$ convergentă.

Atunci $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x_n$ este convergentă.

Demonstrație. Luând $y_n = (-1)^{n+1}$ și aplicând criteriul Abel-Dirichlet, rezultă că $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x_n = \sum_{n \geq 1} x_n y_n$ este convergentă. ■

3.2.4 Produsul convolutiv a două serii

Definiția 3.2.21 Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ două serii de numere reale. Se numește produsul convolutiv al celor două serii seria $\sum_{n \geq 0} z_n$, unde

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0.$$

Produsul convolutiv al seriilor $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ se notează $\left(\sum_{n \geq 0} x_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} y_n \right)$.

Lema 3.2.22 Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- ii) $\sum_{n \geq 0} y_n$ absolut convergentă.

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = 0$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$, s suma seriei $\sum_{n \geq 0} |y_n|$ și $M = \max\{s, 1\}$.
Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ pentru orice } n \geq N_1.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $N_2 \geq N_1$ și

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{k=0}^{N_1-1} |x_k| + 1} \text{ pentru orice } n \geq N_2.$$

Așadar pentru orice $n \geq N_2 + N_1 - 1$ avem

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} x_k y_{n-k} \right| + \left| \sum_{k=N_1}^n x_k y_{n-k} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{k=0}^{N_1-1} |x_k| + 1} \sum_{k=0}^{N_1-1} |x_k| + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{k=N_1}^n |y_{n-k}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} s \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

În consecință, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = 0$. ■

Teorema 3.2.23 (Teorema lui Mertens) Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ două serii de numere reale, una convergentă și cealaltă absolut convergentă. Atunci produsul convolutiv al celor două serii este o serie convergentă, iar suma ei este egală cu produsul sumelor seriilor date.

Demonstrație. Presupunem $\sum_{n \geq 0} x_n$ absolut convergentă și $\sum_{n \geq 0} y_n$ convergentă.
Fie x suma seriei $\sum_{n \geq 0} x_n$ și y suma seriei $\sum_{n \geq 0} y_n$. Pentru orice $n \geq 0$, notăm

$r_n = y - \sum_{k=0}^n y_k$. Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k x_j y_{k-j} \right) &= x_0 y_0 + \\ &\quad x_0 y_1 + x_1 y_0 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0 \\ &= x_0 \sum_{k=0}^n y_k + x_1 \sum_{k=0}^{n-1} y_k + \dots + x_n \sum_{k=0}^0 y_k, \end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k x_j y_{k-j} \right) &= x_0 (y - r_n) + x_1 (y - r_{n-1}) + \dots + x_n (y - r_0) \\ &= y \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n x_k r_{n-k} \end{aligned}$$

Conform lemei anterioare $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k r_{n-k} = 0$. Ca urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k x_j y_{k-j} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} y \sum_{k=0}^n x_k = yx.$$

Așadar produsul convolutiv $\left(\sum_{n \geq 0} x_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} y_n \right)$ este o serie convergentă, iar suma ei este egală cu produsul sumelor seriilor $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$. ■

Teorema 3.2.24 (Teorema lui Cauchy) Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ două serii de numere reale absolut convergente. Atunci produsul convolutiv al celor două serii este o serie absolut convergentă.

Demonstrație. Pentru orice $n \geq 0$, avem

$$\left| \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |x_k| |y_{n-k}|$$

iar seria $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n |x_k| |y_{n-k}| \right)$ este convergentă conform teoremei lui Mertens (fiind produsul convolutiv al seriilor $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ și $\sum_{n \geq 0} |y_n|$). Conform criteriului

I de comparație seria $\sum_{n \geq 0} \left| \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right|$ este convergentă. Așadar seria

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right)$$

este absolut convergentă. ■

Exemplul 3.2.25 Considerăm seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ cu $|r| < 1$. Seria $\sum_{n \geq 0} r^n$ fiind absolut convergentă, produsul convolutiv

$$\left(\sum_{n \geq 0} r^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} r^n \right)$$

este o serie convergentă și are suma egală cu pătratul sumei seriei $\sum_{n \geq 0} r^n$.

Termenul de rang n al seriei $\left(\sum_{n \geq 0} r^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} r^n \right)$ este

$$r^0 r^n + r^1 r^{n-1} + \dots + r^n r^0 = (n+1) r^n.$$

Așadar $\left(\sum_{n \geq 0} r^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} r^n \right) = \sum_{n \geq 0} (n+1) r^n$ și ca urmare seria $\sum_{n \geq 0} (n+1) r^n$ este absolut convergentă și are suma $\left(\frac{1}{1-r} \right)^2$.

Teorema 3.2.26 (Teorema lui Abel) Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ (respectiv $\sum_{n \geq 0} y_n$) o serie convergentă având suma x (respectiv y). Dacă produsul convolutiv al celor două serii este o serie convergentă și are suma z , atunci $z = xy$.

Index

- criteriul Abel-Dirichlet, [12](#)
- criteriul lui Abel, [14](#)
- criteriul lui Dirichlet, [12](#)
- criteriul lui Kumer, [5](#)
- criteriul lui Leibniz, [9](#), [15](#)
- criteriul rădăcinii al lui Cauchy, [3](#)
- criteriul Raabe-Duhamel, [6](#)
- criteriul raportului (d'Alembert), [4](#)
- identitatea lui Abel, [11](#)
- produs convolutiv de serii, [15](#)
 - teorema lui Abel, [18](#)
 - teorema lui Cauchy, [17](#)
 - teorema lui Mertens, [16](#)
- serie alternată, [9](#)
- serie cu termeni pozitivi
 - criteriul lui Cauchy, [3](#)
 - criteriul lui d'Alembert, [4](#)
 - criteriul lui Kumer, [5](#)
 - criteriul rădăcinii, [3](#)
 - criteriul Raabe-Duhamel, [6](#)
 - criteriul raportului, [4](#)
- serie de numere reale
 - criteriul Abel-Dirichlet, [12](#)
 - criteriul lui Abel, [14](#)
 - criteriul lui Dirichlet, [12](#)
 - criteriul lui Leibniz, [9](#)
 - produs convolutiv, [15](#)
 - serie alternată, [9](#)
 - teorema lui Mertens, [16](#)