

Analiză Matematică - Curs 6

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

4	Spații topologice (continuare din cursul 5)	3
4.6	Spațiul $\mathbb{R}^n$	3
5	Calcul diferențial	7
5.1	Derivatele funcțiilor de o variabilă reală cu valori vectoriale .	7
5.2	Teoremele Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy și aplicații . . .	16
	Index	24

Capitolul 4

Spații topologice (continuare din cursul 5)

4.6 Spațiul $\mathbb{R}^n$

Dacă pe

$$\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{R}, \text{ oricare ar fi } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

definim adunarea și înmulțirea cu scalari din $\mathbb{R}$ în maniera de mai jos

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) \\ \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_n),\end{aligned}$$

atunci este ușor de observat că sunt îndeplinite condițiile cerute de definiția spațiului vectorial și deci $\mathbb{R}^n$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

Pe acest spațiu orice două norme sunt echivalente. Vom nota cu $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ următoarele norme uzuale pe $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Norma $\|\cdot\|_2$ se numește *normă euclidiană* și provine din produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Acest produs scalar este numit *produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$* . Distanța asociată acestei norme este

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ și este numită *distanța euclidiană pe $\mathbb{R}^n$* . Pentru $n = 2$ (respectiv, $n = 3$) distanța euclidiană dintre (a_1, a_2) și (b_1, b_2) (respectiv, (a_1, a_2, a_3) și (b_1, b_2, b_3)) coincide cu lungimea segmentului de capete $A(a_1, a_2)$ și $B(b_1, b_2)$ (respectiv, de capete $A(a_1, a_2, a_3)$ și $B(b_1, b_2, b_3)$).

- $\mathbb{R}^n$ este spațiu Hilbert (în raport cu produsul scalar canonic) și deci $\mathbb{R}^n$ este spațiu Banach (în raport cu norma $\|\cdot\|_2$ indusă de produsul scalar). În particular, $\mathbb{R}^n$ este spațiu metric complet (în raport cu distanța euclidiană, adică indusă de norma $\|\cdot\|_2$) și deci $\mathbb{R}^n$ este spațiu topologic (în raport cu topologia indusă de distanța euclidiană).
- Normele $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$ sunt norme echivalente pe $\mathbb{R}^n$. Ca urmare induc aceeași topologie pe $\mathbb{R}^n$. Mai mult, se poate arăta că orice normă pe $\mathbb{R}^n$ este echivalentă cu $\|\cdot\|_2$. Topologia indusă de $\|\cdot\|_2$ se numește *topologia uzuală pe $\mathbb{R}^n$* .
- În raport cu topologia uzuală, $\mathbb{R}^n$ este spațiu local compact.
- În raport cu topologia uzuală, o submulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ este compactă dacă și numai dacă este închisă (echivalent, conține limita fiecărui șir convergent cu termeni din A) și mărginită (echivalent, există $M > 0$ astfel încât $\|x\|_2 \leq M$ pentru orice $x \in A$).
- Șirul $(a_p)_p$ din $\mathbb{R}^n$, unde $a_p = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$ pentru orice p , este convergent dacă și numai dacă pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ șirul $(x_{pk})_p$ este convergent. În această situație avem

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_p = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} x_{1p}, \lim_{p \rightarrow \infty} x_{2p}, \dots, \lim_{p \rightarrow \infty} x_{np} \right).$$

În cazul $n = 2$ vom scrie (x, y) în loc de (x_1, x_2) , iar în cazul $n = 3$ vom scrie (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3) .

Exemplul 4.6.1 În $\mathbb{R}^4$ avem

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p}, \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p, \left(-\frac{1}{2}\right)^p, \sqrt[p]{p} \right) = \\ & = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p}, \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p, \lim_{p \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^p, \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p} \right) = (0, e, 0, 1). \end{aligned}$$

Exemple 4.6.2 Să se studieze continuitatea în punctul $(0, 0)$ a următoarelor funcții:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Arătăm că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ și ca urmare f este continuă în $(0, 0)$. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ avem

$$0 \leq \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} - \frac{2|x||y|}{|x| + |y|} \leq |x| + |y|.$$

Ca urmare dacă luăm $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, avem $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ cu $\|(x, y) - (0, 0)\|_\infty < \delta_\varepsilon$ (sau echivalent $|x| < \delta_\varepsilon$, $|y| < \delta_\varepsilon$).

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R: Arătăm că f nu are limită în $(0, 0)$ ca urmare nu este continuă în $(0, 0)$. Fie șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ definite prin $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ și

$b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $a_n \neq (0, 0)$, $b_n \neq (0, 0)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = (0, 0)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1$, iar

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{4}{5}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$, rezultă că f nu are limită în $(0, 0)$.

Capitolul 5

Calcul diferențial

5.1 Derivatele funcțiilor de o variabilă reală cu valori vectoriale

Definiția 5.1.1 (Derivata) Fie $A \subset \mathbb{R}$, E un spațiu normat real, $B \subset E$, $f : A \rightarrow B$ o funcție și $a \in A \cap A'$ (un punct din A care este și punct de acumulare). Funcția f se numește derivabilă în $a \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există în E limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} (f(x) - f(a)).$$

Dacă există limita precedentă se notează cu $f'(a)$ sau $\frac{df}{dx}(a)$ și se numește derivata lui f în a .

Dacă $A_1 \subset A \cap A'$, funcția $f : A \rightarrow E$ se numește derivabilă pe A_1 dacă este derivabilă în orice punct $a \in A_1$. Dacă

$$A_f = \{a \in A \cap A' : f : A \rightarrow E \text{ este derivabilă în } a\},$$

se notează cu f' funcția $f' : A_f \rightarrow E$ care asociază fiecărui element $a \in A_f$ derivata funcției f în a , adică funcția $a \mapsto f'(a) [: A_f \rightarrow E]$. Funcția f' este numită *derivata* (de ordinul I) funcției f .

Funcția $f : A \rightarrow E$ se numește *derivabilă la stânga* (respectiv, *la dreapta*) în $a \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există în E limita

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{1}{x - a} (f(x) - f(a)) \quad (\text{respectiv, } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{x - a} (f(x) - f(a))).$$

Dacă există limita precedentă se notează cu $f'_s(a)$ (respectiv, $f'_d(a)$) și se numește *derivata la stânga* (respectiv, *la dreapta*) lui f în a . Este ușor de observat că f este derivabilă în a dacă și numai dacă f este derivabilă la stânga și la dreapta în a și $f'_s(a) = f'_d(a)$. În plus, în acest caz

$$f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a).$$

Propoziția 5.1.2 (Derivabilitatea $\Rightarrow$ continuitatea) Fie $A \subset \mathbb{R}$, E un spațiu normat real, $f : A \rightarrow E$ o funcție și $a \in A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în a , atunci f este continuă în a .

Demonstrație. Pentru orice $t \in A$, $t \neq a$, avem

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &= \left\| (x-a) \left(\frac{1}{x-a} (f(x) - f(a)) - f'(a) + f'(a) \right) \right\| \\ &\leq |x-a| \left\| \frac{1}{x-a} (f(x) - f(a)) - f'(a) \right\| + |x-a| \|f'(a)\|. \end{aligned}$$

Ca urmare $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, de unde rezultă că f este continuă în a . ■

Propoziția 5.1.3 (Operații cu funcții derivabile) Fie E un spațiu normat real.

1. Dacă $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $f, g : A \rightarrow E$ sunt două funcții derivabile în a și dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este derivabilă în a și

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

2. Dacă $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ iar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : A \rightarrow E$ sunt două funcții derivabile în a , atunci fg este derivabilă în a și

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. Dacă $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ iar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă în a cu proprietatea că $f(t) \neq 0$ pentru orice $t \in A$, atunci funcția $\frac{1}{f}$ este derivabilă în a și

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

4. Dacă $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ iar $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow E$ sunt două funcții derivabile în a și $g'(a) \neq 0$ pentru orice $a \in A$, atunci $\frac{1}{g}f$ este derivabilă în a și

$$\left(\frac{1}{g}f\right)'(a) = \frac{1}{g^2(a)}(g(a)f'(a) - g'(a)f(a)).$$

5. Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow B$ este o funcție derivabilă în $a \in A \cap A'$ și $f : B \rightarrow E$ o funcție derivabilă în $g(a) \in B \cap B'$, atunci funcția $f \circ g$ este derivabilă în a și

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a)).$$

Demonstrație. Se utilizează definiția derivatei și inegalități de tipul

$$\|\alpha x \pm \beta y\| \leq |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\| \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } x, y \in E.$$

■

Propoziția 5.1.4 (Formule de derivare) Fie $A \subset \mathbb{R}$ o reuniune de intervale deschise, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe A și $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivata lui f . În cele ce urmează scriem $(f(x))'$ în loc de $f'(x)$ ($x \in A$). Avem

1. $(c)' = 0$, c constantă
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n fixat)
4. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$ ($n \in \mathbb{Z}$, n fixat)
5. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, α fixat). În particular, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$,
 $x \in \mathbb{R}^*$ iar $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ sau mai general, $(\sqrt[p]{x})' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}\right)' =$

$$\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}.$$

6. $(a^x)' = a^x \ln(a)$, $x \in \mathbb{R}$ ($a > 0$, a fixat). În particular, $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
7. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$, $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$, a fixat). În particular,
 $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.
8. $(\sin(x))' = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$
9. $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$
10. $(tg(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
11. $(ctg(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - ctg^2(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
12. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
13. $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
14. $(arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Exemple 5.1.5 Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^2 arctg(x))$.

R: Deoarece $f(x) = g(u(x))$ unde $g(u) = \cos(u)$ iar $u(x) = x^2 arctg(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= g'(u(x)) u'(x) \\
 &= -\sin(x^2 arctg(x)) (x^2 arctg(x))' \\
 &= -\sin(x^2 arctg(x)) \left((x^2)' arctg(x) - x^2 (arctg(x))' \right) \\
 &= -\sin(x^2 arctg(x)) \left(2x arctg(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right).
 \end{aligned}$$

2. Fie $I \subset \mathbb{R}$ o reuniune de intervale deschise și fie $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$, două funcții derivabile pe I astfel încât $a(x) > 0$ pentru orice $x \in I$. Atunci pentru orice $x \in I$ avem

$$\left(a(x)^{b(x)}\right)' = a(x)^{b(x)} \ln(a(x)) b'(x) + b(x) a(x)^{b(x)-1} a'(x).$$

R: Într-adevăr, pentru orice $x \in I$ avem:

$$\begin{aligned} \left(a(x)^{b(x)}\right)' &= \left(e^{\ln(a(x)^{b(x)})}\right)' = \left(e^{b(x) \ln(a(x))}\right)' \\ &= e^{b(x) \ln(a(x))} (b(x) \ln(a(x)))' \\ &= e^{b(x) \ln(a(x))} (b'(x) \ln(a(x)) + b(x) (\ln(a(x)))') \\ &= e^{b(x) \ln(a(x))} \left(b'(x) \ln(a(x)) + b(x) \frac{a'(x)}{a(x)}\right) \\ &= e^{\ln(a(x)^{b(x)})} \left(b'(x) \ln(a(x)) + \frac{b(x) a'(x)}{a(x)}\right) \\ &= a(x)^{b(x)} \left(b'(x) \ln(a(x)) + \frac{b(x) a'(x)}{a(x)}\right) \\ &= a(x)^{b(x)} \ln(a(x)) b'(x) + b(x) a(x)^{b(x)-1} a'(x). \end{aligned}$$

Propoziția 5.1.6 Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție și $a \in A \cap A'$. Funcția f este derivabilă în a dacă și numai dacă toate componentele ei scalare $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt derivabile în a . În plus,

$$f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_n(a)).$$

Demonstrație. Deoarece pentru orice $t \in A$, $t \neq a$, avem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t-a} (f(t) - f(a)) = \\ &= \left(\frac{1}{t-a} (f_1(t) - f_1(a)), \frac{1}{t-a} (f_2(t) - f_2(a)), \dots, \frac{1}{t-a} (f_n(t) - f_n(a)) \right), \end{aligned}$$

rezultă că

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t-a} (f(t) - f(a)) = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t-a} (f_1(t) - f_1(a)), \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t-a} (f_2(t) - f_2(a)), \dots, \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t-a} (f_n(t) - f_n(a)) \right). \end{aligned}$$

■

Exemplul 5.1.7 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ funcția definită prin

$$f(t) = (\sin(t), t^3 + 1, \arctg(t)) \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$f'(t) = \left(\cos(t), 3t^2, \frac{1}{1+t^2} \right) \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 5.1.8 (J. Dieudonné) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$, E un spațiu normat real, $f : [a, b] \rightarrow E$ și $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue pe $[a, b]$ și derivabile la dreapta în orice punct $x \in (a, b)$. Dacă $\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x)$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$. ([P. Flondor și O. Stănășilă, *Lecții de analiză matematică/p. 98, Ediția a II-a, Editura ALL, București, 1996*])

Teorema 5.1.9 (Teorema creșterilor finite) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$, E un spațiu normat real și $f : [a, b] \rightarrow E$ o funcție continuă pe $[a, b]$ derivabilă pe (a, b) . Atunci

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in (a, b)} \|f'(x)\| (b - a).$$

Demonstrație. Dacă $\sup_{x \in (a, b)} \|f'(x)\| = \infty$, atunci rezultatul este evident. Dacă $M = \sup_{x \in (a, b)} \|f'(x)\| < \infty$, atunci luăm $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = Mx$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pentru orice $x \in (a, b)$, conform teoremei anterioare, avem

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) = \sup_{x \in (a, b)} \|f'(x)\| (b - a).$$

■

Definiția 5.1.10 (Derivate de ordin superior) Fie $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, V o vecinătate a lui a , E un spațiu normat real și $f : A \rightarrow E$ o funcție derivabilă pe $V \cap A$. Se spune că f este de două ori derivabilă în a dacă $(f|_{V \cap A})'$ este derivabilă în a . În acest caz se notează $((f|_{V \cap A})')'(a) = f''(a)$ și se numește derivata de ordinul 2 a lui f în a . Dacă

$$A_{2,f} = \{a \in A \cap A' : f : A \rightarrow E \text{ este de două ori derivabilă în } a\},$$

se notează cu f'' sau $f^{(2)}$ funcția $f'' : A_{2,f} \rightarrow E$ care asociază fiecărui element $a \in A_{2,f}$ derivata de ordinul 2 a funcției f în a , adică funcția $a \mapsto f''(a) : A_{2,f} \rightarrow E$. Funcția f'' este numită derivata de ordinul 2 a funcției f . Mai general, prin recursivitate se definește derivata de ordinul n a funcției f , notată $f^{(n)}$, ca fiind derivata derivatei de ordinul $n - 1$ a lui f :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n \geq 2.$$

Se notează $f^{(0)} = f$.

Exemple 5.1.11 Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă pe D_f .

1. Dacă $a \in (0, \infty) \setminus \{a\}$ și $f(x) = a^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f^{(n)}(x) = \ln^n(a) a^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În particular, dacă $f(x) = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f^{(n)}(x) = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Dacă $f(x) = \sin(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
3. Dacă $f(x) = \cos(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
4. Dacă $f(x) = (ax + b)^k$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (unde $k \in \mathbb{N}$), atunci
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-n+1)a^n(ax+b)^{k-n}, & \text{dacă } n \leq k \\ 0, & \text{dacă } n > k. \end{cases}$$
 pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
5. Dacă $f(x) = (ax + b)^k$ pentru orice $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ (unde $a \neq 0$ și $k \notin \mathbb{N}$), atunci $f^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)a^n(ax+b)^{k-n}$ pentru orice $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$.
6. Dacă $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^k}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ (unde $k \in \mathbb{N}^*$), atunci $f^{(n)}(x) = (-a)^n \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{(ax+b)^{k+n}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$. În particular, dacă $f(x) = \frac{1}{x-a}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, atunci $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

7. Dacă $f(x) = \ln(ax + b)$ pentru orice $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ (unde $a \neq 0$), atunci $f^{(n)}(x) = (-a)^{n-1} a \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$ pentru orice $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ și $n \geq 1$.

Pentru verificarea afirmațiilor de mai sus se raționează prin inducție după n .

Definiția 5.1.12 Fie $A \subset \mathbb{R}$, E un spațiu normat real și $f : A \rightarrow E$ o funcție. Presupunem că f este de n -ori derivabilă în $a \in A$. Se numește polinomul Taylor de ordinul n asociat funcției f în a polinomul notat $T_n(f, a)$ și definit prin

$$T_n(f, a)(X) = f(a) + \frac{(X-a)}{1!} f'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(X-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Teorema 5.1.13 (Formula Taylor) Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, E un spațiu normat real și $f : A \rightarrow E$ o funcție. Presupunem că f este de n -ori derivabilă în $a \in A$. Atunci există o funcție $R_n(f, a) : A \rightarrow E$, numită restul de ordinul n , astfel încât pentru orice $x \in A$

$$f(x) = T_n(f, a)(x) + R_n(f, a)(x),$$

și

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} R_n(f, a)(x) = 0.$$

Demonstrație. Pentru orice $x \in A$, definim

$$R_n(f, a)(x) = f(x) - T_n(f, a)(x).$$

Demonstrăm prin inducție după n că

$$P(n) : \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} (f(x) - T_n(f, a)(x)) = 0$$

pentru orice funcție f de n ori derivabilă în a .

este adevărată pentru orice $n \geq 1$. Pasul de verificare:

$$P(1) : \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} (f(x) - T_1(f, a)(x)) = 0$$

pentru orice funcție f derivabilă în a .

Deoarece pentru orice funcție f derivabilă în a , avem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} (f(x) - f(a)) = f'(a),$$

rezultă că

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} (f(x) - T_1(f, a)(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} \left(f(x) - \left(f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)} (f(x) - f(a)) - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Demonstrăm $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Fie $\varepsilon > 0$ și f o funcție de $n+1$ ori derivabilă în a . Atunci f' este de n -ori derivabilă în a și ca urmare din ipoteza de inducție $P(n)$ rezultă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} (f'(x) - T_n(f', a)(x)) = 0.$$

Ca urmare există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) \subset A$ avem

$$\|f'(x) - T_n(f', a)(x)\| < \varepsilon |x-a|^n. \quad (5.1)$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon)$, conform teoremei creșterilor finite, avem

$$\|f(x) - T_{n+1}(f, a)(x) - (f(a) - T_{n+1}(f, a)(a))\| \leq M |x-a|,$$

unde $M = \sup_{z \in I_x} \|f'(z) - T'_{n+1}(f, a)(z)\|$, iar $I_x = [a, x]$ dacă $a \leq x$ sau $I_x = [x, a]$ dacă $x < a$.

Cum $T_n(f, a)(a) = a$

$$\|f(x) - T_{n+1}(f, a)(x)\| \leq \sup_{z \in I_y} \|f'(z) - T'_{n+1}(f, a)(z)\| |x-a|$$

și deoarece $T'_{n+1}(f, a)(z) = T_n(f', a)(z)$ avem

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - T_{n+1}(f, a)(y)\|}{|x - a|^{n+1}} &\leq \frac{1}{|x - a|^n} \sup_{z \in I_y} \|f'(z) - T_n(f', a)(z)\| \\ &\stackrel{(5.1)}{<} \frac{1}{|x - a|^n} \varepsilon |x - a|^n \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ca urmare

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^{n+1}} (f(x) - T_{n+1}(f, a)(x)) = 0$$

și deci $P(n + 1)$ este adevărată. ■

5.2 Teoremele Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy și aplicații

Definiția 5.2.1 Fie $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ o funcție și $a \in A$. Punctul a se numește

- punct de minim (global) pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in A$;
- punct de maxim (global) pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in A$;
- punct de extrem (global) pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a$ este punct de minim (global) sau de maxim (global).

Dacă în plus, A este o submulțime a unui spațiu topologic, punctul a se numește

- punct de minim local pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in A \cap V$;
- punct de maxim local pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in A \cap V$;

· punct de extrem local pentru $f \stackrel{def}{\Leftrightarrow} a$ este punct de minim local sau de maxim local.

Teorema 5.2.2 (Teorema lui Fermat) Fie I un interval deschis de numere reale, $a \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în a . Dacă a este punct de extrem local pentru f , atunci $f'(a) = 0$.

Demonstrație. Ținând cont că a este punct de maxim local pentru f dacă și numai dacă a este punct de minim local pentru $-f$, fără a reduce generalitatea, putem presupune că a este punct de minim pentru f . Ca urmare există o vecinătate V a lui a pe care o putem presupune inclusă în I astfel încât $f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V$. De aici rezultă că

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \text{ pentru orice } x \leq a$$

și

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \text{ pentru orice } x \geq a.$$

Așadar

$$f'(a) = f'_s(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

și

$$f'(a) = f'_d(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

În consecință, $f'(a) = 0$. ■

Definiția 5.2.3 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție Rolle $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$

1. f este continuă pe $[a, b]$
2. f este derivabilă pe (a, b) .

Teorema 5.2.4 (Teorema lui Rolle) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Rolle cu proprietatea că $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație. Dacă f este o funcție constantă, atunci concluzia este evidentă. Presupunem în continuare că f nu este constantă. Deoarece f este o funcție continuă pe intervalul compact $[a, b]$, f își atinge extremele (conform teoremei Teorema 4.3.4 (Weierstrass)), adică există $x_{\min}, x_{\max} \in X$ astfel încât

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Cum $f(a) = f(b)$ și f nu este constantă, cel puțin unul dintre punctele $x_{\min}$ sau $x_{\max}$ este în interiorul intervalului $[a, b]$. Dacă notăm cu c acest punct, atunci conform teoremei lui Fermat 5.2.2 $f'(c) = 0$. ■

Teorema 5.2.5 (Teorema lui Lagrange) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Rolle. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Demonstrație. Fie funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x)$$

pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci φ este o funcție Rolle și $\varphi(a) = \varphi(b)$. Conform teoremei lui Rolle 5.2.4 există $c \in (a, b)$ astfel încât $\varphi'(c) = 0$ sau echivalent

$$f(b) - f(a) - (b - a)f'(c) = 0.$$

■

Teorema 5.2.6 (Teorema lui Cauchy) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții Rolle. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a)g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Demonstrație. Fie funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci φ este o funcție Rolle și $\varphi(a) = \varphi(b)$. Conform teoremei lui Rolle 5.2.4 există $c \in (a, b)$ astfel încât $\varphi'(c) = 0$ sau echivalent

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0.$$

■

Dacă în plus, $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, rezultatul din teorema precedentă poate fi reformulat în felul următor: există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema 5.2.7 (Formula lui Taylor cu restul Lagrange) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de $n + 1$ -ori derivabilă pe A . Atunci pentru orice $x \in I$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât*

$$f(x) = T_n(f, a)(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + t_x(x-a)),$$

unde $T_n(f, a)$ este polinomul Taylor de ordinul n asociat funcției f în a :

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Demonstrație. Dacă $x = a$ rezultatul este evident. Presupunem $x \neq a$, notăm $I_x = \begin{cases} [a, x] & \text{dacă } a < x \\ [x, a] & \text{dacă } x < a \end{cases}$ și considerăm funcția $\varphi : I_x \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= f(x) - T_n(f, y)(x) \\ &= f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y), \quad y \in I_x \end{aligned}$$

Pentru orice $y \in I_x$ avem

$$\begin{aligned}
 \varphi'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{-k(x-y)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k+1)}(y) \right) \quad (5.2) \\
 &= -f'(y) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(y) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k+1)}(y) \\
 &= -f'(y) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j+1)}(y) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k+1)}(y) \\
 &= -f'(y) + f'(y) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j+1)}(y) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k+1)}(y) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j+1)}(y) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k+1)}(y) - \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y) \\
 &= -\frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y).
 \end{aligned}$$

Definim funcția $\psi : I_x \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\psi(y) = \varphi(y) - \lambda \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pentru orice } y \in I_x,$$

unde λ este o constantă reală pe care o determinăm punând condiția $\psi(a) = \psi(x)$, care conduce la

$$\varphi(a) - \lambda \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

sau echivalent $\lambda = \frac{(n+1)! \varphi(a)}{(x-a)^{n+1}}$. Funcția ψ este o funcție Rolle și $\psi(a) = \psi(b)$.

Conform teoremei lui Rolle 5.2.4 există $c \in \overset{\circ}{I}_x$ astfel încât $\psi'(c) = 0$ sau echivalent

$$\varphi'(c) + \lambda \frac{(n+1)(x-c)^n}{(n+1)!} = 0.$$

Ținând cont de (5.2) obținem

$$-\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + \lambda \frac{(x-c)^n}{n!} = 0$$

de unde deducem $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ și cum $\lambda = \frac{(n+1)!\varphi(a)}{(x-a)^{n+1}}$ rezultă

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!\varphi(a)}{(x-a)^{n+1}} &= f^{(n+1)}(c) \\ \varphi(a) &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).\end{aligned}$$

sau echivalent

$$f(x) - T_n(f, a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Faptul că c este în interiorul intervalului I_x este echivalent cu existența unui $t_x \in (0, 1)$ astfel încât $c = a + t_x(x-a)$ (luăm $t_x = \frac{c-a}{x-a}$). ■

Observația 5.2.8 Dacă P_m este un polinom de grad m și $T_n(P_m, a)$ este polinomul Taylor de ordinul n asociat funcției polinomiale $x \mapsto P_m(x)$ în a , atunci $T_n(P_m, a)(x) = P_m(x)$ pentru orice $n \geq m$. Într-adevăr, conform formulei Taylor cu restul lui Lagrange avem:

$$P_m(x) = T_n(P_m, a)(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} P_m^{(n+1)}(a + t_x(x-a)),$$

și ținând cont că $P_m^k(y) = 0$ pentru orice $k > m$ și orice $y \in \mathbb{R}$, obținem

$$P_m(x) = T_n(P_m, a)(x) \text{ pentru orice } n \geq m.$$

Exemplul 5.2.9 Calculăm $\sin(62^\circ)$ cu patru cifre zecimale exacte. Aplicăm formula Taylor cu restul lui Lagrange:

$$f(x) = T_n(f, a)(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + t_x(x-a))$$

în punctul $a = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, pentru $x = 62^\circ = \frac{31\pi}{90}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sin(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f^{(n+1)}(y) = \sin(y + n\frac{\pi}{2})$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, avem

$$\left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + t_x(x-a)) \right| \leq \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Notăm $h = x - a$ și punem condiția

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10^4}.$$

Pentru $n = 0$ se obține $h = \frac{\pi}{90} = 0.0349\dots$, $n = 1$ se obține $\frac{h^2}{2} = \frac{\pi^2}{16200} = 0.0006\dots$, iar pentru $n = 2$, $\frac{h^3}{3!} = \frac{\pi^3}{4374000} = 10^{-5} \times 0.7\dots$. Deci pentru $n = 2$ restul din formula Taylor este în modul mai mic decât 10^{-4} . Ca urmare polinomul Taylor $T_2\left(f, \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{31\pi}{90}\right)$ aproximează $\sin\left(\frac{31\pi}{90}\right)$ cu patru cifre zecimale exacte. Avem

$$\begin{aligned} T_2\left(f, \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{31\pi}{90}\right) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{h}{1!}f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + h \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{h^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{90} \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16200} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{32400}. \end{aligned}$$

Aproximând $\sqrt{3} = 1.732\dots$ și $\pi = 3.141$, se obține $T_2\left(f, \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{31\pi}{90}\right) = 0.8829\dots$, și deci 0.8829 este o aproximație a lui $\sin(62^\circ)$ cu patru cifre zecimale exacte.

Teorema 5.2.10 (Formula lui Mac Laurin) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis cu proprietatea că $0 \in I$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de $n+1$ -ori derivabilă pe I . Atunci pentru orice $x \in I$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t_x x).$$

Demonstrație. Se aplică formula Taylor cu restul Lagrange în punctul $a = 0$ (teorema 5.2.7). ■

Exemple 5.2.11 Aplicând formula Mac Laurin funcțiilor f (cu $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \ln(1+x)$, respectiv, $f(x) = (1+x)^\alpha$) se obțin formulele:

1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{t_x x}.$$

2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left(t_x x + (2n+2) \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(t_x x + (2n+1) \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Pentru orice $x \in (-1, \infty)$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât

$$\ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(t_x x + 1)^{n+1}}.$$

5. Pentru orice $x \in (-1, \infty)$ există $t_x \in (0, 1)$ astfel încât

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1} (1+t_x x)^{\alpha-n-1}.$$

Teorema 5.2.12 (Teorema lui L'Hospital) Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, I un interval astfel încât $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ și $f, g : I \setminus \{x_0\}$ două funcții cu proprietățile

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (respectiv, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$)
2. f și g sunt derivabile și $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ există (în $\overline{\mathbb{R}}$).

Atunci $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$ (respectiv, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$) și limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ există și este egală cu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ([Gh. Siretchi, Calcul diferențial și integral, Vol. 1/p. 217, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985])

Exemplul 5.2.13 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x^2 + 1}{\sin(\pi(x-1))} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

R: Avem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(x) - x^2 + 1)'}{(\sin(\pi(x-1)))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 2x}{\pi \cos(\pi(x-1))'} = -\frac{1}{\pi}.$$

Ca urmare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x^2 + 1}{\sin(\pi(x-1))} = -\frac{1}{\pi}$.

Index

- derivată de ordin superior, [13](#)
- derivata într-un punct, [7](#)
- derivata la dreapta, [8](#)
- derivata la stânga, [8](#)
- distanță
 - distanță euclidiană, [4](#)
- formula Mac Laurin, [22](#)
- formula Taylor, [14](#)
 - cu restul Lagrange, [19](#)
- funcție
 - derivabilă, [7](#)
 - derivata, [7](#)
 - derivata de ordin superior, [13](#)
 - funcție Rolle, [17](#)
- normă
 - euclidiană, [3](#)
- polinom Taylor, [14](#)
- produs scalar
 - produs scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$, [4](#)
- punct de extrem, [16](#)
- punct de extrem local, [17](#)
- punct de maxim, [16](#)
- punct de maxim local, [16](#)
- punct de minim, [16](#)
- punct de minim local, [16](#)
- restul în formula Taylor, [14](#)
- teorema creșterilor finite, [12](#)
- teorema lui Cauchy, [18](#)
- teorema lui Fermat, [17](#)
- teorema lui Lagrange, [18](#)
- teorema lui Rolle, [17](#)
- topologie
 - topologia uzuală pe $\mathbb{R}^n$, [4](#)