

Analiză Matematică - Curs 5

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

4	Spații topologice	3
4.1	Topologie	3
4.2	Șiruri și funcții pe spații topologice	8
4.2.1	Limite uzuale de funcții reale	11
4.3	Spații conexes, compacte și local-compacte	15
4.4	Spații metrice	18
4.5	Spații normate și spații Hilbert	21
	Index	23

Capitolul 4

Spații topologice

În capitolul precedent am definit noțiunea de limită (a unui șir de numere reale) utilizând noțiunea de vecinătate a unui număr real sau a lui $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. Cadrul general în care se definesc vecinătățile este dat de așa numite spații topologice.

4.1 Topologie

Definiția 4.1.1 (Topologie) Fie X o mulțime. O familie τ de submulțimi ale lui X se numește topologie pe X dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. X și $\emptyset$ sunt elemente ale lui τ
2. Dacă I este o familie oarecare de indici și dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$
3. Dacă I este o familie finită de indici și dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcap_{i \in I} G_i \in \tau$.

Mulțimea X înzestrată cu o topologie τ se numește *spațiu topologic* și se notează (X, τ) . Dacă nu există posibilitatea unei confuzii, nu se mai precizează topologia τ . Elementele unui spațiu topologic se numesc puncte,

iar elementele topologiei se numesc *mulțimi deschise* (cu alte cuvinte, $G \subset X$ se numește mulțime deschisă dacă și numai dacă $G \in \tau$). O submulțime F a spațiului topologic X se numește *mulțime închisă* dacă este complementara (în raport cu X) unei mulțimi deschise.

Exemple 4.1.2 1. Pentru orice mulțime X , $\{\emptyset, X\}$ satisface condițiile din definiția topologiei. Topologia în care familia mulțimilor deschise este $\{\emptyset, X\}$ se numește topologia indiscretă sau trivială pe X .

2. Pentru orice mulțime X , $\mathcal{P}(X) = 2^X$ satisface condițiile din definiția topologiei. Topologia $\tau_d = \mathcal{P}(X) = 2^X$ se numește topologia discretă pe X .

3. Familia reuniunilor de intervale deschise ale lui $\mathbb{R}$ împreună cu $\emptyset$ dă o topologie pe $\mathbb{R}$ numită topologia uzuală (sau topologia naturală) pe $\mathbb{R}$.

4. Dacă (X, τ_X) și (Y, τ_Y) sunt două spații topologice. Atunci familia mulțimilor $G \subset X \times Y$ cu proprietatea că pentru orice $(a, b) \in G$ există $A \in \tau_X$ și $B \in \tau_Y$ astfel încât

$$(a, b) \in A \times B \subset G$$

este o topologie pe $X \times Y$ numită topologia produs. Mai general, dacă (X_i, τ_i) , $i = 1..n$, sunt spații topologice, topologia produs pe $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ este familia mulțimilor $G \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ cu proprietatea că pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ și pentru orice $i = 1..n$ există $A_i \in \tau_i$ astfel încât

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subset G.$$

O submulțime V a spațiului topologic X se numește *vecinătate* a punctului $x \in X \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există o mulțime deschisă G astfel încât $x \in G \subset V$. Mai general, V este o vecinătate a mulțimii $A \subset X$ dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $A \subset G \subset V$. Se poate arăta ușor că o submulțime $A \subset X$ este deschisă dacă și numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său. O mulțime $\mathcal{U}(x)$ de vecinătăți ale unui punct $x \in X$ se numește *sistem fundamental de vecinătăți* pentru punctul $x \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ pentru orice V vecinătate a

lui x există $U \in \mathcal{U}(x)$ astfel încât $U \subset V$. Dacă notăm cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților lui x atunci sunt adevărate următoarele proprietăți:

V1. Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ atunci $x \in V$.

V2. Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subset U$, atunci $U \in \mathcal{V}(x)$.

V3. Dacă $V, U \in \mathcal{V}(x)$, atunci $V \cap U \in \mathcal{V}(x)$.

V4. Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci există $U \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât V este vecinătate pentru fiecare punct $y \in U$.

Se poate arăta că proprietățile V1 – V4 definesc unic topologia lui X , în sensul că dacă funcția $x \mapsto \mathcal{V}(x)$ satisface condițiile V1 – V4, atunci

$$\tau = \{G \subset X : G \in \mathcal{V}(x) \text{ pentru orice } x \in G\} \cup \{\emptyset\}$$

este o topologie pe X și $\mathcal{V}(x)$ este mulțimea vecinătăților lui x în această topologie. În această situație se spune că topologia a fost *generată cu ajutorul vecinătăților*. Această observație ne permite să definim o topologie pe X pornind de la o familie $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in X}$ de submulțimi ale lui X având proprietatea că

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X : \text{există } U \in \mathcal{U}(x) \text{ astfel încât } U \subset V\}$$

satisface condiții V1 – V4 pentru orice x .

În cele ce urmează A este o submulțime a spațiului topologic X .

Se numește *interiorul mulțimii* A , și se notează cu $\text{int}(A)$ sau $\overset{\circ}{A}$, reuniunea tuturor mulțimilor deschise incluse în A . $\text{Int}(A)$ poate fi definit în mod echivalent ca fiind cea mai mare mulțime deschisă (relativ la relația de incluziune) conținută în A . Punctele mulțimii $\text{int}(A)$ se numesc *puncte interioare* ale lui A . În consecință, $x \in \text{int}(A)$ dacă și numai dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $x \in G \subset A$. Mulțimea A este deschisă dacă și numai dacă $A = \text{int}(A)$.

Se numește *închiderea mulțimii* A , și se notează cu $\overline{A}$, intersecția tuturor mulțimilor închise ce conțin pe A . $\overline{A}$ poate fi definită în mod echivalent ca fiind cea mai mică mulțime închisă (relativ la relația de incluziune) care include pe A . Punctele mulțimii $\overline{A}$ se numesc *puncte aderente* ale lui A .

Se observă imediat că $x \in \overline{A}$ dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui x , $V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea A este închisă dacă și numai dacă $A = \overline{A}$. Mulțimea A se numește *densă* în X dacă $\overline{A} = X$. Se poate arăta că

$$X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A) \text{ și } X \setminus \text{int}(A) = \overline{X \setminus A}.$$

Un punct $x \in X$ se numește *punct de acumulare* (sau *punct limită*) al lui A $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ oricare ar fi vecinătatea V a lui x , avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește *derivata mulțimii* A . Un punct $x \in X$ se numește *punct izolat* al mulțimii A $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \cap A = \{x\}$. Mulțimea A se numește *discretă* dacă orice punct al ei este izolat.

Se numește *exteriorul* mulțimii A , și se notează cu $\text{exterior}(A)$, mulțimea $\text{int}(X \setminus A)$. Un punct $x \in \text{exterior}(A)$ se numește *punct exterior* lui A . Rezultă imediat că $x \in \text{exterior}(A)$ dacă și numai dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \cap A = \emptyset$.

Se numește *frontiera* mulțimii A , și se notează cu $Fr(A)$ sau $\partial(A)$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Elementele mulțimii $Fr(A)$ se numesc *puncte frontieră* ale lui A (puncte care nu aparțin nici interiorului nici exteriorului mulțimii A). Vom nota cu $frn(A) = Fr(A) \setminus A = \overline{A} \setminus A$ (mulțimea punctelor frontieră ale lui A care nu aparțin lui A).

Se poate arăta că:

- $\text{int}(A) = A \setminus Fr(A)$;
- $\overline{A} = A \cup Fr(A)$;
- $Fr(X \setminus A) = Fr(A)$;
- $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$;
- $Fr(A \cap B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$;
- $X = \text{int}(A) \cup \text{exterior}(A) \cup Fr(A)$;
- $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$;
- $Fr(\text{int}(A)) \subset Fr(A)$;

- A este deschisă dacă și numai dacă $Fr(A) = \overline{A} \setminus A$;
- A este închisă dacă și numai dacă $Fr(A) = A \setminus int(A)$.

Mulțimea A se numește *mulțime de tipul G_δ* dacă se poate scrie sub forma unei intersecții numărabile de mulțimi deschise ale lui X . Mulțimea A se numește *mulțime de tipul F_σ* dacă se poate scrie sub forma unei reuniuni numărabile de mulțimi închise ale lui X .

Dacă (X, τ) este un spațiu topologic și A o submulțime a lui X , atunci

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$$

este o topologie pe A numită *topologia indusă* pe A de topologia τ , sau restricția (*urma*) topologiei τ pe A . Se mai spune că A este *subspațiu topologic* al lui X . Orice element al lui τ_A se numește mulțime deschisă în A , iar orice submulțime a lui A închisă în topologia τ_A (i.e. complementara unui element al lui τ_A) se numește mulțime închisă în A . Mulțimea B este τ_A -închisă (închisă în A) dacă și numai dacă există o mulțime închisă F (relativ la τ) astfel încât $B = F \cap A$. Închiderea lui B în topologia τ_A este intersecția dintre închiderea lui B în topologia τ și A .

O familie $\mathcal{B}$ de mulțimi deschise în spațiul topologic X cu proprietatea că orice mulțime deschisă din X este reuniunea unei familii de elemente din $\mathcal{B}$ se numește *bază* (de mulțimi deschise) pentru topologia lui X . Familia $\mathcal{B}$ de mulțimi deschise ale spațiului topologic X este bază dacă și numai dacă pentru orice $x \in X$ și orice vecinătate V a lui x există $B \in \mathcal{B}$ astfel încât $x \in B \subset V$. O familie $\mathcal{B}$ de submulțimi ale unei mulțimi X este bază pentru o topologie pe X dacă există o topologie pe X astfel încât $\mathcal{B}$ să fie bază pentru acea topologie (care se va numi topologia generată de baza $\mathcal{B}$). Se arată ușor că $\mathcal{B}$ bază pentru o topologie pe X dacă

$$B1. \cup\{B : B \in \mathcal{B}\} = X;$$

B2. Pentru orice U și V din $\mathcal{B}$, $U \cap V$ este reuniunea unei familii de elemente din $\mathcal{B}$.

Două baze care generează aceeași topologie se numesc baze echivalente.

Fie τ_1 și τ_2 două topologii pe X . Se spune că τ_1 este *mai slabă* (sau *mai puțin fină*) decât τ_2 sau că τ_2 este *mai tare* (sau *mai fină*) decât τ_1 $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$

orice mulțime deschisă în topologia τ_1 este deschisă și în topologia τ_2 (cu alte cuvinte, $G \in \tau_1 \Rightarrow G \in \tau_2$).

Un spațiu topologic X se numește *spațiu T_2* sau spațiu (*separat*) *Hausdorff* dacă și numai dacă oricare ar fi punctele distincte $x, y \in X$, există două mulțimi deschise disjuncte G_x și G_y astfel încât $x \in G_x$ și $y \in G_y$.

4.2 Șiruri și funcții pe spații topologice

Fie X un spațiu topologic. După cum știm deja se numește șir de elemente din X o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ și se notează cu $f = (f(n))_n$ sau $f = (x_n)_n$ sau $(x_n)_n$, unde $x_n = f(n)$ pentru orice n .

Definiția 4.2.1 (Limita unui șir) *Fie X un spațiu topologic. Un punct $a \in X$ se numește limita șirului $(x_n)_n$ din X (sau se spune că $(x_n)_n$ converge la a în X) și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice vecinătate V a lui a există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_V$ avem $x_n \in V$.*

Este ușor de observat că în definiția precedentă "orice vecinătate V a lui a " poate fi înlocuită cu "orice mulțime deschisă V ce conține a " sau cu "orice mulțime V dintr-un sistem fundamental de vecinătăți ale lui a ". De asemenea ca și în cazul șirurilor de numere reale avem:

Teorema 4.2.2 (Unicitate limitei unui șir) *Dacă X este spațiu separat (spațiu Hausdorff), atunci limita unui șir din X (dacă există) este unică.*

Definiția 4.2.3 *Un șir din spațiu topologic X care are limită în X se numește convergent în X . Un șir care nu este convergent se numește divergent.*

Un punct $a \in X$ se numește punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui a și orice $n \in \mathbb{N}$ există $k \geq n$, astfel încât $x_k \in V$.

Se observă că:

- Dacă $(x_n)_n$ este un şir din X cu proprietatea că $x_n \in A \subset X$ pentru orice n , şi dacă a este un punct limită al lui $(x_n)_n$, atunci $a \in \overline{A}$ (închiderea mulţimii A). (Într-adevăr, (pentru orice vecinătate V a lui a , $V \cap A \neq \emptyset$)
- Un punct a este punct limită al şirului $(x_n)_n$ dacă şi numai dacă există un subşir al şirului $(x_n)_n$ convergent la a .
- Dacă a este limita unui şir $(x_n)_n$ cu proprietatea că $x_n \in A \subset X$ pentru orice n , atunci $a \in \overline{A}$.

Definiţia 4.2.4 (Limita unei funcţii) Fie X şi Y două spaţii topologice, A o submulţime a lui X şi fie $f : A \rightarrow Y$ o funcţie. Fie a un punct de acumulare al lui A . Se spune că f are limita $b \in Y$ în punctul a şi se scrie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\iff}$ pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in (U_V \setminus \{a\}) \cap A$.

În definiţia precedentă "orice vecinătate a lui b , respectiv a " poate fi înlocuită cu "orice mulţime deschisă ce conţine b , respectiv a " sau cu "orice mulţime dintr-un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui b , respectiv a ". Cu notaţiile din definiţia precedentă, dacă f are limită în a şi $(x_n)_n$ este un şir din A astfel încât $x_n \neq a$ pentru orice n şi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Teorema 4.2.5 (Unicitate limitei unei funcţii) Fie X un spaţiu topologic, A o submulţime a lui X şi a un punct de acumulare al lui A . Dacă Y este spaţiu separat (spaţiu Hausdorff), atunci limita unei funcţii $f : A \rightarrow Y$ în a (dacă există) este unică.

Demonstraţie. Fie $b_1, b_2 \in Y$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ şi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$. Presupunem prin absurd că $b_1 \neq b_2$. Atunci există două mulţimi deschise V_1 şi V_2 astfel încât $b_1 \in V_1, b_2 \in V_2$ şi $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Cum $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$, există o vecinătate U_1 a lui a astfel încât $f(x) \in V_1$ pentru orice $x \in (U_1 \setminus \{a\}) \cap A$. Pe de altă parte din faptul că $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$ rezultă că există o vecinătate U_2 a lui a astfel încât $f(x) \in V_2$ pentru orice $x \in (U_2 \setminus \{a\}) \cap A$. Deci

pentru orice $x \in (U_1 \cap U_2 \cap A) \setminus \{a\}$ avem $f(x) \in V_1 \cap V_2$ ceea ce contrazice $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

Cu notațiile din teorema precedentă, dacă $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ sunt două șiruri din A astfel încât $x_n \neq a$ și $y_n \neq a$ pentru orice n , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, atunci f nu are limită în punctul a (altfel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$). Dacă A o submulțime a unui spațiu topologic X , a un punct de acumulare al lui A f este continuă în a și $(x)_n$ este un șir din A astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Definiția 4.2.6 (Limitele laterale ale unei funcții) Fie Y un spațiu topologic, $A \subset \mathbb{R}$ (înzestrat cu topologia uzuală) și fie $f : A \rightarrow Y$ o funcție. Punctul $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește punct de acumulare la stânga pentru A și se scrie $a \in A'_s \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice vecinătatea V a lui a avem $(V \setminus \{x \geq a\}) \cap A \neq \emptyset$. Se spune că f are limita la stânga $b \in Y$ în punctul $a \in A'_s$ și se scrie $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U_V \cap A$, $x < a$.

Punctul $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește punct de acumulare la dreapta pentru A și se scrie $a \in A'_d \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice vecinătatea V a lui a avem $(V \setminus \{x \leq a\}) \cap A \neq \emptyset$. Se spune că f are limita la dreapta $b \in Y$ în punctul a și se scrie $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U_V \cap A$, $x > a$.

Este ușor de observat în cazul în care Y este spațiu separat (spațiu Hausdorff) $f : A \rightarrow Y$ are limită în punctul $a \in A'_s \cap A'_d$ dacă și numai dacă are limită la stânga și la dreapta în a și cele două limite laterale coincid. În această situație $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$.

Definiția 4.2.7 (Funcție continuă) Fie X și Y două spații topologice, A o submulțime a lui X și fie $f : A \rightarrow Y$ o funcție. Se spune că $f : A \rightarrow Y$ este continuă într-un punct $a \in A$ dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U_V \cap A$.

Se spune că f este continuă pe $A_0 \subset A$ dacă f este continuă în orice punct $a \in A_0$.

Se observă că:

- f este continuă în orice punct izolat din A .
- Dacă $a \in A$ este punct de acumulare pentru A , atunci f este continuă în a dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Dacă f este continuă în a și $(x)_n$ este un șir din X astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Teorema 4.2.8 (Condiții necesare și suficiente de continuitate globală)

Dacă X și Y sunt două spații topologice și $f : X \rightarrow Y$ este o funcție, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f continuă pe X .
2. Pentru orice mulțime deschisă $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ este deschisă în X .
3. Pentru orice mulțime închisă $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ este închisă în X .
4. Pentru orice $A \subset X$ avem $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
5. Pentru orice $B \subset Y$ avem $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Definiția 4.2.9 *Dacă X și Y sunt două spații topologice și $f : X \rightarrow Y$ este o funcție bijectivă, atunci f se numește homeomorfism dacă f și f^{-1} sunt continue.*

4.2.1 Limite uzuale de funcții reale

I Limitele la $\pm\infty$ ale polinoamelor și funcțiilor raționale

1. Dacă $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$
2. Dacă $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$
3. Dacă $p > 0$ și $a_p \neq 0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0) = a_p \infty = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_p > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_p < 0 \end{cases}$$

4. Dacă $p > 0$ și $a_p \neq 0$, atunci

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \\ & = (-1)^p a_p \infty = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_p > 0 \text{ și } p \text{ par} \\ -\infty, & \text{dacă } a_p > 0 \text{ și } p \text{ impar} \\ -\infty, & \text{dacă } a_p < 0 \text{ și } p \text{ par} \\ \infty, & \text{dacă } a_p < 0 \text{ și } p \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Dacă $r > 0$ și $a_p b_r \neq 0$, atunci

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ & = \begin{cases} \frac{a_p}{b_r} \infty, & \text{dacă } p > r \\ \frac{a_p}{b_r}, & \text{dacă } p = r \\ 0, & \text{dacă } p < r \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } p > r \text{ și } \frac{a_p}{b_r} > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } p > r \text{ și } \frac{a_p}{b_r} < 0 \\ \frac{a_p}{b_r}, & \text{dacă } p = r \\ 0, & \text{dacă } p < r \end{cases} \end{aligned}$$

6. Dacă $r > 0$ și $a_p b_r \neq 0$, atunci

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ & = \begin{cases} \frac{a_p}{b_r} (-1)^{p-r} \infty, & \text{dacă } p > r \\ \frac{a_p}{b_r}, & \text{dacă } p = r \\ 0, & \text{dacă } p < r \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } p > r, \frac{a_p}{b_r} > 0 \text{ și } p-r \text{ par} \\ -\infty, & \text{dacă } p > r, \frac{a_p}{b_r} > 0 \text{ și } p-r \text{ impar} \\ -\infty, & \text{dacă } p > r, \frac{a_p}{b_r} < 0 \text{ și } p-r \text{ par} \\ \infty, & \text{dacă } p > r, \frac{a_p}{b_r} < 0 \text{ și } p-r \text{ impar} \\ \frac{a_p}{b_r}, & \text{dacă } p = r \\ 0, & \text{dacă } p < r \end{cases} \end{aligned}$$

II Limitele funcțiilor exponențiale și logaritmice la marginile inferioare și superioare ale domeniilor de definiție

1. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$$

2. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 1 \\ \infty, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$$

3. Dacă $a > 1$ și P este o funcție polinomială, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0$ și

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x P(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} a^{-t} P(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(-t)}{a^t} = 0.$$

4. Dacă $a \in (0, 1)$ și P este o funcție polinomială, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x P(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{(1/a)^{xx}} = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{a^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x P(x) = 0.$$

5. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ -\infty, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$$

6. Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ \infty, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$$

7. Dacă $a > 1$ și P este o funcție polinomială, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(x)}{P(x)} = 0$ și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a(x) P(x) = 0.$$

8. Dacă $a \in (0, 1)$ și P este o funcție polinomială, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{P(x) \log_a(x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_{(1/a)}(x)}{P(x)} = 0 \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{P(x)}{\log_a(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_{(1/a)}(x) P(x) = 0.$$

III Limite de funcții trigonometrice

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1$$

IV Numărul lui Euler

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ (numărul lui Euler)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

V Alte limite

$$1. \text{ Dacă } a > 0, \text{ atunci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Exemple 4.2.10 Să se calculeze următoarele limite

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[p]{1+x} - 1}{x}, p \in \mathbb{N}, p \geq 2.$$

R: Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[p]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - 1}{x \left(\sqrt[p]{(1+x)^{p-1}} + \sqrt[p]{(1+x)^{p-2}} + \dots + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[p]{(1+x)^{p-1}} + \sqrt[p]{(1+x)^{p-2}} + \dots + 1 \right)} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{\sin(x)}{x - \sin(x)}}.$$

R: Avem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{\sin(x)}{x - \sin(x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{\sin(x) - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin(x) - x}} \right)^{\frac{\sin(x) - x}{x} \frac{\sin(x)}{x - \sin(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\sin(x)}{x}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

4.3 Spații conexe, compacte și local-compacte

Definiția 4.3.1 Un spațiu topologic X se numește compact dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită (mai precis, oricare ar fi familia $\{G_i\}_i$ de mulțimi deschise cu proprietatea că $\bigcup_i G_i = X$,

există o subfamilie finită $\{G_{i_j}\}_{j \in \{1, 2, \dots, n\}}$ astfel încât $\bigcup_{j=1}^n G_{i_j} = X$).

O submulțime A a unui spațiu topologic X se numește compactă dacă înzestrată cu topologia indusă de X este spațiu compact (sau echivalent, pentru orice familie $\{G_i\}_i$ de submulțimi deschise ale lui X cu proprietatea că $A \subset \bigcup_i G_i$, există o subfamilie finită $\{G_{i_j}\}_{j \in \{1, 2, \dots, n\}}$ astfel încât $A \subset \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$).

O submulțime A a unui spațiu topologic X se numește relativ compactă dacă $\bar{A}$ compactă (închiderea mulțimii A este compactă).

Se poate arăta că

- Într-un spațiu topologic în care fiecărui punct are un sistem fundamental numărabil de vecinătăți este compact dacă și numai dacă din orice șir se poate extrage un subșir convergent.

- Orice submulțime închisă F a unei mulțimi compacte K este compactă. (Într-adevăr, fie $\{G_i\}_i$ o familie de submulțimi deschise cu proprietatea că $F \subset \bigcup_i G_i$ și fie $\mathcal{C}F$ complementara lui F . Atunci $\{G_i\}_i \cup \mathcal{C}F$ este o acoperire deschisă a mulțimii compacte K , și deci admite o subacoperire finită. Eliminând eventual $\mathcal{C}F$ din această subacoperire obținem o subacoperire finită a lui F)
- Orice submulțime compactă K a unui spațiu Hausdorff este închisă. (Într-adevăr, pentru $x \notin K$ și orice $y \in K$ există două mulțimi deschise $U_{x,y}$ și $V_{x,y}$ astfel încât $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$ și $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$. Din acoperirea deschisă $\{V_{x,y}\}_{y \in K}$ a lui K se poate extrage o subacoperire finită $\{V_{x,y_i}\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$. Atunci $x \in \bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i} \subset \mathcal{C}K$ (complementara mulțimii K), și cum $\bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i}$ este deschisă și x oarecare în $\mathcal{C}K$, se obține $\mathcal{C}K$ deschisă, ceea ce este echivalent cu K închisă).
- Orice submulțime a unui spațiu compact Hausdorff este relativ compactă.

Propoziția 4.3.2 (Borel-Lebesgue) *O submulțime a lui $\mathbb{R}$ (cu topologia uzuală) este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită. (Pentru demonstrație se poate consulta de exemplu, [Gh. Sirețchi, Calcul diferențial și integral, Vol. 1 p. 145, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985].)*

Teorema 4.3.3 *Fie X și Y două spații topologice și $f : X \rightarrow Y$ este o funcție continuă. Dacă submulțimea $K \subset X$ este compactă, atunci atunci $f(K)$ este compactă în Y .*

Demonstrație. Fie $\{G_i\}_i$ o familie de submulțimi deschise ale lui Y cu proprietatea că $f(K) \subset \bigcup_i G_i$. Deoarece f este continuă, $f^{-1}(G_i)$ este deschisă în X pentru orice i . În plus, cum pentru orice $x \in K$, există i_x astfel încât $f(x) \in G_{i_x}$ (sau echivalent, $x \in f^{-1}(G_{i_x})$), rezultă că $K \subset \bigcup_i f^{-1}(G_i)$. Așadar $\{f^{-1}(G_i)\}_i$ este o acoperire deschisă a mulțimii compacte K și ca urmare admite o subacoperire finită $\{f^{-1}(G_{i_j})\}_{j \in \{1,2,\dots,n\}}$.

Deoarece $K \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(G_{i_j})$, pentru orice $x \in K$, există $j = j_x \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $x \in f^{-1}(G_{i_j})$ (echivalent, $f(x) \in G_{i_j}$). Deci $f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$ și în consecință, din $\{G_i\}_i$ se poate extrage o subacoperire finită a lui $f(K)$. Ca urmare $f(K)$ este compactă. ■

Teorema 4.3.4 (Weierstrass) *Dacă X este un spațiu compact și $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci f este mărginită și își atinge extremele, adică există $x_{\min}, x_{\max} \in X$ astfel încât*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \text{ pentru orice } x \in X.$$

Demonstrație. Mulțimea $f(X)$ fiind o submulțime compactă a lui $\mathbb{R}$, este închisă și mărginită. Deci f este mărginită. Deoarece $\sup f(X)$ (respectiv $\inf f(X)$) este limita unui șir din $f(X)$, $\sup f(X)$ (respectiv $\inf f(X)$) aparține închiderii lui $f(X)$ ce coincide cu $f(X)$. Ca urmare există $y_{\max} \in f(X)$ (respectiv $y_{\min} \in f(X)$) astfel încât $y_{\max} = \sup f(X)$ (respectiv $y_{\min} = \inf f(X)$). În consecință, există $x_{\max} \in X$ (respectiv $x_{\min} \in X$) astfel încât $f(x_{\max}) = y_{\max} = \sup f(X)$ (respectiv $f(x_{\min}) = y_{\min} = \inf f(X)$). ■

Definiția 4.3.5 *Un spațiu topologic X se numește local compact dacă orice punct al său are o vecinătate compactă.*

Exemplul 4.3.6 $\mathbb{R}$ (cu topologia uzuală) este spațiu local compact Hausdorff.

Definiția 4.3.7 *Un spațiu topologic X se numește conex dacă singurele lui submulțimi în același timp închise și deschise sunt $\emptyset$ și X . O submulțime A a unui spațiu topologic X se numește conexă $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A$ înzestrată cu topologia indusă de X este spațiu topologic conex.*

Teorema 4.3.8 *Singurele submulțimi conexe ale $\mathbb{R}$ înzestrată cu topologia uzuală sunt intervalele. (Pentru demonstrație se poate consulta de exemplu, [Gh. Siretchi, Calcul diferențial și integral, Vol. 1 p. 143, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985].)*

Teorema 4.3.9 *Fie X și Y două spații topologice și $f : X \rightarrow Y$ este o funcție continuă. Dacă submulțimea $A \subset X$ este conexă, atunci atunci $f(A)$ este conexă ca submulțime a lui Y .*

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există două submulțimi B_1 și B_2 ale lui Y în același timp închise și deschise astfel încât $f(A) = (B_1 \cup B_2) \cap f(A)$. Atunci $f^{-1}(B_1)$ și $f^{-1}(B_2)$ sunt submulțimi în același timp închise și deschise ale lui X și în plus, $A = (f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)) \cap A$. Obținem astfel o contradicție cu faptul că A este conexă. Așadar $f(A)$ este conexă. ■

4.4 Spații metrice

Definiția 4.4.1 (Metrică) *Fie X o mulțime. Se numește distanță (sau metrică) pe X o funcție $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:*

1. $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pentru orice $x, y, z \in X$. (inegalitatea triunghiului)

Perechea (X, d) se numește spațiu metric. Pentru orice $a \in X$ și orice $r > 0$ se numește bila (deschisă) din X centrată în a de rază r și se notează cu $B(a, r)$ mulțimea:

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

Familia bilelor din spațiul metric (X, d) este o bază pentru o topologie numită *topologia asociată (canonic) distanței (metricii) d* . O mulțime G este deschisă în această topologie dacă pentru orice $x \in G$ există $r_x > 0$ astfel încât $B(x, r_x) \subset G$. Două distanțe (metrice) se numesc *echivalente* dacă topologiile asociate coincid. Un spațiu topologic se numește *metrizabil* dacă există o distanță (metrică) d pe X cu proprietatea că topologia asociată lui d coincide cu topologia de pe X .

Exemplul 4.4.2 Funcția $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $d(x, y) = |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ este o distanță pe $\mathbb{R}$. Topologia indusă de această metrică coincide cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$.

În orice spațiu metric are sens noțiunea de limită deoarece orice spațiu metric este un spațiu topologic. Astfel dacă (X, d) este un spațiu metric și $(x_n)_n$ un șir din X , atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in X$ (relativ la topologia indusă de metrica d) dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem $d(a, x_n) < \varepsilon$. Ca urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$.

Definiția 4.4.3 (Șir Cauchy) Fie (X, d) un spațiu metric și fie $(x_n)_n$ un șir din X . Șirul $(x_n)_n$ se numește șir Cauchy (sau fundamental) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (sau echivalent, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}$ avem $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$).

Propoziția 4.4.4 Orice șir convergent este șir Cauchy.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un șir convergent din X și fie a limita sa. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Ca urmare pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci $(x_n)_n$ este șir Cauchy. ■

Reciproca nu este adevărată.

Definiția 4.4.5 (Spațiu metric complet) Un spațiu metric (X, d) în care orice șir Cauchy este convergent se numește spațiu metric complet.

Exemplul 4.4.6 $\mathbb{R}$ înzestrat cu distanța $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $d(x, y) = |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, este un spațiu metric complet.

Este ușor de observat că dacă (X, d) este un spațiu metric și $A \subset X$, atunci (A, d_A) este un spațiu metric, unde $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x, y) = d(x, y)$ pentru orice $x, y \in A$. Dacă (X, d) este un spațiu metric complet și $A \subset X$, atunci (A, d_A) este un spațiu metric complet dacă și numai dacă A este o submulțime închisă a lui X .

Propoziția 4.4.7 Fie (X, d_X) și (Y, d_Y) două spații metrice și fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție. Pentru orice $a \in X$ următoarele afirmații sunt echivalente

1. f continuă în a .
2. Dacă $(x_n)_n$ este un șir din X astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.
3. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ cu $d_X(x, a) < \delta_\varepsilon$ rezultă $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Demonstrație. 1. $\Rightarrow$ 2. Este o implicație valabilă în spații topologice în general. Fie V o vecinătate a lui $f(a)$. Deoarece f este continuă în a , există U_V o vecinătate a lui a astfel încât $f(U_V) \subset V$. Faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ implică existența unui număr natural n_V astfel încât $x_n \in U_V$ pentru orice $n \geq n_V$. De aici și din faptul că $f(U_V) \subset V$, rezultă că $f(x_n) \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ și ca urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Presupunem prin absurd că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există $x_\delta > 0$ astfel încât $d_X(x_\delta, a) < \delta$ și $d_Y(f(x_\delta), f(a)) > \varepsilon_0$. Notăm $x_n = x_{\delta_n}$ pentru $\delta_n = \frac{1}{n}$. Atunci $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$. Ca urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și în consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Așadar există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon_0$ pentru orice $n \geq n_0$, ceea ce contrazice $d_Y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $\Rightarrow$ 1. Fie V o vecinătate a punctului $f(a)$. Atunci există $\varepsilon_V > 0$ astfel încât $B(f(a), \varepsilon_V) \subset V$. Pe de altă parte există $\delta_{\varepsilon_V} > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ cu $d_X(x, a) < \delta_{\varepsilon_V}$ rezultă $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon_V$ sau cu alte cuvinte $f(B(a, \delta_{\varepsilon_V})) \subset B(f(a), \varepsilon_V)$. Deoarece $B(a, \delta_{\varepsilon_V})$ este o vecinătate a lui a și $f(B(a, \delta_{\varepsilon_V})) \subset B(f(a), \varepsilon_V) \subset V$, rezultă că f este continuă în a . ■

Definiția 4.4.8 O funcție $f : X \rightarrow Y$ între spațiile metrice (X, d_X) și (Y, d_Y) se numește uniform continuă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ cu proprietatea că $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$, să avem $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Evident, orice funcție uniform continuă este continuă.

Propoziția 4.4.9 Dacă X este spațiu metric compact, atunci orice funcție continuă $f : X \rightarrow Y$ este uniform continuă.

4.5 Spații normate și spații Hilbert

Definiția 4.5.1 Fie V un spațiu vectorial peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). O normă pe V este o funcție $p : V \rightarrow [0, \infty)$ care satisface următoarele condiții:

1. $p(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pentru orice $x, y \in V$.
3. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ pentru orice $\lambda \in K$ și orice $x \in V$.

Perechea (V, p) se numește spațiu normat (real dacă $K = \mathbb{R}$, respectiv complex dacă $K = \mathbb{C}$).

Exemple 4.5.2 1. Considerăm $V = \mathbb{R}$ ca spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Atunci $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $p(x) = |x|$ este o normă $\mathbb{R}$.

2. Considerăm $V = \mathbb{C}$ ca spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$. Atunci $p : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$, $p(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$) este o normă $\mathbb{C}$.

În cele ce urmează vom nota $p(x) = \|x\|$ pentru orice $x \in V$ și vom spune că V este un spațiu normat în loc de $(V, \|\cdot\|)$, atunci când norma $\|\cdot\|$ se subînțelege. Pe orice spațiu normat se poate defini o metrică (distanță) canonică d prin $d(x, y) = \|x - y\|$ pentru orice $x, y \in V$. Prin urmare oricărui spațiu normat V se pot asocia în mod canonic o structură metrică și o structură topologică (asociată distanței $d(x, y) = \|x - y\|$). Pentru orice $x_0 \in V$ și orice $r > 0$ vom nota cu $B(x_0, r)$ bila din V centrată în x_0 de rază r :

$$B(x_0, r) = \{x \in V : \|x - x_0\| < r\}.$$

Pentru orice spațiu normat V (înzestrat cu structura metrică și structura topologică asociate în mod canonic) sunt adevărate următoarele afirmații:

• Șirul $(x_n)_n$ din V converge la $x \in V$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

- Şirul $(x_n)_n$ din V este şir Cauchy (fundamental) dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$.
- $\|\Delta\| : V \rightarrow [0, \infty)$ este o aplicaţie continuă.
- Funcţiile $(x, y) \rightarrow x + y [: V \times V \rightarrow V]$ şi $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x [: K \times V \rightarrow V]$ sunt continue ($V \times V$ şi $K \times V$ sunt înzestrate cu topologia produs).
- Dacă W este un alt spaţiu normat, $A \subset V$, $a \in A'$, atunci o funcţie $f : A \rightarrow W$ are limita $b \in W$ în punctul $a \Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$, avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Definiţia 4.5.3 *O normă pe un spaţiu vectorial V peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$) se numeşte completă dacă metrica asociată ei este completă (i.e. dacă orice şir Cauchy este convergent). Un spaţiu normat se numeşte spaţiu Banach dacă norma cu care este înzestrat este completă.*

Definiţia 4.5.4 *Două norme p_1 şi p_2 pe spaţiul vectorial V se numesc echivalente dacă topologiile asociate lor (în mod canonic) coincid. Pentru a desemna faptul că p_1 şi p_2 sunt echivalente vom folosi notaţia $p_1 \sim p_2$.*

Se poate arăta că normele p_1 şi p_2 sunt echivalente dacă şi numai dacă există $M, m > 0$ astfel încât

$$mp_1(x) \leq p_2(x) \leq Mp_1(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

Exemple 4.5.5 *Fie $(V_1, p_1), (V_2, p_2), \dots, (V_n, p_n)$ n spaţii normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Dacă pe*

$$V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in V_i, \text{ oricare ar fi } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

definim adunarea şi înmulţirea cu scalari din K în maniera de mai jos

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \end{aligned}$$

atunci este ușor de observat că sunt îndeplinite condițiile cerute de definiția spațiului vectorial și deci $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ este spațiu vectorial peste K . Vom nota cu $p_\infty, p_1, p_2 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow [0, \infty)$ aplicațiile definite prin:

$$\begin{aligned} p_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \max_{1 \leq j \leq n} p_j(x_j) \\ p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n p_j(x_j) \\ p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left(\sum_{j=1}^n p_j(x_j)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$. Atunci p_∞, p_1, p_2 sunt norme echivalente pe $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$. Într-adevăr, avem

$$\frac{1}{n} p_1(x) \leq p_\infty(x) \leq p_1(x) \quad \text{și} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} p_2(x) \leq p_\infty(x) \leq p_2(x)$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$. Topologia asociată oricăreia dintre aceste norme coincide cu topologia produs pe $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$.

Definiția 4.5.6 Fie H un spațiu vectorial peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Se numește produs scalar pe H o aplicație $\varphi : H \times H \rightarrow K$ care are următoarele proprietăți:

1. $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in H$.
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$ pentru orice $\lambda \in K$ și $x \in H$.
3. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (deci $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pentru $K = \mathbb{R}$) pentru orice $x, y \in H$.
4. $\varphi(x, x) > 0$ pentru orice $x \neq 0$.

Vom nota $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ pentru orice $x, y \in H$. Se spune că norma spațiului normat $(H, \|\cdot\|)$ provine dintr-un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dacă

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

pentru orice $x \in H$. Un spațiu pre-Hilbert este un spațiu normat în care norma provine dintr-un produs scalar, iar un spațiu Hilbert este un spațiu pre-Hilbert complet (cu normă completă).

Index

- bază a unei topologii, 7
- bila (deschisă), 18
- continuitate, 10
- derivata unei mulțimi, 6
- distanță, 18
 - asociată unei norme, 21
- distanțe echivalente, 18
- exteriorul unei mulțimii, 6
- frontiera unei mulțimii, 6
- funcție
 - funcție continuă, 10
 - limita într-un punct, 9
 - uniform continuă, 20
- homeomorfism, 11
- închiderea unei mulțimii, 5
- inegalitatea triunghiului, 18
- interiorul unei mulțimii, 5
- limita la dreapta, 10
- limita la stânga, 10
- limita unei funcții, 9
- limita unui șir, 8
- limite laterale, 10
- metrică, 18
 - asociată unei norme, 21
- metrice echivalente, 18
- mulțime
 - închiderea unei mulțimii, 5
 - compactă, 15
 - derivata unei mulțimii, 6
 - exteriorul unei mulțimii, 6
 - frontiera unei mulțimii, 6
 - interiorul unei mulțimii, 5
 - mulțime închisă, 4
 - F_σ , 7
 - G_δ , 7
 - mulțime densă, 6
 - mulțime deschisă, 4
 - mulțime discretă, 6
 - punct aderent al mulțimii, 5
 - punct de acumulare, 6
 - punct interior al mulțimii, 5
 - punct izolat al unei mulțimii, 6
 - relativ compactă, 15
- normă, 21
 - completă, 22
 - indusă de un produs scalar, 23
- norme echivalente, 22
- produs scalar, 23
- punct aderent, 5
- punct de acumulare, 6

- la dreapta, 10
- la stânga, 10
- punct exterior, 6
- punct frontieră, 6
- punct interior, 5
- punct izolat, 6
- punct limită, 6, 8
- sir
 - punct limita, 8
 - sir convergent, 8
 - sir divergent, 8
- sir Cauchy, 19
- sir fundamental, 19
- sistem fundamental de vecinatati, 4
- spațiu Banach, 22
- spațiu compact, 15
- spațiu conex, 17
- spațiu Hilbert, 23
- spațiu local compact, 17
- spațiu metric, 18
 - complet, 19
 - sir Cauchy, 19
- spațiu normat, 21
 - complex, 21
 - real, 21
- spațiu pre-Hilbert, 23
- spațiu separat (Hausdorff), 8
- spațiu topologic, 3
 - metrizabil, 18
 - mulțime densă, 6
 - punct, 3
 - spațiu compact, 15
 - spațiu conex, 17
 - spațiu Hausdorff, 8
 - spațiu local compact, 17
 - subspațiu topologic, 7
- teorema Borel-Lebesgue, 16
- teorema Weierstrass, 17
- topologie, 3
 - asociată unei distanțe, 18
 - asociată unei norme, 21
 - mulțime închisă, 4
 - mulțime deschisă, 4
 - topologia discretă, 4
 - topologia indiscretă, 4
 - topologia produs, 4
 - topologia uzuală pe $\mathbb{R}$, 4
 - topologie indusă, 7
 - topologie mai slabă ..., 7
 - topologie mai tare ..., 7
 - vecinătate, 4
- topologie indusă, 7
- urma unei topologii, 7
- vecinătate, 4