

Analiză Matematică - Curs 8

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

5	Calcul diferențial (continuare din cursul 7)	3
5.5	Derivate parțiale (continuare din cursul 7)	3
5.6	Diferențiale de ordin superior	16
5.6.1	Aplicații multiliniare	16
Index		19

Capitolul 5

Calcul diferențial (continuare din cursul 7)

5.5 Derivate parțiale (continuare din cursul 7)

Teorema 5.5.1 (Formula de calcul a diferențialei) *Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ și $a \in A$. Dacă funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

este diferențiabilă în a , atunci pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ funcția f este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k și

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df_a(e_k),$$

unde $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ este cel de al k -lea vector al bazei canonice din $\mathbb{R}^n$. În plus, pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$df_a(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k.$$

Demonstrație. Faptul că f este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_k și $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df_a(e_k)$ este o consecință directă a propoziției 5.4.3.

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Atunci $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ și ca urmare

$$df_a(x) = df_a\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k df_a(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

■

Tradițional pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ aplicațiile liniare $pr_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$pr_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

se notează cu dx_k . Folosind aceste notații obținem următoarea formulă de calcul a diferențialei (de ordinul I) a funcției f :

$$\begin{aligned} df_a &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ df_a &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k \end{aligned}$$

În particular, în cazul $n = 2$ avem

$$df_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy$$

iar în cazul $n = 3$

$$df_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a) dz.$$

Conform teoremei 5.5.1 orice funcție diferențiabilă admite derivate parțiale. În general, reciproca nu este adevărată pentru $n > 1$.

Teorema 5.5.2 (Criteriu de diferențiabilitate) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă și $a \in A$. Dacă funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

admite derivate parțiale în orice punct dintr-o vecinătate V_a a punctului a și dacă derivatele parțiale

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

sunt continue în a pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, atunci funcția f este diferențiabilă în a .

Demonstrație. În cele urmează considerăm pe $\mathbb{R}^n$ norma $||| = |||_{\infty}$. Deoarece V_a este vecinătate a punctului a , există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset V_a$. Deoarece funcția

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

este continuă în a , pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon} > 0$ astfel încât pentru orice $z \in B(a, r)$ cu $\|z - a\| < \delta_{\varepsilon}$ să avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(z) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

Fie $r_{\varepsilon} = \min\{\delta_{\varepsilon}, r\}$ și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punct fixat din $B(a, r_{\varepsilon})$. Considerăm punctele

$$\begin{aligned} y_0 &= x \\ y_k &= (a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

și observăm că

$$\begin{aligned} \|y_k - a\| &= \|(0, 0, \dots, 0, x_{k+1} - a_{k+1}, x_{k+2} - a_{k+2}, \dots, x_n - a_n)\| \\ &\leq \|x - a\| \\ &< r \end{aligned}$$

Așadar $y_0, y_1, \dots, y_n \in B(a, r_{\varepsilon})$. Aplicând teorema creșterilor finite 5.1.9 funcției

$$t \xrightarrow{F_k} f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) - f(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(t - a_k)$$

pe intervalul I_k de capete a_k și x_k obținem

$$\|F_k(x_k) - F_k(a_k)\| \leq \sup_{t \in I_k} |F'_k(t)| |x_k - a_k|.$$

Din faptul că pentru orice $t \in I_k$ avem

$$\|(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) - a\| \leq \|x - a\| < r_{\varepsilon}$$

rezultă că $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \in B(a, r_\varepsilon)$ și ca urmare

$$\begin{aligned} |F'_k(t)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right| \\ &\stackrel{(5.1)}{<} \varepsilon \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} &\left\| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n (f(y_{k-1}) - f(y_k)) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n f(y_{k-1}) - f(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\| f(y_{k-1}) - f(y_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \right\| \\ &= \sum_{k=1}^n \|F_k(x_k) - F_k(a_k)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sup_{t \in I_k} |F'_k(t)| |x_k - a_k| \\ &\stackrel{(5.2)}{<} \varepsilon \sum_{k=1}^n |x_k - a_k| \\ &\leq \varepsilon n \|x - a\| \end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left\| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) \right\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Ca urmare, ținând cont și de faptul că aplicația

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k$$

este liniară (și continuă), rezultă că f este diferențiabilă în a și

$$df_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k.$$

■

Exemple 5.5.3 Să se calculeze diferențialele următoarelor funcții în punctul a :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(1 + x^2 y^4)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a = (1, -1)$.

R: Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1 + x^2 y^4} (1 + x^2 y^4)'_x = \frac{1}{1 + x^2 y^4} y^4 2x = \frac{2xy^4}{1 + x^2 y^4} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1 + x^2 y^4} (1 + x^2 y^4)'_y = \frac{1}{1 + x^2 y^4} x^2 4y^3 = \frac{4x^2 y^3}{1 + x^2 y^4}.\end{aligned}$$

și deci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) &= \left. \frac{2xy^4}{1 + x^2 y^4} \right|_{(x,y)=(1,-1)} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) &= \left. \frac{4x^2 y^3}{1 + x^2 y^4} \right|_{(x,y)=(1,-1)} = -2.\end{aligned}$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$ și în particular în $a = (1, -1)$, rezultă că f este diferențiabilă în $a = (1, -1)$ și

$$\begin{aligned}df_{(1,-1)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) dy \\ &= dx - 2dy.\end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \arctg\left(\frac{y}{1+x^2 z^2}\right)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $a = (1, 2, -1)$.

R: *Avem*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{1+x^2z^2}\right)^2} \left(\frac{y}{1+x^2z^2} \right)'_x \\
 &= \frac{(1+x^2z^2)^2}{(1+x^2z^2)^2 + y^2} (-y) \frac{(1+x^2z^2)'_x}{(1+x^2z^2)^2} \\
 &= -\frac{2xyz^2}{x^4z^4 + 2x^2z^2 + y^2 + 1} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{1+x^2z^2}\right)^2} \left(\frac{y}{1+x^2z^2} \right)'_y \\
 &= \frac{(1+x^2z^2)^2}{(1+x^2z^2)^2 + y^2} \frac{1}{1+x^2z^2} \\
 &= \frac{1+x^2z^2}{x^4z^4 + 2x^2z^2 + y^2 + 1} \\
 \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -\frac{2x^2yz}{x^4z^4 + 2x^2z^2 + y^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

și ca urmare

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, -1) &= -\frac{2xyz^2}{x^4z^4 + 2x^2z^2 + y^2 + 1} \Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = -\frac{1}{2} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, -1) &= \frac{1+x^2z^2}{x^4z^4 + 2x^2z^2 + y^2 + 1} \Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = \frac{1}{4} \\
 \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, -1) &= -\frac{2x^2yz}{x^4z^4 + 2x^2z^2 + y^2 + 1} \Big|_{(x,y,z)=(1,2,-1)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial f}{\partial z}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^3$ și în particular, în $a = (1, 2, -1)$, rezultă că f este diferențiabilă în $a = (1, 2, -1)$ și

$$\begin{aligned}
 df_{(1,2,-1)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, -1) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, -1) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) dz \\
 &= -\frac{1}{2}dx + \frac{1}{4}dy + \frac{1}{2}dz.
 \end{aligned}$$

Definiția 5.5.4 (Gradient) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că admite derivate parțiale în a în raport cu toate variabilele x_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se numește gradientul asociat funcției f în punctul a , și se notează cu $\nabla_a f$, vectorul

$$\nabla_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Dacă

$A_f = \{a \in A : f \text{ este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele}\}$,
se notează cu ∇f funcția $\nabla f : A_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ definită prin

$$\nabla f(a) = \nabla_a f \text{ pentru orice } a \in A_f$$

Funcția ∇f este numită gradientul lui f .

Exemplul 5.5.5 Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + 3xy - yz^4$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Avem

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &= (3x^2 + 3y, 3x - z^4, -4yz^3). \end{aligned}$$

Definiția 5.5.6 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă și $a \in A$. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește de clasă C^1 pe A (și se scrie $f \in C^1(A)$) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f admite derivate parțiale în orice punct din A și derivatele parțiale

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

sunt continue pe A .

Dacă f este de clasă C^1 pe A , atunci f este diferențiabilă în orice punct din A și ca urmare este continuă pe A .

Corolarul 5.5.7 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în a (în particular, o funcție de clasă C^1). Atunci pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$df_a(x) = \langle \nabla_a f, x \rangle,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. Este consecință directă a teoremei 5.5.1. ■

Definiția 5.5.8 (Matrice jacobiană) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție (pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $f_i = pr_i \circ f$, unde $pr_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i$). Presupunem că pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, funcția $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivate parțiale în a în raport cu toate variabilele x_j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se numește matricea jacobiană asociată funcției f în punctul a , și se notează cu $Jf(a)$, matricea

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dacă $m = n$, determinantul matricei jacobiene se numește jacobianul funcției f (sau determinantul funcțional al funcțiilor $f_1, f_2, \dots, f_n$ în raport cu variabilele $x_1, x_2, \dots, x_n$) în punctul a și se notează cu

$$\det(Jf(a)) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a).$$

Exemplul 5.5.9 Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^3 + 3xyz, x \cos(y + z))$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Avem $f_1(x, y, z) = x^3 + 3xyz$, $f_2(x, y, z) = x \cos(y + z)$ și

$$\begin{aligned} Jf(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x^2 + 3yz & 3xz & 3xy \\ \cos(y + z) & -x \sin(y + z) & -x \sin(y + z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definiția 5.5.10 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție (pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $f_i = pr_i \circ f$, unde $pr_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i$). Funcția f se numește de clasă C^1 pe A (și se scrie $f \in C^1(A)$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ toate componentele ei $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt de clasă C^1 pe A .

Evident funcțiile $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 sunt diferențiabile în orice punct din A .

Teorema 5.5.11 *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă pe A (pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $f_i = pr_i \circ f$, unde $pr_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $pr_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i$). Atunci pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem*

$$df_a(x)^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(ceea ce este echivalent cu faptul că matricea jacobiană $Jf(a)$ este matricea asociată aplicației liniare $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ în bazele canonice din $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ cu convenția scrierii vectorilor pe coloană).

Aplicația $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este un izomorfism liniar dacă și numai dacă $m = n$ și jacobianul $\det(Jf(a)) \neq 0$.

Demonstrație. Conform propoziției 5.3.8, f este diferențiabilă în a dacă și numai dacă toate componentele ei $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt diferențiabile în a și

$$df_a(x) = (df_{1a}(x), df_{2a}(x), \dots, df_{ma}(x)).$$

Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, conform teoremei 5.5.1, pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$df_{ia}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) x_k.$$

Ca urmare pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned} df_a(x)^t &= \begin{pmatrix} df_{1a}(x) \\ df_{2a}(x) \\ \dots \\ df_{ma}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) x_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) x_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicația $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este un izomorfism liniar dacă și numai dacă $m = n$ și matricea asociată aplicației liniare df_a fixând baze în $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^m$ este inversabilă. Ceea ce este echivalent cu $Jf(a)$ inversabilă sau cu $\det(Jf(a)) \neq 0$. ■

Exemplul 5.5.12 Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă cu proprietatea că $A \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ pentru orice $(\rho, \theta) \in A$. Avem $f_1(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta)$, $f_2(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta)$ și

$$\begin{aligned} Jf(\rho, \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jacobianul lui f într-un punct (ρ, θ) este

$$\begin{aligned} \frac{D(f_1, f_2)}{D(\rho, \theta)} &= \det(Jf(\rho, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Aplicația $df_{(\rho, \theta)}$ este izomorfism dacă și numai dacă $\rho \neq 0$. În plus, pentru orice $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$df_{(\rho, \theta)}(u, v)^t = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

adică

$$df_{(\rho, \theta)}(u, v) = (u \cos(\theta) - v \rho \sin(\theta), u \sin(\theta) + v \rho \cos(\theta)).$$

Propoziția 5.5.13 (Derivarea parțială a funcțiilor compuse) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ și $B \subset \mathbb{R}^m$ două mulțimi deschise, $a \in A$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$ o funcție

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

diferențiabilă în a și $g = (g_1, g_2, \dots, g_p) : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) \xrightarrow{g} g(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

diferențiabilă în $f(a)$ (în particular, f și g de clasă C^1). Atunci pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $g_i \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în a în raport cu toate variabilele și în plus, pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Demonstrație. Conform teoremei 5.3.7 funcția $g \circ f$ este diferențiabilă în a și

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Deoarece matricea asociată unei diferențiale în bazele canonice (pe domeniu și codomeniu) este matricea jacobiană avem

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) Jf(a).$$

Așadar

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial(g_2 \circ f)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(g_2 \circ f)}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial(g_2 \circ f)}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(g_p \circ f)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(g_p \circ f)}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial(g_p \circ f)}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

de unde rezultă că pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ și orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

■

Exemplul 5.5.14 Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$ și $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă. Arătăm că funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2)$$

pentru orice $(x, y, z) \in A$, verifică relația

$$xz \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - yz \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Într-adevăr, dacă notăm cu u, v cele două variabile de care depinde φ și considerăm funcția $g = (g_1, g_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, unde $g_1(x, y, z) = xy$, $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ pentru orice $(x, y, z) \in A$, obținem $f = \varphi \circ g$

și

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) y + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) 2x \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) x + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) 2y \\
 \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) (-2z)
 \end{aligned}$$

Așadar pentru orice $(x, y, z) \in A$,

$$\begin{aligned}
 &xz \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \\
 &= xz \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) + 2x \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \right) + (x^2 - y^2) (-2z) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \\
 &= xyz \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) + (2x^2z - 2x^2z + 2y^2z) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \\
 &= yz \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x, y, z)) + 2y \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x, y, z)) \right) \\
 &= yz \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z),
 \end{aligned}$$

și deci

$$xz \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) - yz \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0.$$

Propoziția 5.5.15 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ și $B \subset \mathbb{R}^n$ două mulțimi deschise, $a \in A$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ o funcție

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

diferențiabilă în a și $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \xrightarrow{g} g(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

diferențiabilă în $f(a)$ (în particular, f și g de clasă C^1). Dacă pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, notăm $h_i = g_i \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$, atunci avem următoarea relație între determinanții funcționali

$$\frac{D(h_1, h_2, \dots, h_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(f(a)) \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a).$$

Demonstrație. Conform teoremei 5.3.7 funcția $g \circ f$ este diferențiabilă în a și

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Deoarece matricea asociată unei diferențiale în bazele canonice (pe domeniu și codomeniu) este matricea jacobiană avem

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) Jf(a)$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \det(J(g \circ f)(a)) &= \det(Jg(f(a)) Jf(a)) \\ &= \det(Jg(f(a))) \det(Jf(a)). \end{aligned}$$

Ținând cont că $g \circ f = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ obținem

$$\frac{D(h_1, h_2, \dots, h_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, g_2, \dots, g_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(f(a)) \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a).$$

■

5.6 Diferențiale de ordin superior

5.6.1 Aplicații multiliniare

Definiția 5.6.1 (Aplicație multiliniară) Fie $E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n+1$ spații liniare peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). O aplicație $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ se numește n -liniară (sau multiliniară) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pentru

orice punct $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ și orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, funcția $f_{k,a} : E_k \rightarrow F$ definită prin

$$f_{k,a}(x) = f((a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n))$$

pentru orice $x \in E$ este o aplicație liniară, adică pentru orice $\lambda, \mu \in K$ și orice $x, y \in E_k$

$$f_{k,a}(\lambda x + \mu y) = \lambda f_{k,a}(x) + \mu f_{k,a}(y).$$

În cazul $n = 1$ noțiunea de aplicație multiliniară coincide cu noțiunea de aplicație liniară. În cazul $n = 2$, aplicațiile 2-liniare se numesc biliniare.

Dacă $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ este o aplicație multiliniară, atunci este ușor de observat că:

- Dacă $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ și există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $x_k = 0$, atunci $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

- Dacă $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$, atunci

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Dacă $E_1 = E_2 = \dots = E_n = K$, atunci .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n f(1, 1, \dots, 1)$$

pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$. Reciproc, pentru orice $v \in F$, aplicația $f_v : K^n \rightarrow F$,

$$f_v(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n v$$

pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, este o aplicație n -liniară și

$$v = f_v(1, 1, \dots, 1).$$

Prezentăm pe scurt câteva noțiuni și rezultate legate de aplicațiile multiliniare. (Pentru demonstrații se poate consulta de exemplu, [N. Boboc, *Curs de analiză reală și complexă*/Diferențiabilitate (2), p. 4-17, Universitatea din București, 1974].)

Teorema 5.6.2 Fie $E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n + 1$ spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Dacă $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ este o aplicație n -liniară, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este continuă.
2. f este continuă în $(0, 0, \dots, 0) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.
3. Există $M > 0$ cu proprietatea că

$$\|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|$$

pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

4. $\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| < \infty$.

În particular, dacă $E_1, E_2, \dots, E_n$ sunt finit dimensionale, atunci orice aplicație n -liniară $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ este continuă.

Dacă $E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n + 1$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), notăm

$$L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F) = \{f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F : f \text{ } n\text{-liniară și continuă}\}.$$

Este ușor de observat că dacă $f, g \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ și $\lambda \in K$, atunci $f + g \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ și $\lambda f \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$. Așadar

$$L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$$

este un spațiu liniar peste corpul K .

În cazul în care $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, notăm

$$L_n(E; F) = L_n(E, E, \dots, E; F).$$

Teorema 5.6.3 (Norma unei aplicații multiliniare) Fie $E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n + 1$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Pentru orice

$f \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ avem

$$\begin{aligned}
 & \inf \{M > 0 : \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\| \forall (x_1, x_2, \dots, x_n)\} \\
 = & \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \\
 = & \sup_{\substack{\|x_i\| = 1 \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \\
 = & \sup_{\substack{\|x_i\| < 1 \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|
 \end{aligned}$$

Dacă pentru orice $f \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$, definim

$$\|f\| = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|$$

(norma aplicației n -liniare f), atunci $(L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F), \|\cdot\|)$ devine un spațiu normat.

Dacă F este spațiu Banach, atunci spațiul normat $L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ este spațiu Banach.

Index

- aplicație multiliniară, [16](#)
- determinant funcțional, [10](#)
- formula de calcul a diferențialei, [3](#)
- funcție
 - de clasă C^1 , [9](#), [10](#)
 - multiliniară, [16](#)
- gradient, [9](#)
- jacobian, [10](#)
- matrice jacobiană, [10](#)
- normă
 - a unei aplicații multiliniare, [19](#)