

Analiză Matematică - Curs 7

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

5	Calcul diferențial (continuare din cursul 6)	3
5.3	Funcții diferențiabile	3
5.3.1	Diferențiala de ordinul I	3
5.3.2	Operații cu funcții diferențiabile	9
5.4	Derivata după o direcție	12
5.5	Derivate parțiale	14
	Index	17

Capitolul 5

Calcul diferențial (continuare din cursul 6)

5.3 Funcții diferențiabile

5.3.1 Diferențiala de ordinul I

Definiția 5.3.1 Fie V și W două spații liniare peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). O aplicație $f : V \rightarrow W$ se numește liniară dacă și numai dacă

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \text{ pentru orice } \lambda, \mu \in K \text{ și } x, y \in V.$$

Prezentăm pe scurt câteva rezultate legate de aplicațiile liniare (vezi de exemplu, [N. Boboc, *Curs de analiză reală și complexă*/Diferențiabilitate (1), p. 1-12, Universitatea din București, 1974]).

Teorema 5.3.2 Fie V și W două spații liniare peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Dacă $f : V \rightarrow W$ este o aplicație liniară, iar V și W sunt spații normate, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este continuă.
2. f este continuă în origine .
3. Există $M > 0$ cu proprietatea că $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pentru orice $x \in V$.

$$4. \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| < \infty.$$

Propoziția 5.3.3 *Fie V și W două spații liniare peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Dacă $f : V \rightarrow W$ este o aplicație liniară și V este finit dimensional, atunci f este continuă.*

Teorema 5.3.4 (Norma unei aplicații liniare) *Fie V și W două spații liniare peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Vom nota cu $L(V, W)$ spațiul aplicațiilor liniare și continue $f : V \rightarrow W$. Pentru orice $f \in L(V, W)$, avem*

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \inf \{M > 0 : \|f(x)\| \leq M\|x\| \text{ pentru orice } x \in V\}.$$

Dacă pentru orice $f \in L(V, W)$, definim $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ (norma aplicației liniare f), atunci $(L(V, W), \|\cdot\|)$ devine un spațiu normat. Spațiul $L(V, W)$ este denumit spațiul operatorilor liniari și mărginiți definiți pe V cu valori în W , iar elementele din $L(V, W)$ se mai numesc operatori liniari mărginiți.

Spațiul operatorilor liniari și mărginiți $L(V, W)$ este spațiu Banach dacă și numai dacă W este spațiu Banach.

Dacă V este un spațiu normat peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), atunci spațiul normat $L(V, K)$ se numește dualul lui V și se notează V' .

Definiția 5.3.5 (Diferențiala) *Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $B \subset F$, $f : A \rightarrow B$ o funcție și $a \in A$. Funcția f se numește diferențiabilă în $a \stackrel{\text{def}}{\iff}$ există o aplicație liniară și continuă $T : E \rightarrow F$ (adică $T \in L(E, F)$) cu proprietatea că*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|} (f(x) - f(a) - T(x - a)) = 0$$

$$(\text{sau echivalent } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0)$$

Aplicația T din definiția precedentă dacă există este unică. Într-adevăr presupunem prin absurd că există $T_1, T_2 \in L(E, F)$ cu proprietatea că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T_i(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0, \quad i = 1, 2$$

și astfel încât $T_1 \neq T_2$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} \frac{\|T_1(x - a) - T_2(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0,$$

și ca urmare pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $x \neq a$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ rezultă

$$\frac{\|T_1(x - a) - T_2(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon.$$

Deoarece $a \in A$ și A este o mulțime deschisă, există $r_a > 0$ astfel încât $B(a, r_a) \subset A$. Ca urmare pentru orice $x \neq a$ cu $\|x - a\| < \min\{\delta_\varepsilon, r_a\}$ rezultă

$$\frac{\|T_1(x - a) - T_2(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon.$$

Fie $y \in E$ astfel încât $T_1(y) \neq T_2(y)$. Evident $y \neq 0$. Dacă luăm $x = a + ty$ cu $|t| < \frac{\min\{\delta_\varepsilon, r_a\}}{\|y\|}$, atunci $\|x - a\| < \min\{\delta_\varepsilon, r_a\}$ și ca urmare

$$\begin{aligned} \frac{\|tT_1(y) - tT_2(y)\|}{|t|\|y\|} &< \varepsilon \\ \frac{\|T_1(y) - T_2(y)\|}{\|y\|} &< \varepsilon \\ \|T_1(y) - T_2(y)\| &< \varepsilon\|y\| \end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \rightarrow 0$, obținem contradicția $T_1(y) = T_2(y)$.

Aplicația T din definiția 5.3.5, dacă există, se numește *diferențiala* (de ordinul I) sau *diferențiala Fréchet* a funcției f în punctul a și se notează cu df_a . Dacă A_1 este o submulțime a mulțimii deschise A , funcția $f : A \rightarrow F$ se numește *diferențiabilă pe A_1* dacă este diferențiabilă în orice punct $a \in A_1$. Dacă

$$A_f = \{a \in A : f : A \rightarrow F \text{ este diferențiabilă în } a\},$$

se notează cu df funcția $df : A_f \rightarrow L(E, F)$ care asociază fiecărui element $a \in A_f$ diferențiala funcției f în a , adică funcția definită prin

$$df(a) = df_a \text{ pentru orice } a \in A_f.$$

Funcția df este numită *diferențiala* (de ordinul I) a funcției f .

Exemple 5.3.6 Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $f : A \rightarrow F$ o funcție și $a \in A$.

1. Dacă f este constantă, atunci f este diferențiabilă în a și $df_a = 0$.
2. Dacă f este restricția la A a unei aplicații liniare și continue $\tilde{f} : E \rightarrow F$, atunci f este diferențiabilă în a și $df_a = \tilde{f}$.
3. Dacă $g : A \rightarrow K$ este o funcție diferențiabilă în a și $v \in F$, atunci funcția $f : A \rightarrow F$, definită prin

$$f(x) = g(x)v \text{ pentru orice } x \in A,$$

este diferențiabilă în a și pentru orice $x \in E$

$$df_a(x) = dg_a(x)v.$$

(Într-adevăr, dacă definim $T : E \rightarrow F$, $T(x) = dg_a(x)v$ pentru orice $x \in E$, atunci T este liniară și continuă și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|(g(x) - g(a) - dg_a(x-a))v\|}{\|x-a\|} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - g(a) - dg_a(x-a)| \|v\|}{\|x-a\|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ca urmare f este diferențiabilă în a și $df_a(x) = T(x) = dg_a(x)v$ pentru orice $x \in E$.)

Propoziția 5.3.7 (Legătura dintre diferențiabilitate și derivabilitate)

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, E un spațiu normat real, $f : A \rightarrow E$ o funcție și $a \in A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este diferențiabilă în a .

2. f este derivabilă în a .

În plus, dacă f este diferențiabilă în a , atunci $df_a(x) = xf'(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $f'(a) = df_a(1)$. Mai mult, avem $\|df_a\| = \|f'(a)\|$ (unde $\|df_a\|$ este norma lui df_a ca aplicație liniară iar $\|f'(a)\|$ este norma lui $f'(a)$ ca element în E).

Demonstrație. $1 \Rightarrow 2$. Deoarece

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{1}{(x-a)} (f(x) - f(a)) - df_a(1) \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{1}{(x-a)} (f(x) - f(a) - df_a(x-a)) \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - df_a(x-a)\|}{|x-a|} \\ &= 0, \end{aligned}$$

rezultă că f este derivabilă în a și $f'(a) = df_a(1)$.

$2 \Rightarrow 1$. Deoarece

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|(f(x) - f(a) - (x-a)f'(a))\|}{|x-a|} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{1}{(x-a)} (f(x) - f(a)) - f'(a) \right\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

rezultă că f este diferențiabilă în a și $df_a : \mathbb{R} \rightarrow F$, $df_a(x) = xf'(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din faptul că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$\|df_a(x)\| = \|xf'(a)\| = |x| \|f'(a)\|$$

rezultă că $\|df_a\| = \|f'(a)\|$. ■

Propoziția 5.3.8 Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$, $f : A \rightarrow F$ o funcție și $T \in L(E, F)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este diferențiabilă în a și $df_a = T$.
2. Există o funcție $\varepsilon_f : A \rightarrow F$ cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0$ și astfel încât

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + \|x - a\| \varepsilon_f(x) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Demonstrație. $1 \Rightarrow 2$. Dacă luăm $\varepsilon_f : A \rightarrow F$ definită prin

$$\varepsilon_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x-a\|} (f(x) - f(a) - T(x-a)), & \text{dacă } x \neq a \\ 0, & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

pentru orice $x \in A$, atunci din definiția diferențiabilității în a rezultă că $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0$.

$2 \Rightarrow 1$. Avem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x-a\|} (f(x) - f(a) - T(x-a)) = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0,$$

și ca urmare f este diferențiabilă în a și $df_a = T$. ■

Propoziția 5.3.9 (Diferențiabilitatea $\Rightarrow$ continuitatea) Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă și $f : A \rightarrow F$ o funcție. Dacă f este diferențiabilă în a , atunci f este continuă în a .

Demonstrație. Deoarece f este diferențiabilă în a , există o funcție $\varepsilon_f : A \rightarrow F$ cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0$ și astfel încât

$$f(x) = f(a) + df_a(x - a) + \|x - a\| \varepsilon_f(x) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Ca urmare

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| &= \lim_{x \rightarrow a} \|df_a(x - a) + \|x - a\| \varepsilon_f(x)\| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow a} \|df_a(x - a)\| + \lim_{x \rightarrow a} \|x - a\| \|\varepsilon_f(x)\| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow a} \|df_a\| \|(x - a)\| + \lim_{x \rightarrow a} \|x - a\| \|\varepsilon_f(x)\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

În consecință, $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| = 0$ sau echivalent

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

■

5.3.2 Operații cu funcții diferențiabile

Propoziția 5.3.10 Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$, $f, g : A \rightarrow F$ o funcții și $\lambda, \mu \in K$. Dacă f și g sunt diferențiabile în a , atunci funcția $\lambda f + \mu g$ este diferențiabilă în a și

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a.$$

Demonstrație. Deoarece f și g sunt diferențiabile în a există două funcții $\varepsilon_f, \varepsilon_g : A \rightarrow F$ cu proprietățile că $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_g(x) = 0$ și astfel încât pentru orice $x \in A$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + df_a(x - a) + \|x - a\| \varepsilon_f(x) \\ g(x) &= g(a) + dg_a(x - a) + \|x - a\| \varepsilon_g(x). \end{aligned}$$

Ca urmare

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + \mu g(x) &= \lambda f(a) + \mu g(a) + (\lambda df_a + \mu dg_a)(x - a) + \\ &\quad \|x - a\| (\lambda \varepsilon_f(x) + \mu \varepsilon_g(x)). \end{aligned}$$

Cum $\lim_{x \rightarrow a} \lambda \varepsilon_f(x) + \mu \varepsilon_g(x) = 0$, conform propoziției 5.3.8, rezultă că $\lambda f + \mu g$ este diferențiabilă în a și $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$. ■

Teorema 5.3.11 (Diferențierea funcțiilor compuse) Fie E, F și G trei spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $B \subset F$ o submulțime deschisă, $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow G$ două funcții. Dacă f este diferențiabilă în a și g este diferențiabilă în $f(a)$, atunci funcția $g \circ f$ este diferențiabilă în a și

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Demonstrație. Se ține cont de propoziției 5.3.8 (vezi [N. Boboc, *Curs de analiză reală și complexă*/Diferențiabilitate (1), p. 18, Universitatea din București, 1974]). ■

Propoziția 5.3.12 Fie $E, F_1, F_2, \dots, F_m$ $m+1$ spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ o funcție (pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $f_i = pr_i \circ f$, unde $pr_i : F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m \rightarrow F_i$, $pr_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i$). Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este diferențiabilă în a .

2. Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, f_i este diferențiabilă în a .

Dacă f este diferențiabilă în a , atunci pentru orice $x \in E$ avem

$$df_a(x) = (df_{1_a}(x), df_{2_a}(x), \dots, df_{m_a}(x)).$$

Demonstrație. $1 \Rightarrow 2$. Deoarece pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $pr_i : F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m \rightarrow F_i$ este o aplicație liniară, rezultă că pr_i este diferențiabilă în orice punct și în plus, $dpr_i(f(a)) = pr_i$. Conform propoziției 5.3.11, ținând cont că $f_i = pr_i \circ f$, rezultă f_i diferențiabilă și

$$df_{i_a} = dpr_{i_{f(a)}} \circ df_a = pr_i \circ df_a.$$

$2 \Rightarrow 1$. Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, considerăm funcția $u_i : F_i \rightarrow F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ definită prin

$$\begin{aligned} u_i(x) &= (0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0) \\ (pr_i(u_i(x))) &= x \end{aligned}$$

pentru orice $x \in F_i$. Este ușor de observat că $\sum_{i=1}^m u_i(x_i) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ și ca urmare

$$\sum_{i=1}^m u_i(f_i(x)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) = f(x)$$

pentru orice $x \in A$. Conform propoziției 5.3.11 $u_i \circ f_i$ este diferențiabilă în a , iar conform propoziției 5.3.10 $\sum_{i=1}^m u_i \circ f_i$ (adică f) este diferențiabilă în a . ■

Teorema 5.3.13 (Teorema creșterilor finite) Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a, b \in A$ și $f : A \rightarrow F$ o funcție diferențiabilă pe A . Dacă mulțimea

$$(a, b) = \{(1-t)a + tb : t \in (0, 1)\}$$

este inclusă în A , atunci

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{y \in (a, b)} \|df_y\| \|b - a\|.$$

Demonstrație. Dacă $\sup_{y \in [a,b]} \|df_y\| = \infty$, atunci rezultatul este evident. Presupunem $M = \sup_{y \in [a,b]} \|df_y\| < \infty$ și considerăm funcțiile $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = M \|b - a\| x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b] \subset A \subset E$ definită prin $\varphi(x) = (1 - x)a + xb$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Funcția φ este derivabilă în orice punct x_0 . Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} (\varphi(x) - \varphi(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} ((-x + x_0)a + (x - x_0)b) \\ &= b - a, \end{aligned}$$

de unde rezultă că φ este derivabilă în x_0 și $\varphi'(x_0) = b - a$. Conform propoziției 5.3.7, φ este diferențiabilă și pentru orice $x \in [0, 1]$

$$d\varphi_x(t) = t\varphi'(x) = t(b - a) \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

și deci

$$\|d\varphi_x(t)\| = |t| \|b - a\|$$

de unde deducem $\|d\varphi_x\| = \|b - a\|$. Din propoziția 5.3.11 $f \circ \varphi$ este diferențiabilă în orice punct $x \in [0, 1]$ și

$$d(f \circ \varphi)_x = (df_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x).$$

Ca urmare pentru orice $x \in (0, 1)$

$$\|d(f \circ \varphi)_x\| \leq \|df_{\varphi(x)}\| \|d\varphi_x\| \leq M \|b - a\|$$

și aplicând din nou propoziția 5.3.7, $f \circ \varphi$ este derivabilă și

$$\|(f \circ \varphi)'(x)\| = \|d(f \circ \varphi)_x\| \leq M \|b - a\|$$

Deoarece $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pentru orice $x \in (0, 1)$, conform teoremei 5.1.8 (J. Dieudonné), avem

$$\begin{aligned} \|(f \circ \varphi)(1) - (f \circ \varphi)(0)\| &\leq g(1) - g(0) = \sup_{y \in (a,b)} \|df_y\| \|b - a\| \\ \|f(\varphi(1)) - f(\varphi(0))\| &\leq \sup_{y \in (a,b)} \|df_y\| \|b - a\| \\ \|f(b) - f(a)\| &\leq \sup_{y \in (a,b)} \|df_y\| \|b - a\|. \end{aligned}$$

■

5.4 Derivata după o direcție

Fie E un spațiu normat peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Pentru orice $v \in E$, $v \neq 0$, există $r > 0$ astfel încât funcția $g_{f,a,v} : \{t : |t| < r\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_{f,a,v}(t) = f(a + tv)$ pentru orice t cu $|t| < r$, să fie corect definită (adică $a + tv \in A$ pentru orice t cu $|t| < r$). Într-adevăr, mulțimea A fiind deschisă și $a \in A$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(a, \varepsilon) \subset A$. Dacă luăm $r = \frac{\varepsilon}{\|v\|}$, atunci pentru orice t cu $|t| < r$ avem $\|a - (a + tv)\| = \|-tv\| = |t| \|v\| < r \|v\| = \frac{\varepsilon}{\|v\|} \|v\| = \varepsilon$ și deci $a + tv \in B(a, \varepsilon) \subset A$.

Definiția 5.4.1 (Derivata după o direcție) Fie E un spațiu normat peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $v \in E$ nenul ($v \neq 0$). Funcția $f : A \rightarrow K$ se numește derivabilă în a după direcția v (sau diferențiabilă Gâteaux în a după direcția v) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există în K limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Dacă există limita precedentă se notează cu $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ și se numește derivata lui f în punctul a după direcția v (sau diferențiala Gâteaux a lui f în a după direcția v).

Dacă

$$A_{f,v} = \{a \in A : f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ este derivabilă după direcția } v \text{ în } a\},$$

se notează cu $\frac{\partial f}{\partial v}$ funcția $\frac{\partial f}{\partial v} : A_{f,v} \rightarrow K$ care asociază fiecărui element $a \in A_{f,v}$ derivata funcției f în punctul a după direcția v , adică funcția $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(a) : A_{f,v} \rightarrow K$. Funcția $\frac{\partial f}{\partial v}$ este numită *derivata după direcția v a funcției f* .

Este ușor de observat că dacă corpul K este $\mathbb{R}$, atunci funcția f este derivabilă în a după direcția v dacă și numai dacă $g_{f,a,v}$ este derivabilă în 0 și în plus $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = g'_{f,a,v}(0)$.

Propoziția 5.4.2 (Operații cu funcții derivabile după o direcție) Fie E un spațiu normat peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $v \in E$ nenul ($v \neq 0$). Fie $f, g : A \rightarrow K$ două funcții derivabile în a după direcția v . Atunci:

1. Pentru orice $\lambda \in K \setminus \{0\}$, funcția f este derivabilă în a după direcția λv și $\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(a)$.
2. Pentru orice $\lambda, \mu \in K$, funcția $\lambda f + \mu g$ este derivabilă în a după direcția v și

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial v}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial v}(a).$$

3. fg este derivabilă în a după direcția v și

$$\frac{\partial(fg)}{\partial v}(a) = f(a) \frac{\partial g}{\partial v}(a) + g(a) \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

4. Dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$, atunci funcția $\frac{1}{f}$ este derivabilă în a după direcția v și

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial v}(a) = -\frac{1}{f^2(a)} \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

5. Dacă $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în a după direcția v și

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial v}(a) = \frac{1}{g^2(a)} \left(g(a) \frac{\partial f}{\partial v}(a) - f(a) \frac{\partial g}{\partial v}(a) \right).$$

Demonstrație. Se utilizează definiția derivatei după o direcție și inegalități de tipul

$$\|\alpha x \pm \beta y\| \leq |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\| \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in K \text{ și } x, y \in E.$$

■

Propoziția 5.4.3 (Diferențiabilitatea $\Rightarrow$ derivabilitatea după orice direcție) Fie E un spațiu normat peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă f este diferențiabilă în a , atunci f este derivabilă în a după orice direcție $v \in E$ ($v \neq 0$) și

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v).$$

Demonstrație. Deoarece f este diferențiabilă în a , conform propoziției 5.3.8 există o funcție $\varepsilon_f : A \rightarrow E$ cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0$ și astfel încât pentru orice $x \in A$ avem

$$f(x) = f(a) + df_a(x - a) + \|x - a\| \varepsilon_f(x).$$

Mai departe, ținând cont că există $r > 0$ astfel încât $a + tv \in A$ pentru orice t cu $|t| < r$ și înlocuind în egalitatea anterioară $x = a + tv$, rezultă

$$\begin{aligned} f(a + tv) &= f(a) + df_a(tv) + \|tv\| \varepsilon_f(x) \\ f(a + tv) &= f(a) + tdf_a(v) + |t| \|v\| \varepsilon_f(x). \end{aligned}$$

Așadar pentru orice $t \neq 0$ cu $|t| < r$ obținem

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = df_a(v) + \frac{|t|}{t} \|v\| \varepsilon_f(x),$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} df_a(v) + \frac{|t|}{t} \|v\| \varepsilon_f(x) \\ &= df_a(v) + \|v\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \varepsilon_f(x) \\ &= df_a(v) \end{aligned}$$

În consecință, f este derivabilă în a după direcția $v \in E$ și $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v)$.

■

5.5 Derivate parțiale

Definiția 5.5.1 (Derivata parțială) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă și $a \in A$. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se numește derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f este derivabilă în a după direcția $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (cel de al k -lea vector al bazei canonice din $\mathbb{R}^n$). Dacă există $\frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$ se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (sau $D_k f(a)$, sau $f'_{x_k}(a)$) și se numește derivata parțială (de ordinul I) a lui f în punctul a în raport cu variabila x_k .

Dacă

$$A_{f,k} = \{a \in A : f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ este derivabilă parțial în raport cu } x_k\},$$

se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ funcția $\frac{\partial f}{\partial x_k} : A_{f,k} \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui element $a \in A_{f,k}$ derivata parțială a funcției f în punctul a în raport cu variabila x_k , adică funcția $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) [: A_{f,k} \rightarrow \mathbb{R}]$. Funcția $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ este numită *derivata parțială în raport cu variabila x_k* a funcției f .

Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ și $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, atunci mulțimea

$$A_{k,a} = \{x \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) \in A\}$$

este deschisă. Într-adevăr, dacă $\varphi_{k,a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ este funcția definită prin

$$\varphi_{k,a}(x) = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad x \in \mathbb{R},$$

atunci φ_k este continuă și $A_{k,a} = \varphi_{k,a}^{-1}(A)$ deci $A_{k,a}$ este o mulțime deschisă. Considerăm funcția $f_{k,a} : A_{k,a} \rightarrow \mathbb{R}$, numită *funcția parțială de indice k asociată funcției f și punctului a* , definită prin

$$f_{k,a}(x) = f((a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n))$$

pentru orice $x \in A_{k,a}$. Atunci

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} \\ = & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{t} \\ = & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_{k,a}(a_k + t) - f_{k,a}(a_k)}{t} \\ = & \lim_{\substack{x=a_k+t \\ x \rightarrow a_k}} \frac{f_{k,a}(x) - f_{k,a}(a_k)}{x - a_k}. \end{aligned}$$

În consecință, f este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k dacă și numai dacă funcția parțială de indice k asociată funcției f și punctului a , $f_{k,a}$, este derivabilă în a_k și în plus $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{k,a}(a_k)$. Deoarece funcția $f_{k,a}$ este o funcție reală de o variabilă reală, rezultă că pentru calculul derivatei parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ se pot aplica formulele de derivare din propoziția 5.1.4.

Propoziția 5.5.2 (Operații cu funcții derivabile parțial) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $a \in A$. Fie $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{g} g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ două funcții derivabile parțial în a în raport cu variabila x_k . Atunci:

1. Pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, funcția $\lambda f + \mu g$ este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k și

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_k}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_k}(a).$$

2. fg este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k și

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(a) = f(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) + g(a) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

3. Dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$, atunci funcția $\frac{1}{f}$ este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k și

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x_k}(a) = -\frac{1}{f^2(a)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

4. Dacă $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k și

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_k}(a) = \frac{1}{g^2(a)} \left(g(a) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) - f(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \right).$$

Demonstrație. Este o consecință directă a propoziției 5.4.2 sau se poate utiliza propoziția 5.1.3 și faptul că o funcție f este derivabilă parțial în a în raport cu x_k dacă și numai dacă $f_{k,a}$ este derivabilă în a_k și în plus $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{k,a}(a_k)$. ■

În cazul $n = 2$ vom scrie (x, y) în loc de (x_1, x_2) , iar în cazul $n = 3$ vom scrie (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3) . Ca urmare vom nota derivatele parțiale ale unei funcții f de două variabile (respectiv de trei variabile) cu $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ (respectiv cu $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial f}{\partial z}$).

Exemple 5.5.3 Să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 \sin^2(y)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

R: Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sin^2(y) (x^3)'_x = \sin^2(y) 3x^2 = 3x^2 \sin^2(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 (\sin^2(y))'_y = x^3 2 \sin(y) \cos(y) = x^3 \sin(2y).\end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{xy^2} \cos(z)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

R: Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \cos(z) (e^{xy^2})'_x = \cos(z) e^{xy^2} (xy^2)'_x = \cos(z) e^{xy^2} y^2 \\ &= y^2 e^{xy^2} \cos(z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \cos(z) (e^{xy^2})'_y = \cos(z) e^{xy^2} (xy^2)'_y = \cos(z) e^{xy^2} x (2y) \\ &= 2xy e^{xy^2} \cos(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= e^{xy^2} (\cos(z))'_z = e^{xy^2} (-\sin(z)) = -\sin(z) e^{xy^2}.\end{aligned}$$

Index

- aplicație liniară, [3](#)
- derivata după o direcție, [12](#)
- derivata parțială, [14](#)
- diferențiala
 - diferențiala într-un punct, [5](#)
 - diferențiala de ordinul I, [6](#)
- diferențiala Fréchet, [5](#)
- diferențiala Gâteaux, [12](#)
- dualul unui spațiu normat, [4](#)
- funcție
 - derivata după o direcție, [12](#)
 - derivata parțială, [15](#)
 - diferențiabilă, [4](#)
 - diferențiala unei funcții, [5](#), [6](#)
 - liniară, [3](#)
- normă
 - a unei aplicații liniare, [4](#)
- operator liniar și mărginit, [4](#)
- teorema creșterilor finite, [10](#)
- transformare liniară, [3](#)