

Analiză Matematică - Curs 9

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

5	Calcul diferențial (continuare din cursul 8)	3
5.6	Diferențiale de ordin superior (continuare din cursul 8)	3
5.6.1	Aplicații multiliniare (continuare din cursul 8)	3
5.6.2	Diferențiala unei aplicații multiliniare	4
5.6.3	Diferențiabilitatea de ordin superior	10
5.7	Derivate parțiale de ordin superior	14
Index		27

Capitolul 5

Calcul diferențial (continuare din cursul 8)

5.6 Diferențiale de ordin superior (continuare din cursul 8)

5.6.1 Aplicații multiliniare (continuare din cursul 8)

Reamintim că pentru orice $E_1, E_2, \dots, E_p, F$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), notăm

$$L_p(E_1, E_2, \dots, E_p; F) = \{f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F : f \text{ } p\text{-liniară și continuă}\},$$

iar în cazul în care $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$, notăm

$$L_p(E; F) = L_p(E, E, \dots, E; F).$$

Fie $E_1, E_2, \dots, E_{m+n}, F$ $m+n+1$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Considerăm aplicația

$$\Psi : L_{m+n}(E_1, \dots, E_{m+n}; F) \rightarrow L_m(E_1, \dots, E_m; L_n(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$$

definită prin

$$\Psi(f)(x_1, x_2, \dots, x_m)(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (5.1)$$

pentru orice $f \in L_{m+n}(E_1, E_2, \dots, E_{m+n}; F)$, $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ și $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E_{m+1} \times E_{m+2} \times \dots \times E_{m+n}$. Aplicația Ψ este corect definită și

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|$$

pentru orice $f \in L_{m+n}(E_1, E_2, \dots, E_{m+n}; F)$. În plus, Ψ este bijectivă și

$$\Psi^{-1} : L_m(E_1, \dots, E_m; L_n(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)) \rightarrow L_{m+n}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$$

este definită prin

$$\Psi^{-1}(g)((x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}))$$

pentru orice aplicație $g \in L_m(E_1, E_2, \dots, E_m; L_n(E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_{m+n}; F))$ și orice $(x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{m+n}$. Deci Ψ este un izomorfism. În cele ce urmează vom identifica spațiile

$$L_{m+n}(E_1, E_2, \dots, E_{m+n}; F) \approx L_m(E_1, E_2, \dots, E_m; L_n(E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_{m+n}; F))$$

prin intermediul lui Ψ .

Definiția 5.6.1 (Aplicație multiliniară simetrică) Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). O aplicație n -liniară $f \in L_n(E; F)$ se numește simetrică dacă pentru orice permutare

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

și orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \times E \times \dots \times E$ avem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

5.6.2 Diferențiala unei aplicații multilinare

Propoziția 5.6.2 Fie $E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n+1$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$) și $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Atunci orice $f \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ este diferențiabilă în a și pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ avem

$$df_a(x) = \sum_{k=1}^n f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n).$$

Demonstrație. În cele urmează considerăm pe $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ norma $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$. Fie $\varepsilon > 0$ și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punct fixat din $B(a, \varepsilon)$. Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$\begin{aligned} \|x_k - a_k\| &\leq \|x - a\| < \varepsilon \\ \|x_k\| &\leq \|x_k - a_k\| + \|a_k\| \\ &< \varepsilon + \|a\| \end{aligned} \tag{5.2}$$

Fie $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat. Definim funcția $g_k : E_k \rightarrow F$ prin

$$g_k(t) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

pentru orice $t \in E_k$. Deoarece funcțiile

$$\begin{aligned} t &\mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \\ t &\mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

sunt liniare și continue pe E_k , rezultă că funcția g_k este liniară și continuă pe E_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$). Considerăm punctele

$$\begin{aligned} y_0 &= (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ y_i &= (a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_{k+i}, x_{k+i+1}, \dots, x_n) \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, n-k\}. \end{aligned}$$

Pentru orice $t \in E_k$ avem

$$g_k(t) = \sum_{i=1}^{n-k} (f(y_{i-1}) - f(y_i))$$

și ca urmare

$$\begin{aligned} \|g_k(t)\| &\leq \sum_{i=1}^{n-k} \|f(y_{i-1}) - f(y_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \|f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, x_{k+i} - a_{k+i}, x_{k+i+1}, \dots, x_n)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-k} \|f\| \|a_1\| \dots \|a_{k-1}\| \|t\| \|x_{k+i} - a_{k+i}\| \|x_{k+1}\| \dots \|x_n\| \\ &\leq (n-k) \|f\| \|a\|^{k-1} (\|a\| + \varepsilon)^{n-k} \|x - a\| \|t\| \\ (5.2) \quad &\leq n (\|a\| + \varepsilon)^{n-1} \|f\| \|x - a\| \|t\| \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\|g_k(t)\| \leq n(\|a\| + \varepsilon)^{n-1} \|f\| \|x - a\|. \quad (5.3)$$

Considerăm aplicația $T : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ definită prin

$$T(z) = \sum_{k=1}^n f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$$

pentru orice $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, precum și punctele

$$\begin{aligned} v_0 &= x \\ v_k &= (a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \text{ pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} & \|f(x) - f(a) - T(x - a)\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n (f(v_{k-1}) - f(v_k)) - T(x - a) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|f(v_{k-1}) - f(v_k) - f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)\| \\ &= \sum_{k=1}^n \|g_k(x_k) - g_k(a_k)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|g_k\| \|x_k - a_k\| \\ &\stackrel{(5.3)}{\leq} n(\|a\| + \varepsilon)^{n-1} \|f\| \|x - a\|^2 \end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Ca urmare, ținând cont și de faptul că aplicația T este liniară și continuă, rezultă că f este diferențiabilă în a și

$$df_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(x) = \sum_{k=1}^n f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n).$$

■

Corolarul 5.6.3 Fie $E, E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n+2$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o mulțime deschisă, $a \in E$ și funcția $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : A \rightarrow E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ diferențiabilă în a . Atunci orice $f \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$, funcția $T = f \circ g$ este diferențiabilă în a și pentru orice $x \in E$ avem

$$dT_a(x) = \sum_{k=1}^n f(g_1(a), g_2(a), \dots, g_{k-1}(a), dg_{k,a}(x), g_{k+1}(a), g_{k+2}(a), \dots, g_n(a)).$$

Demonstrație. Deoarece $T = f \circ g$ rezultă că T este diferențiabilă în a pentru orice $x \in E$ avem

$$\begin{aligned} dT_a(x) &= df_{g(a)} \circ dg_a(x) \\ &= \sum_{k=1}^n f(g_1(a), g_2(a), \dots, g_{k-1}(a), dg_{k,a}(x), g_{k+1}(a), g_{k+2}(a), \dots, g_n(a)). \end{aligned}$$

■

Propoziția 5.6.4 Fie $E, E_1, E_2, \dots, E_n, F$ $n+2$ spații normate peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o mulțime deschisă, $a \in E$ și funcția $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : A \rightarrow E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ diferențiabilă în a . Fie $f : A \rightarrow L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ diferențiabilă în a și $T : A \rightarrow F$ definită prin

$$T(x) = f(x)(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$$

pentru orice $x \in A$. Atunci T este diferențiabilă în a și pentru orice $x \in E$ avem

$$\begin{aligned} dT_a(x) &= df_a(x)(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)) + \\ &\sum_{k=1}^n f(a)(g_1(a), g_2(a), \dots, g_{k-1}(a), dg_{k,a}(x), g_{k+1}(a), g_{k+2}(a), \dots, g_n(a)). \end{aligned}$$

Demonstrație. Considerăm aplicația multiliniară (de evaluare)

$$h : L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F) \times E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

definită prin

$$h(S, x_1, x_2, \dots, x_n) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pentru orice $S \in L_n(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ și $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.
Aplicația h este continuă fiindcă

$$\begin{aligned} \|h(S, x_1, x_2, \dots, x_n)\| &= \|S(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \\ &\leq \|S\| \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|. \end{aligned}$$

Se observă că $T = h \circ (f, g_1, g_2, \dots, g_n)$ și ca urmare T este diferențiabilă în a pentru orice $x \in E$ avem

$$\begin{aligned} dT_a(x) &= dh_{(f, g_1, g_2, \dots, g_n)(a)} \circ d(f, g_1, g_2, \dots, g_n)_a(x) \\ &= \sum_{k=1}^n h(df_a(x), g_1(a), \dots, g_n(a)) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n h(f(a), g_1(a), \dots, g_{k-1}(a), dg_{k,a}(x), g_{k+1}(a), \dots, g_n(a)) . \\ &= df_a(x)(g_1(a), \dots, g_n(a)) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n f(a)(g_1(a), \dots, g_{k-1}(a), dg_{k,a}(x), g_{k+1}(a), \dots, g_n(a)) . \end{aligned}$$

■

Propoziția 5.6.5 *Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Dacă $f, g \in L_n(E; F)$ sunt două aplicații n -liniare continue simetrice cu proprietatea că*

$$f(x, x, \dots, x) = g(x, x, \dots, x)$$

pentru orice $x \in E$. Atunci $f = g$.

Demonstrație. Demonstrăm afirmația prin inducție după $n \geq 2$. Pentru $n = 2$, deoarece f și g sunt 2-liniare și simetrice avem

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} (f(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - f(x_1, x_1) - f(x_2, x_2)) \\ g(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} (g(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - g(x_1, x_1) - g(x_2, x_2)) \end{aligned}$$

de unde rezultă $f = g$. Presupunem afirmația adevărată pentru n , și considerăm două aplicații $n + 1$ -liniare continue simetrice cu proprietatea că

$$f(x, x, \dots, x) = g(x, x, \dots, x)$$

Analiză Matematică - curs 9

pentru orice $x \in E$. Pentru orice $x \in E$ definim funcțiile $f_x, g_x : E \times E \dots \times E \rightarrow F$ prin

$$\begin{aligned}f_x(y_1, y_2, \dots, y_n) &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\g_x(y_1, y_2, \dots, y_n) &= g(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

pentru orice $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E \times E \dots \times E \rightarrow F$. Atunci f_x, g_x sunt n -liniare, continue și simetrice. Funcția $T : A \rightarrow F$ definită prin

$$T(y) = f(y, y, \dots, y) = g(y, y, \dots, y)$$

pentru orice $y \in A$, este diferențiabilă în orice $a \in A$. Pentru orice $x \in E$ avem pe de o parte

$$\begin{aligned}dT_a(x) &= \sum_{k=1}^n f(a, a, \dots, a, x, a, a, \dots, a) \\&= \sum_{k=1}^n f(x, a, a, \dots, a) \\&= n f_x(a, a, \dots, a)\end{aligned}$$

și pe de altă parte

$$\begin{aligned}dT_a(x) &= \sum_{k=1}^n g(a, a, \dots, a, x, a, a, \dots, a) \\&= \sum_{k=1}^n g(x, a, a, \dots, a) \\&= n g_x(a, a, \dots, a).\end{aligned}$$

Ca urmare avem

$$f_x(a, a, \dots, a) = g_x(a, a, \dots, a)$$

pentru orice $a \in A$. Aplicând ipoteza de inducție rezultă $f_x = g_x$. Așadar

$$\begin{aligned}f_x(y_1, y_2, \dots, y_n) &= g_x(y_1, y_2, \dots, y_n) \\f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= g(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

pentru orice $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in E$. În consecință, $f = g$. ■

Definiția 5.6.6 Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$).

O aplicație $\varphi : E \rightarrow F$ se numește:

- polinom omogen de grad n ($n \geq 1$) $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există $f \in L_n(E; F)$ o aplicație n -liniară continuă simetrică astfel încât pentru orice $x \in E$

$$\varphi(x) = f(x, x, \dots, x).$$

(φ se numește polinomul omogen asociat lui f).

- polinom $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ φ se poate scrie ca sumă a unui număr finit de polinoame omogene.

Din propoziția 5.6.5, rezultă că există o corespondență bijectivă între mulțimea aplicațiilor n -liniare continue simetrice $f : E \times E \times \dots \times E \rightarrow F$ și mulțimea polinoamelor omogene de grad n $\varphi : E \rightarrow F$.

5.6.3 Diferențiabilitatea de ordin superior

Definiția 5.6.7 Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow F$ o funcție diferențiabilă pe o vecinătate deschisă $V_a \subset A$ a lui a . Se spune că f este de două ori diferențiabilă în a dacă $df : V_a \rightarrow L(E, F)$ este diferențiabilă în a . În acest caz se notează $d^2 f_a = d(df)_a$ și se numește diferențială de ordinul 2 a lui f în a . Dacă

$$A_{2,f} = \{a \in A : f : A \rightarrow F \text{ este de două ori diferențiabilă în } a\},$$

se notează cu $d^2 f$ funcția $d^2 f : A_{2,f} \rightarrow L(E, L(E, F))$ care asociază fiecărui element $a \in A_{2,f}$ diferențiala de ordinul 2 a funcției f în a , adică funcția definită prin $d^2 f(a) = d^2 f_a$ pentru orice $a \in A_{2,f}$. Funcția $d^2 f$ este numită diferențiala de ordinul 2 a funcției f . Mai general, prin recursivitate se definește diferențiala de ordinul n a funcției f , notată $d^n f$, ca fiind diferențiala diferențialei de ordinul $n - 1$ a lui f :

$$d^n f = d(d^{n-1} f), \quad n \geq 2.$$

Se notează $d^0 f = f$.

Ținând cont că $L(E, L(E, F)) \approx L_2(E; F)$ (identificarea (5.1)), $d^2 f_a$ poate fi privită ca o aplicație biliniară. Mai departe,

$$d^3 f_a \in L(E, L(E, L(E, F))) \approx L(E, L_2(E; F)) \approx L_3(E; F).$$

Mai general, presupunând că funcția f este de $n - 1$ ori diferențiabilă pe o vecinătate deschisă V a punctului a și că este de n -ori diferențiabilă în a , atunci

$$d^n f_a \in L(E, L_{n-1}(E; F)) \approx L_n(E; F).$$

Astfel pentru orice $n \geq 2$, diferențiala de ordinul n a funcției f într-un punct a va fi identificată cu o aplicație n -liniară.

Teorema 5.6.8 (Criteriul lui Young de comutativitate) *Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow F$ o funcție de n -ori diferențiabilă în a . Atunci $d^n f_a$ este o aplicație n -liniară simetrică.*

Demonstrație. [N. Boboc, *Curs de analiză reală și complexă/Diferențiabilitate* (2), p. 21, Universitatea din București, 1974] ■

Definiția 5.6.9 *Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow F$ o funcție de n -ori diferențiabilă în a . Se numește polinomul Taylor de ordinul n asociat funcției f în a , funcția notată $T_n(f, a)$ și definită prin*

$$\begin{aligned} T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df_a(x - a) + \frac{1}{2!} d^2 f_a(x - a, x - a) + \dots \\ + \frac{1}{n!} d^n f_a(x - a, x - a, \dots, x - a), \quad x \in E. \end{aligned}$$

Teorema 5.6.10 (Formula Taylor) *Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $A \subset E$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow F$ o funcție de n -ori diferențiabilă în a . Atunci există o funcție $R_n(f, a) : A \rightarrow F$, numită restul de ordinul n , astfel încât pentru orice $x \in A$*

$$f(x) = T_n(f, a)(x) + R_n(f, a)(x),$$

și

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^n} R_n(f, a)(x) = 0.$$

Demonstrație. Pentru orice $x \in A$, definim

$$R_n(f, a)(x) = f(x) - T_n(f, a)(x).$$

Demonstrăm prin inducție după n că

$$P(n) : \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^n} (f(x) - T_n(f, a)(x)) = 0$$

pentru orice funcție f de n -ori diferențiabilă în a .

este adevărată pentru orice $n \geq 1$. Pasul de verificare:

$$P(1) : \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|} (f(x) - T_1(f, a)(x)) = 0$$

pentru orice funcție f diferențiabilă în a .

Deoarece pentru orice f este diferențiabilă în a , avem

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|} (f(x) - T_1(f, a)(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|} \left(f(x) - \left(f(a) + \frac{1}{1!} df_a(x - a) \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|} (f(x) - f(a) - df_a(x - a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Demonstrăm $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Fie $\varepsilon > 0$ și f o funcție de $n+1$ ori diferențiabilă în a . Atunci df este de n -ori diferențiabilă în a și ca urmare din ipoteza de inducție $P(n)$ rezultă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^n} (df(x) - T_n(df, a)(x)) = 0.$$

Ca urmare există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(a, \delta_\varepsilon) \subset A$ avem

$$\|df(x) - T_n(df, a)(x)\| < \varepsilon \|x - a\|^n. \quad (5.4)$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \in B(a, \delta_\varepsilon)$, conform teoremei creșterilor finite, avem

$$\|f(x) - T_{n+1}(f, a)(x) - (f(a) - T_{n+1}(f, a)(a))\| \leq M|x - a|,$$

unde $M = \sup_{z \in I_x} \|df(z) - d(T_{n+1}(f, a))(z)\|$, iar

$$I_x = [a, x] = \{(1-t)a + tx : t \in [0, 1]\}.$$

Cum $T_{n+1}(f, a)(a) = a$, avem

$$\|f(x) - T_{n+1}(f, a)(x)\| \leq \sup_{z \in I_x} \|df(z) - d(T_{n+1}(f, a))(z)\| \|x - a\|$$

Dacă pentru $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ notăm p_k aplicația $p_k : E \rightarrow F$, definită prin

$$p_k(x) = \frac{1}{k!} d^k f_a(x - a, x - a, \dots, x - a) \text{ pentru orice } x \in E,$$

avem

$$\begin{aligned} dp_k(z)(t) &= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k d^k f_a(z - a, \dots, z - a, t, z - a, \dots, z - a) \\ &= \frac{k}{k!} d^k f_a(z - a, \dots, z - a, t) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1}(df)_a(z - a, \dots, z - a)(t) \end{aligned}$$

pentru orice $t \in E$, și deci $dp_k(z) = \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1}(df)_a(z - a, \dots, z - a)$. Ca urmare

$$\begin{aligned} d(T_{n+1}(f, a))(z) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1}(df)_a(z - a, \dots, z - a) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} d^k(df)_a(z - a, \dots, z - a) \\ &= T_n(df, a)(z). \end{aligned}$$

În consecință

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - T_{n+1}(f, a)(y)\|}{\|x - a\|^{n+1}} &\leq \frac{1}{\|x - a\|^n} \sup_{z \in I_y} \|df(z) - T_n(df, a)(z)\| \\ &\stackrel{(5.4)}{<} \frac{1}{\|x - a\|^n} \varepsilon \|x - a\|^n \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^{n+1}} (f(x) - T_{n+1}(f, a)(x)) = 0$$

și deci $P(n+1)$ este adevărată. ■

5.7 Derivate parțiale de ordin superior

Definiția 5.7.1 (Derivate parțiale de ordin superior) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o funcție derivabilă parțial în raport cu variabila x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) în fiecare punct dintr-o vecinătate V_a a punctului a . Funcția f se numește derivabilă parțial de ordinul doi în raport cu perechea de variabile (x_i, x_j) ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) în punctul a $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este derivabilă parțial în a în raport cu variabila x_j . În acest caz derivata parțială a funcției $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în a în raport cu variabila x_j (adică $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$) se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a)$ și se numește derivată parțială de ordinul doi a lui f în raport cu perechea de variabile (x_i, x_j) în punctul a . În cazul $i = j$ se utilizează notația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (a).$$

Dacă $A_{f,i,j}$ este mulțimea punctelor $a \in A$ în care $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial de ordinul doi în raport cu perechea de variabile (x_i, x_j) , atunci se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ funcția $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A_{f,i,j} \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui element $a \in A_{f,i,j}$ derivata parțială de ordinul doi a lui f în raport cu perechea de variabile (x_i, x_j) în punctul a , adică funcția

$$a \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a) [: A_{f,i,j} \rightarrow \mathbb{R}]$$

(numită derivata parțială de ordinul doi în raport cu perechea de variabile (x_i, x_j) a funcției f).

Derivatele parțiale de ordin p ($p \geq 2$) se definesc inductiv. Pentru orice $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \{1, 2, \dots, n\}^p$ definim

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_p}} \right) (a)$$

și numim $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a)$ derivata parțială de ordinul p a funcției f în raport cu sistemul de variabilele $(x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1})$ în punctul a .

Dacă V este mulțimea punctelor a în care f are derivate parțiale de ordinul p în raport cu orice sistem de variabile $(x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1})$, atunci se obțin n^p aplicații

$$a \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) [: V \rightarrow \mathbb{R}]$$

numite *derivatele parțiale de ordinul p ale funcției f* .

Exemple 5.7.2 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale următoarelor funcții:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x \cos(y))$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos(x \cos(y)) (x \cos(y))'_x = \cos(x \cos(y)) \cos(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \cos(x \cos(y)) (x \cos(y))'_y = -\cos(x \cos(y)) x \sin(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = -\cos(y) \sin(x \cos(y)) (x \cos(y))'_x \\ &= -\cos^2(y) \sin(x \cos(y)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) \\ &= -x \left((\cos(x \cos(y)))'_y \sin(y) + \cos(x \cos(y)) \cos(y) \right) \\ &= -x (\sin(x \cos(y)) x \sin^2(y) + \cos(x \cos(y)) \cos(y)) \\ &= -x^2 \sin^2(y) \sin(x \cos(y)) - \cos(y) \cos(x \cos(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) \\ &= -\sin(y) (\cos(x \cos(y)))'_x x + \cos(x \cos(y)) \\ &= -\sin(y) (-\sin(x \cos(y)) \cos(y) x + \cos(x \cos(y))) \\ &= x \sin(x \cos(y)) \sin(y) \cos(y) - \sin(y) \cos(x \cos(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) \\
 &= (\cos(x \cos(y)))'_y \cos(y) - \cos(x \cos(y)) \sin(y) \\
 &= -\sin(x \cos(y)) x (-\sin(y)) - \cos(x \cos(y)) \sin(y) \\
 &= x \sin(x \cos(y)) \sin(y) - \sin(y) \cos(x \cos(y))
 \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{x+2yz} \cos(z)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 Avem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \cos(z) (e^{x+2yz})'_x = \cos(z) e^{x+2yz} (x + 2yz)'_x \\
 &= \cos(z) e^{x+2yz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \cos(z) (e^{x+2yz})'_y = \cos(z) e^{x+2yz} (x + 2yz)'_y \\
 &= 2z \cos(z) e^{x+2yz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (e^{x+2yz})'_z \cos(z) + e^{x+2yz} (-\sin(z)) \\
 &= e^{x+2yz} (x + 2yz)'_z \cos(z) - \sin(z) e^{x+2yz} \\
 &= 2y \cos(z) e^{x+2yz} - \sin(z) e^{x+2yz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y, z) = \cos(z) (e^{x+2yz})'_x \\
 &= \cos(z) e^{x+2yz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y, z) = 2z \cos(z) (e^{x+2yz})'_y \\
 &= 4z^2 \cos(z) e^{x+2yz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)(x, y, z) \\
 &= -2y \sin(z) e^{x+2yz} + 4y^2 \cos(z) e^{x+2yz} - \\
 &\quad \cos(z) e^{x+2yz} - 2y \sin(z) e^{x+2yz} \\
 &= -4y \sin(z) e^{x+2yz} + 4y^2 \cos(z) e^{x+2yz} - \cos(z) e^{x+2yz}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y, z) = 2z \cos(z) (e^{x+2yz})'_x \\ &= 2z \cos(z) e^{x+2yz} (x + 2yz)'_x \\ &= 2z \cos(z) e^{x+2yz}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y, z) = 2z \cos(z) e^{x+2yz}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) (x, y, z) \\ &= 2y \cos(z) (e^{x+2yz})'_x - \sin(z) (e^{x+2yz})'_x \\ &= 2y \cos(z) e^{x+2yz} - \sin(z) e^{x+2yz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y, z) \\ &= 2y \cos(z) e^{x+2yz} - \sin(z) e^{x+2yz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) (x, y, z) \\ &= 2 \cos(z) e^{x+2yz} + 2y \cos(z) (e^{x+2yz})'_y - \sin(z) (e^{x+2yz})'_y \\ &= 2 \cos(z) e^{x+2yz} + 4yz \cos(z) e^{x+2yz} - 2z \sin(z) e^{x+2yz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y, z) \\ &= 2 \cos(z) e^{x+2yz} + 4yz \cos(z) e^{x+2yz} - 2z \sin(z) e^{x+2yz}\end{aligned}$$

Teorema 5.7.3 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă, $a \in A$ și

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

o funcție de p -ori diferentțiabilă în a . Atunci f admite derivate parțiale de ordinul p în a în raport cu orice sistem de variabile $(x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1})$ și

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) = d^p f_a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$$

unde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție după p . Pentru $p = 1$ rezultatul este adevărat conform teoremei 5.5.4. Presupunem că orice funcție g de p -ori diferențiabilă în a admite derivate parțiale de ordinul p în raport cu orice sistem de variabile $(x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1})$ și

$$\frac{\partial^p g}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) = d^p g_a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$$

și considerăm o funcție f de $p + 1$ ori diferențiabilă în a și un sistem de indici $(i_1, i_2, \dots, i_{p+1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{p+1}$. Atunci f este de p -ori diferențiabilă în orice punct dintr-o vecinătate deschisă $V_a \subset A$ a lui a . Din ipoteza de inducție rezultă că pentru orice $x \in V_a$ avem

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_{p+1}}}(x) = d^p f_x(e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{p+1}}) \quad (5.5)$$

Fie $h : V_a \rightarrow R$ definită prin

$$x \mapsto d^p f_x(e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{p+1}})$$

pentru orice $x \in V_a$. Conform propoziție 5.6.4, h este diferențiabilă în a (deoarece $d^p f$ este diferențiabilă în a) și pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} dh_a(x) &= d(d^p f)_a(x)(e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{p+1}}) \\ &\stackrel{(5.1)}{=} d^{p+1} f_a(x, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{p+1}}) \end{aligned}$$

În particular,

$$dh_a(e_{i_1}) = d^{p+1} f_a(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{p+1}}).$$

și deoarece $\frac{\partial h}{\partial x_{i_1}}(a) = dh_a(e_{i_1})$ (conform teoremei 5.5.4), rezultă

$$\frac{\partial h}{\partial x_{i_1}}(a) = d^{p+1} f_a(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \dots, e_{i_{p+1}}). \quad (5.6)$$

Pe de altă parte din (5.5) pentru orice $x \in V_a$

$$h(x) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_{p+1}}}(x)$$

și deci

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_{i_1}}(a) &= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_{p+1}}} \right) (a) \\ &= \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_{p+1}}} (a).\end{aligned}$$

În consecință, ținând cont și de (5.6), rezultă

$$\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_{p+1}}} (a) = d^p f_a (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p+1}}).$$

■

Teorema 5.7.4 (Formula de calcul a diferențialei de ordin p) Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ și

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

o funcție de p -ori diferențiabilă în a . Atunci f admite derivate parțiale de ordinul p în a și pentru orice $(x^1, x^2, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ ($x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \in \mathbb{R}^n$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$) avem

$$d^p f_a (x^1, x^2, \dots, x^p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (a) x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \dots x_{i_p}^p$$

unde $I_p = \{1, 2, \dots, n\}^p$.

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^n$. Conform teoremei anterioare f admite derivate parțiale de ordinul p în a în raport cu orice sistem de variabile $(x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1})$ și

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (a) = d^p f_a (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}).$$

Pe de altă parte pentru orice $(x^1, x^2, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned}d^p f_a (x^1, x^2, \dots, x^p) &= d^p f_a \left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1}^1 e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2}^2 e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n x_{i_p}^p e_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \dots x_{i_p}^p d^p f_a (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I_p} x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \dots x_{i_p}^p \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (a)\end{aligned}$$

■

Observația 5.7.5 Fie A o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ și $a \in A$. Dacă o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivate parțiale de ordin p ($p > 1$) în orice punct dintr-o vecinătate V_a a lui a și dacă toate derivatele parțiale de ordin p

$$x \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(x)$$

sunt continue în a , atunci și derivatele parțiale de ordin $p-1$ sunt continue în a .

Teorema 5.7.6 (Criteriu de diferențiabilitate de ordin p) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă și $a \in A$. Dacă funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

are proprietatea că admite derivate parțiale de ordin p în orice punct dintr-o vecinătate V_a a punctului a și dacă derivatele parțiale de ordin p

$$x \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(x)$$

sunt continue în a pentru orice $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \{1, 2, \dots, n\}^p$, atunci funcția f este de p -ori diferențiabilă în a .

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție după p . Pentru $p = 1$ rezultatul este adevărat conform teoremei 5.5.5. Presupunem că orice funcție g care admite derivate parțiale de ordin p în orice punct dintr-o vecinătate V_a continue în a , este de p -ori diferențiabilă în a . Considerăm o funcție f care admite derivate parțiale de ordin $p+1$ în orice punct dintr-o vecinătate V_a a lui a , continue în a . Atunci f admite în particular derivate parțiale de ordin p , continue în a . Conform ipotezei de inducție, f este de p -ori diferențiabilă în a . Fie $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \{1, 2, \dots, n\}^p$ și funcția $h : V_a \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$x \xrightarrow{h} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(x)$$

pentru orice $x \in V_a$. Funcția h admite derivate parțiale de ordinul 1:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} \right) = \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_j \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}$$

continue în a pentru orice j . Conform teoremei 5.5.5 funcția h este diferențiabilă în a . Ca urmare, dacă notăm cu $p_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ funcția $p_{i_1, i_2, \dots, i_p} : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_p} (y^1, y^2, \dots, y^p) = y_{i_1}^1 y_{i_2}^2 \dots y_{i_p}^p$$

pentru orice $(y^1, y^2, \dots, y^p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ ($y^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i) \in \mathbb{R}^n$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$), atunci funcția

$$x \mapsto h(x) p_{i_1, i_2, \dots, i_p} [: U_a \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})]$$

este diferențiabilă în a . În consecință,

$$x \mapsto d^p f_x = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (x) p_{i_1, i_2, \dots, i_p}$$

este diferențiabilă în a . Așadar f este de $p+1$ ori diferențiabilă în a . ■

Definiția 5.7.7 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește de clasă C^0 pe A (și se scrie $f \in C^0(A)$) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f este continuă pe A . Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește de clasă C^p ($p \geq 1$) pe A (și se scrie $f \in C^p(A)$) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f admite derivate parțiale de ordin p în orice punct $a \in A$ și toate derivatele parțiale de ordin p

$$x \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (x)$$

sunt continue pe A

Se notează cu

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

Funcțiile din $C^\infty(A)$ se numesc funcții indefinit derivabile pe A .

Funcția $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ se numește de clasă C^p pe A ($p \geq 0$) (și se scrie $g \in C^p(A)$) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ toate componentele ei $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, sunt de clasă C^p pe A .

Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe A , atunci f este diferențiabilă pe A și, ținând cont că pentru orice $a, b \in A$ și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned} |df_a(x) - df_b(x)| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \right| |x_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \right| \|x\|_1, \end{aligned}$$

rezultă că $df : A \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este continuă. Reciproc dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă și $df : A \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este continuă, atunci f este de clasă C^1 pe A (deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i)$). Astfel putem defini funcțiile de clasă C^p într-un context mai general.

Definiția 5.7.8 Fie E și F două spații normate peste același corp K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$) și $A \subset E$ o mulțime deschisă. Funcția $f : A \rightarrow F$ se numește de clasă C^0 pe A (și se scrie $f \in C^0(A)$) $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ f este continuă pe A . Funcția $f : A \rightarrow F$ se numește de clasă C^p ($p \geq 1$) pe A (și se scrie $f \in C^p(A)$) $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ f este de p -ori diferențiabilă pe A și

$$d^p f : A \rightarrow L_p(E; F)$$

este continuă.

Teorema 5.7.9 (Criteriul lui Schwarz de comutativitate) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o submulțime deschisă și $a \in A$. Dacă funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

are proprietatea că admite derivate parțiale de ordin p în orice punct dintr-o vecinătate V_a a punctului a și dacă derivatele parțiale de ordin p

$$x \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(x)$$

sunt continue în a pentru orice $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \{1, 2, \dots, n\}^p$, atunci pentru orice permutare

$$\sigma : \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$$

avem

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \partial x_{i_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(p)}}}(a).$$

Demonstrație. Conform teoremei 5.7.6, funcția f este de p -ori diferențiabilă în a . Aplicând criteriul lui Young de comutativitate rezultă că $d^p f_a$ este o aplicație p -liniară simetrică. Ca urmare, dacă $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$, atunci pentru orice $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \{1, 2, \dots, n\}^p$ și orice permutare

$$\sigma : \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$$

avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) &= d^p f_a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \\ &= d^p f_a(e_{i_{\sigma(1)}}, e_{i_{\sigma(2)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}) \\ &= \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \partial x_{i_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(p)}}}(a). \end{aligned}$$

■

În particular, în cazul $p = 2$, criteriul lui Schwarz de comutativitate implică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$

pentru orice funcție f care are derivate parțiale de ordinul 2 continue în a . Cu alte cuvinte pentru o astfel de funcție nu contează ordinea de derivare.

Definiția 5.7.10 Fie $n > 1$ un număr natural. Se numește *multi-indice n -dimesional un sistem ordonat (tuplu) $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Pentru orice multi-indice $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ se numește ordinul lui a , și notează cu $|\alpha|$ suma*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

este o funcție de clasă C^p pe A atunci pentru orice $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se notează cu

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

funcția obținută derivând (parțial) succesiv pe f de α_n ori în raport cu x_n , de α_{n-1} ori în raport cu x_{n-1} , ..., de α_1 ori în raport cu x_1 , unde dacă $\alpha_k = 0$ nu se efectuează nici o derivare.

Folosind această notație pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned} d^p f_a(x, x, \dots, x) &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} \\ &= \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

(suma se face după toți multi-indicii $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ cu $|\alpha| = p$). Dacă identificăm aplicația p -liniară continuă simetrică $d^p f_a$ cu polinomul omogen asociat

$$x \mapsto d^p f_a(x, x, \dots, x),$$

și dacă notăm $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ proiecția pe componenta i , atunci

$$d^p f_a = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a) dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n}.$$

În cazul $p = 2$ obținem

$$d^2 f_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) dx_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$$

În particular, în cazul $n = 2$, scriind (x, y) în loc de (x_1, x_2) obținem

$$d^2 f_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) dy^2,$$

iar în cazul $n = 3$, scriind (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3) obținem

$$\begin{aligned} d^2 f_a &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) dz^2 + \\ &\quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) dy dz. \end{aligned}$$

Exemple 5.7.11 Să se calculeze diferențialele de ordinul 1 și 2 ale următoarelor funcții în punctul a :

1. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x \ln(y)$ pentru orice (x, y) , $a = (0, e)$.

R: Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \ln(y)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \frac{1}{y}$. Derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ fiind funcții continue, f este diferențiabilă și

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, e) &= e^x \ln(y)|_{(x,y)=(0,e)} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, e) &= e^x \frac{1}{y} \Big|_{(x,y)=(0,e)} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

avem $df_{(0,e)} = dx + \frac{1}{e} dy$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = e^x \ln(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = -e^x \frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = e^x \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ fiind funcții continue, f este de 2 ori diferențiabilă și

$$d^2 f_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) dy^2.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, e) &= e^x \ln(y)|_{(x,y)=(0,e)} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, e) &= -e^x \frac{1}{y^2} \Big|_{(x,y)=(0,e)} = -\frac{1}{e^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, e) &= e^x \frac{1}{y} \Big|_{(x,y)=(0,e)} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\text{avem } d^2 f_{(0,e)} = dx^2 + \frac{2}{e} dx dy - \frac{1}{e^2} dy^2.$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 y^2 \cos(z)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $a = (1, -2, \frac{\pi}{3})$.

R: Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 y^2 \cos(z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x^3 y \cos(z)$ și $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -x^3 y^2 \sin(z)$. Derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial f}{\partial z}$ fiind funcții continue, f este diferențiabilă și

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a) dz$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= 3x^2 y^2 \cos(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = 6 \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= 2x^3 y \cos(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = -2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}\left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= -x^3 y^2 \sin(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{avem } df_{(1,-2,\frac{\pi}{3})} = 6dx - 2dy - 2\sqrt{3}dz.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y, z) = 6xy^2 \cos(z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y, z) = 2x^3 \cos(z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) (x, y, z) = -x^3 y^2 \cos(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y, z) = 6x^2 y \cos(z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) (x, y, z) = -3x^2 y^2 \sin(z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) (x, y, z) = -2x^3 y \sin(z) \end{aligned}$$

Analiză Matematică - curs 9

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ fiind funcții continue, f este de 2 ori diferențiabilă și

$$\begin{aligned} d^2 f_a &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) dz^2 + \\ & 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) dy dz. \end{aligned}$$

Fiindcă

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= 6xy^2 \cos(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= 2x^3 \cos(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= -x^3 y^2 \cos(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= 6x^2 y \cos(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = -6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= -3x^2 y^2 \sin(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = -6\sqrt{3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \left(1, -2, \frac{\pi}{3}\right) &= -2x^3 y \sin(z) \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,\frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{avem } d^2 f_{(1,-2,\frac{\pi}{3})} = 12dx^2 - dy^2 + 2dy^2 - 12dxdy - 12\sqrt{3}dxdz + 4\sqrt{3}dydz.$$

Index

aplicație multiliniară
simetrică, [4](#)

derivată parțială de ordin superior,
[15](#)

diferențială de ordin superior, [10](#)

formula Taylor, [11](#)

funcție

de clasă C^0 , [21](#)

de clasă C^p ($p \geq 1$), [21](#)

diferențială de ordin superior, [10](#)

indefinit derivabilă, [21](#)

multiliniară simetrică, [4](#)

multi-indice, [23](#)

ordinul unui multi-indice, [23](#)

polinom omogen, [10](#)

polinom Taylor, [11](#)

restul în formula Taylor, [11](#)