

Analiză Matematică - Curs 10

Mădălina Roxana Buneci

Cuprins

5	Calcul diferențial (continuare din cursul 9)	3
5.8	Extreme libere	3
5.9	Extreme condiționate	22
5.10	Funcții implicite	29
5.10.1	Teorema funcțiilor implicite	30
	Index	40

Capitolul 5

Calcul diferențial (continuare din cursul 9)

5.8 Extreme libere

Reamintim (din cursul 6) definiția punctelor de extrem:

Definiția 5.8.1 Fie $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ o funcție și $a \in A$. Punctul a se numește:

- punct de minim (global) pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in A$;
- punct de maxim (global) pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in A$;
- punct de extrem (global) pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a$ este punct de minim (global) sau de maxim (global).

Dacă în plus, A este o submulțime a unui spațiu topologic, punctul a se numește

- punct de minim local pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in A \cap V$;
- punct de maxim local pentru $f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in A \cap V$;

- punct de extrem local pentru $f \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ a este punct de minim local sau de maxim local.

Definiția 5.8.2 Fie E un spațiu normat real. Aplicația $2p$ -liniară simetrică $f : E \times E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ se numește :

- pozitivă (sau pozitiv semidefinită) și se scrie $f \geq 0 \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ pentru orice $x \in E$

$$f(x, x, \dots, x) \geq 0.$$

- negativă (sau negativ semidefinită) și se scrie $f \leq 0 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} -f$ este pozitivă $\Leftrightarrow$ pentru orice $x \in E$

$$f(x, x, \dots, x) \leq 0.$$

- strict pozitivă (sau pozitiv definită) și se scrie $f > 0 \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$

$$f(x, x, \dots, x) \geq \alpha \|x\|^{2p}.$$

- strict negativă (sau negativ definită) și se scrie $f < 0 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} -f$ este strict pozitivă $\Leftrightarrow$ există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$

$$f(x, x, \dots, x) \leq -\alpha \|x\|^{2p}.$$

- nedefinită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există $x, y \in E$, $x \neq 0, y \neq 0$ astfel încât

$$f(x, x, \dots, x) > 0 \text{ și } f(y, y, \dots, y) < 0.$$

Dacă $E = \mathbb{R}$, atunci

$$f(x, x, \dots, x) = x^{2p} f(1, 1, \dots, 1)$$

și ca urmare în acest caz $f \geq 0$ (respectiv, $f \leq 0$, $f > 0$, $f < 0$) $\Leftrightarrow f(1, 1, \dots, 1) \geq 0$ (respectiv, $f(1, 1, \dots, 1) \leq 0$, $f(1, 1, \dots, 1) > 0$, $f(1, 1, \dots, 1) < 0$).

Dacă E este spațiu liniar finit dimensional atunci o aplicație $2p$ -liniară simetrică $f : E \times E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow$ pentru orice $x \in E$, $x \neq 0$

$$f(x, x, \dots, x) > 0.$$

Într-adevăr, în cazul finit dimensional orice aplicație multiliniară este continuă. Fie

$$S(0, 1) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

Mulțimea $S(0, 1)$ fiind o submulțime închisă și mărginită a spațiului normat finit dimensional E , este compactă. Funcția f fiind continuă, rezultă că $f|_{S(0,1)}$ își atinge extremele pe mulțimea compactă $S(0, 1)$. Așadar există $u \in S(0, 1)$ astfel încât pentru orice $v \in S(0, 1)$ avem

$$f(u, u, \dots, u) \leq f(v, v, \dots, v).$$

Notăm $\alpha = f(u, u, \dots, u)$ și observăm că dacă $x \in E$, $x \neq 0$, atunci $\frac{1}{\|x\|}x \in S(0, 1)$ și în consecință

$$\begin{aligned} \alpha &\leq f\left(\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|x\|}x, \dots, \frac{1}{\|x\|}x\right) \\ \alpha &\leq \frac{1}{\|x\|^{2p}} f(x, x, \dots, x) \\ \alpha \|x\|^{2p} &\leq f(x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

În cazul $p = 1$, aplicația $2p$ -liniară (biliniară) $f \geq 0$, respectiv, $f \leq 0$, $f > 0$, $f < 0$, nedefinită $\Leftrightarrow$ forma pătratică (polinomul omogen de grad 2) asociată $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = f(x, x)$ este pozitiv semidefinită ($Q(x) \geq 0$ pentru orice $x \in E$), respectiv Q este negativ semidefinită ($Q(x) \leq 0$ pentru orice $x \in E$), Q este pozitiv definită ($Q(x) > 0$ pentru orice $x \in E \setminus \{0\}$), Q este negativ definită ($Q(x) < 0$ pentru orice $x \in E \setminus \{0\}$), Q este nedefinită (există $x, y \in E \setminus \{0\}$ astfel încât $Q(x) > 0$ și $Q(y) < 0$).

Dacă se fixează o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ pe spațiul finit dimensional E , atunci oricărei aplicații $2p$ -liniară (biliniară) $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ i se poate asocia o matrice $A_f = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$:

$$a_{ij} = f(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Pentru orice $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$ avem

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} \end{aligned}$$

sau sub formă matriceală

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Reciproc oricărei matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ i se poate asocia o aplicație biliniară $f_A : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f_A(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij}$$

pentru orice $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$. Aplicațiile

$$f \mapsto A_f [: L_2(E; \mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})] \text{ și } A \mapsto f_A [: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(E; \mathbb{R})]$$

sunt inverse una celeilalte. Așadar există o corespondență bijectivă între $L_2(E; \mathbb{R})$ și $M_{n,n}(\mathbb{R})$ (unde n este dimensiunea lui E). Aplicația biliniară $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă și numai dacă matricea asociată $A_f = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este simetrică, adică

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ pentru orice } 1 \leq i, j \leq n.$$

O matrice simetrică $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ se numește :

$\cdot$ pozitiv semidefinită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x A x^t \geq 0.$$

Analiză Matematică - curs 10

- negativ semidefinită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} -A$ este pozitiv semidefinită $\Leftrightarrow$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$xAx^t \leq 0.$$

- pozitiv definită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$xAx^t > 0.$$

- negativ definită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} -A$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$xAx^t < 0.$$

- nedefinită $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ există $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel încât

$$xAx^t > 0 \text{ și } xAx^t < 0$$

Aplicația bilinară simetrică $f \geq 0$ (respectiv, $f \leq 0$, $f > 0$, $f < 0$, nedefinită) $\Leftrightarrow$ matricea asociată $A_f = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este pozitiv semidefinită (respectiv A_f este negativ semidefinită, A_f este pozitiv definită, A_f este negativ definită, A_f este nedefinită).

Teorema 5.8.3 (Criteriul lui Sylvester) Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică cu proprietatea că minorii principali

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

sunt nenuli.

1. Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, atunci A este pozitiv definită.
2. Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, atunci A este negativ definită.
3. Dacă toți minorii principali sunt nenuli și nu respectă nici condiția de la punctul 1, nici pe cea de la 2, atunci A este nedefinită.

O altă caracterizare a faptului că o matrice este pozitiv/negativ definită poate fi dată în termeni de valori proprii (se numește valoare proprie a matricei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ o rădăcină a ecuației $\det(\lambda I_n - A) = 0$). Pentru orice matrice simetrică $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, toate cele n rădăcini ale ecuației $\det(\lambda I_n - A) = 0$ (adică valorile proprii ale lui A) sunt reale.

Teorema 5.8.4 *Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valorile proprii ale lui A .*

1. *Dacă $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, atunci A este pozitiv semidefinită.*
2. *Dacă $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$, atunci A este pozitiv definită.*
3. *Dacă $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$, atunci A este negativ semidefinită.*
4. *Dacă $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n > 0$, atunci A este negativ definită.*
5. *Dacă există $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\lambda_i > 0$ și $\lambda_j < 0$, atunci A este nedefinită.*

Observația 5.8.5 *Fie n un număr natural par și $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică. Dacă $\det(A) < 0$, atunci A este nedefinită. Într-adevăr, dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A , adică rădăcinile ecuației $\det(\lambda I_n - A) = 0$ echivalentă cu*

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A) = 0,$$

atunci $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(A) < 0$. Ca urmare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt toate nenule și nu pot avea toate același semn. Deci A este nedefinită.

Teorema 5.8.6 (Condiții necesare de minim) *Fie E un spațiu normat real, $A \subset E$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de p -ori diferențiabilă în a ($p \geq 1$) astfel încât*

$$df_a = 0, d^2f_a = 0, \dots, d^{p-1}f_a = 0 \text{ și } d^p f_a \neq 0.$$

Dacă a este punct de minim local pentru f , atunci

1. *p par*

2. $d^p f_a \geq 0$ (aplicația p -liniară simetrică $d^p f_a$ este pozitiv semidefinită).

Demonstrație. Deoarece a este punct de minim local pentru f , există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel încât pentru orice $x \in V$ să avem

$$f(a) \leq f(x).$$

Aplicând formula Taylor funcției f în punctul a , rezultă că există o funcție $R_p(f, a) : A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in A$

$$f(x) = T_p(f, a)(x) + R_p(f, a)(x),$$

și

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^p} R_p(f, a, x) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} T_p(f, a)(x) &= f(a) + \frac{1}{1!} df_a(x - a) + \dots + \frac{1}{p!} d^p f_a(x - a, x - a, \dots, x - a) \\ &= f(a) + \frac{1}{p!} d^p f_a(x - a, x - a, \dots, x - a). \end{aligned}$$

Presupunem prin absurd că p este impar. Fie $v_0 \in E$, astfel încât

$$d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) \neq 0.$$

Deoarece $d^p f_a(-v_0, -v_0, \dots, -v_0) = (-1)^p d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0)$, rezultă că, eventual înlocuind v_0 cu $-v_0$, putem presupune $d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) > 0$. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^p} R_p(f, a, x) = 0$$

există o vecinătate U_0 a lui a astfel încât $U_0 \subset V$ și pentru orice $x \in U_0$, $x \neq a$ să avem

$$\frac{1}{\|x - a\|^p} |R_p(f, a, x)| < \frac{1}{2p! \|v_0\|^p} d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) \quad (5.1)$$

Fie $r_0 > 0$ astfel încât pentru orice $t \in (-r_0, r_0)$ să avem

$$a + tv_0 \in U_0 \subset V \subset A.$$

Înlocuind în formula Taylor x cu $a + tv_0$ cu $t \in (-r_0, 0)$, obținem

$$\begin{aligned}
 & f(a + tv_0) - f(a) \\
 = & \frac{1}{p!} t^p d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) + R_p(f, a)(a + tv_0) \\
 \stackrel{(5.1)}{<} & \frac{1}{p!} t^p d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) + \|tv_0\|^p \frac{1}{2p! \|v_0\|} d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) \\
 = & \frac{t^p}{2p!} d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) \left(2 + \left(\frac{|t|}{t} \right)^p \right) \\
 = & \frac{t^p}{2p!} d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) \\
 < & 0,
 \end{aligned}$$

ceea ce contrazice $f(a + tv_0) \geq f(a)$. În consecință, p este par.

Presupunem prin absurd că există $v \in E$ astfel încât

$$d^p f_a(v, v, \dots, v) < 0.$$

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^p} R_p(f, a, x) = 0$$

există o vecinătate U_1 a lui a astfel încât $U_1 \subset V$ și pentru orice $x \in U_1$, $x \neq a$ să avem

$$\frac{1}{\|x - a\|^p} |R_p(f, a, x)| < -\frac{1}{2p! \|v\|} d^p f_a(v, v, \dots, v) \quad (5.2)$$

Fie $r > 0$ astfel încât pentru orice $t \in (-r, r)$ să avem

$$a + tv \in U_1 \subset V \subset A.$$

Înlocuind în formula Taylor x cu $a + tv$ cu $t \in (-r, r) \setminus \{0\}$, obținem

$$\begin{aligned}
 f(a + tv) - f(a) &= \frac{1}{p!} t^p d^p f_a(v, v, \dots, v) + R_p(f, a)(a + tv) \\
 &\stackrel{(5.2)}{<} \frac{1}{p!} t^p d^p f_a(v, v, \dots, v) - \|tv\|^p \frac{1}{2p! \|v\|} d^p f_a(v, v, \dots, v) \\
 &= \frac{t^p}{2p!} d^p f_a(v_0, v_0, \dots, v_0) \left(2 + \left(\frac{|t|}{t} \right)^p \right) \\
 &= \frac{3t^p}{2p!} d^p f_a(v, v, \dots, v) \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

ceea ce contrazice $f(a + tv) \geq f(a)$. Ca urmare $d^p f_a(v, v, \dots, v) \geq 0$ pentru orice $v \in E$. ■

Observația 5.8.7 Dacă $df_a = 0$, $d^2 f_a = 0$, ..., $d^{p-1} f_a = 0$ și există $v \in E$ astfel încât $d^p f_a(v, v, \dots, v) < 0$, atunci a nu este punct de minim local pentru f .

Teorema 5.8.8 (Condiții necesare de maxim) Fie E un spațiu normat real, $A \subset E$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de p -ori diferențiabilă în a ($p \geq 1$) astfel încât

$$df_a = 0, d^2 f_a = 0, \dots, d^{p-1} f_a = 0 \text{ și } d^p f_a \neq 0.$$

Dacă a este punct de maxim local pentru f , atunci

1. p par
2. $d^p f_a \leq 0$ (aplicația p -liniară simetrică $d^p f_a$ este negativ semidefinită).

Demonstrație. Se aplică teorema 5.8.6 funcției $-f$. ■

Observația 5.8.9 Dacă $df_a = 0$, $d^2 f_a = 0$, ..., $d^{p-1} f_a = 0$ și există $v \in E$ astfel încât $d^p f_a(v, v, \dots, v) > 0$, atunci a nu este punct de maxim local pentru f . Dacă în plus, există $u \in E$ astfel încât $d^p f_a(u, u, \dots, u) < 0$ ($d^p f$ este nedefinită), atunci a nu este punct de extrem local pentru f .

Teorema 5.8.10 (Condiții suficiente de extrem) Fie E un spațiu normat real, $A \subset E$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de p -ori diferențiabilă în a , $p > 1$ par astfel încât

$$df_a = 0, d^2f_a = 0, \dots, d^{p-1}f_a = 0 \text{ și } d^p f_a \neq 0.$$

1. Dacă $d^p f_a > 0$ (aplicația p -liniară simetrică $d^p f_a$ este pozitiv definită), atunci a este punct de minim local pentru f .
2. Dacă $d^p f_a < 0$ (aplicația p -liniară simetrică $d^p f_a$ este negativ definită), atunci a este punct de maxim local pentru f .

Demonstrație. Aplicând formula Taylor funcției f în punctul a , rezultă că există o funcție $R_p(f, a) : A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in A$

$$f(x) = T_p(f, a)(x) + R_p(f, a)(x),$$

și

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^p} R_p(f, a)(x) = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} T_p(f, a)(x) &= f(a) + \frac{1}{1!} df_a(x - a) + \dots + \frac{1}{p!} d^p f_a(x - a, x - a, \dots, x - a) \\ &= f(a) + \frac{1}{p!} d^p f_a(x - a, x - a, \dots, x - a). \end{aligned}$$

1. Dacă $d^p f_a > 0$, rezultă că există $\alpha > 0$ astfel încât

$$d^p f_a(x - a, x - a, \dots, x - a) \geq \alpha \|x - a\|^p \quad (5.3)$$

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\|x - a\|^p} R_p(f, a)(x) = 0$$

există o vecinătate V a lui a astfel încât $V \subset A$ și pentru orice $x \in V$, $x \neq a$ să avem

$$\frac{1}{\|x - a\|^p} |R_p(f, a)(x)| < \frac{\alpha}{2p!}. \quad (5.4)$$

Demonstrație. Conform teoremelor 5.8.6 și 5.8.8, $df_a = 0$ și cum

$$df_a = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k$$

rezultă $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. ■

Definiția 5.8.14 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

o funcție de două ori diferențiabilă în a . Se numește hessiana funcției f în punctul a și se notează cu $Hf(a)$ matricea

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Este ușor de observat că hessiana $Hf(a)$ este matricea asociată lui $d^2 f_a$ în baza canonică $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de pe $\mathbb{R}^n$:

$$Hf(a)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = d^2 f_a(e_i, e_j).$$

Corolarul 5.8.15 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

o funcție de două ori diferențiabilă în a . Presupunem că a este punct staționar pentru f .

1. Dacă hessiana $Hf(a)$ este pozitiv definită, atunci a este punct de minim local.
2. Dacă hessiana $Hf(a)$ este negativ definită, atunci a este punct de maxim local.

3. Dacă hessiana $Hf(a)$ este nedefinită, atunci a nu este punct de extrem local.

Demonstrație. 1. și 2. sunt consecințe ale teoremei și 5.8.10.

3. este consecință a teoremelor 5.8.6 și 5.8.8. ■

Corolarul 5.8.16 Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

o funcție de două ori diferențiabilă în a . Presupunem că a este punct staționar pentru f (adică $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$) și notăm

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(Hf(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right)^2 \end{aligned}$$

1. Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ și $\Delta > 0$, atunci a este punct de minim local.
2. Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ și $\Delta > 0$, atunci a este punct de maxim local.
3. $\Delta < 0$, atunci a nu este punct de extrem local.

Demonstrație. 1. și 2. sunt consecințe ale teoremei 5.8.10 și a caracterizării faptului că $Hf(a)$ este pozitiv/negativ definită conform teoremei 5.8.3.

3. Se ține cont de teoremele 5.8.6 și 5.8.8 și observația 5.8.5. ■

Exemplul 5.8.17 Determinăm punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy \ln(4x^2 + y^2)$.

Pasul 1: Determinăm punctele staționare (critice) ale funcției f , adică soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul I:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \ln(4x^2 + y^2) + xy \frac{8x}{4x^2 + y^2} \\ &= y \ln(4x^2 + y^2) + \frac{8x^2 y}{4x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \ln(4x^2 + y^2) + xy \frac{2y}{4x^2 + y^2} \\ &= x \ln(4x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{4x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ln(4x^2 + y^2) + \frac{8x^2 y}{4x^2 + y^2} = 0 \\ x \ln(4x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{4x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Dacă $y = 0$, atunci $x \neq 0$ și înlocuind în a doua ecuație obținem $\ln(4x^2) = 0$, de unde rezultă $4x^2 = 1$ și deci $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Deci obținem punctele staționare $a_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$ și $a_2 = (\frac{1}{2}, 0)$.

Dacă $x = 0$, atunci $y \neq 0$ și înlocuind în prima ecuație obținem $\ln(y^2) = 0$, de unde rezultă $y^2 = 1$ și deci $y \in \{-1, 1\}$. Deci obținem încă două punctele staționare $a_3 = (0, -1)$ și $a_4 = (0, 1)$.

Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$, sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} \ln(4x^2 + y^2) + \frac{8x^2}{4x^2 + y^2} = 0 \\ \ln(4x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{4x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(4x^2 + y^2) = -\frac{8x^2}{4x^2 + y^2} \\ \ln(4x^2 + y^2) = -\frac{2y^2}{4x^2 + y^2} \end{cases}$$

de unde rezultă $8x^2 = 2y^2$, $4x^2 = y^2$ și înlocuind în prima ecuație obținem

$$\begin{aligned}\ln(4x^2 + 4x^2) &= -\frac{8x^2}{4x^2 + 4x^2} \\ \ln(8x^2) &= -1 \\ 8x^2 &= e^{-1} \\ x &= \pm \frac{1}{2\sqrt{2e}}\end{aligned}$$

Deci obținem încă patru puncte staționare $a_5 = (-\frac{1}{2\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$, $a_6 = (-\frac{1}{2\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, $a_7 = (\frac{1}{2\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ și $a_8 = (\frac{1}{2\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$.

Pasul 2: În fiecare punct staționar a calculăm hessiana

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= y \frac{8x}{4x^2 + y^2} + 8y \frac{2x(4x^2 + y^2) - x^2 8x}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{8xy}{4x^2 + y^2} + \frac{16xy^3}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{8xy(4x^2 + y^2 + 2y^2)}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{8xy(4x^2 + 3y^2)}{(4x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= x \frac{2y}{4x^2 + y^2} + 2x \frac{2y(4x^2 + y^2) - y^2 2y}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy}{4x^2 + y^2} + 4xy \frac{4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= 2xy \frac{4x^2 + y^2 + 8x^2}{(4x^2 + y^2)^2} \\ &= 2xy \frac{12x^2 + y^2}{(4x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \ln(4x^2 + y^2) + x \frac{8x}{4x^2 + y^2} + 2y^2 \frac{4x^2 + y^2 - x8x}{(4x^2 + y^2)^2} \\
 &= \ln(4x^2 + y^2) + \frac{8x^2}{4x^2 + y^2} + 2y^2 \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} \\
 &= \ln(4x^2 + y^2) + 2 \frac{16x^4 + y^4}{(4x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

Deci

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{8xy(4x^2+3y^2)}{(4x^2+y^2)^2} & \ln(4x^2 + y^2) + 2 \frac{16x^4+y^4}{(4x^2+y^2)^2} \\ \ln(4x^2 + y^2) + 2 \frac{16x^4+y^4}{(4x^2+y^2)^2} & 2xy \frac{12x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Pasul 3: Studiul hessianei Hf în fiecare punct staționar:

$$Hf(a_1) = Hf\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avem $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$. Deci a_1 nu este punct de extrem local.

Analog deoarece

$$Hf\left(\frac{1}{2}, 0\right) = Hf(0, -1) = Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

punctele $a_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, $a_3 = (0, -1)$, $a_4 = (0, 1)$ nu sunt puncte de extrem local.

$$Hf(a_5) = Hf\left(-\frac{1}{2\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Avem $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$. Deci $Hf(a_5)$ este pozitiv definită și ca urmare $a_5 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ este punct de minim local. Analog deoarece

$$Hf(a_8) = Hf\left(\frac{1}{2\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

punctul $a_8 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ este punct de minim local.

$$Hf(a_6) = Hf\left(-\frac{1}{2\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Avem $\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$. Deci $Hf(a_6)$ este negativ definită și ca urmare $a_6 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ este punct de maxim local. Analog deoarece

$$Hf(a_7) = Hf\left(\frac{1}{2\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

punctul $a_7 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ este punct de maxim local.

Exemplul 5.8.18 Determinăm punctele de extrem local ale funcției

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{16}$$

pentru orice $(x, y, z) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z < 0\}$.

Pasul 1: Determinăm punctele staționare (critice) ale funcției f , adică soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{z} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{y}{z^2} - \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{y}{z^2} - \frac{1}{16} = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație rezultă $y = x^2$, și înlocuind în a doua ecuație obținem

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{z} &= 0 \\ z &= -x^3. \end{aligned}$$

Înlocuind $y = x^2$ și $z = -x^3$ în a treia ecuație rezultă

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^6} - \frac{1}{16} &= 0 \\ x &= 2 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

Deci $y = 4$ și $z = -8$. Așadar funcția f are un singur punct staționar:
 $a = (2, 4, -8)$.

Pasul 2: În fiecare punct staționar a calculăm hessiana

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \end{pmatrix}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{2x}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{z^2} - \frac{1}{16} \right) \\ &= -\frac{2y}{z^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{z} \right) \\
 &= -\frac{1}{y^2} \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{z^2} - \frac{1}{16} \right) \\
 &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{z^2} - \frac{1}{16} \right) \\
 &= \frac{1}{z^2}
 \end{aligned}$$

Deci

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & \frac{1}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z^2} & -\frac{2y}{z^3} \end{pmatrix}$$

și ca urmare

$$Hf(a) = Hf(2, 4, -8) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{pmatrix}$$

Pasul 3: Studiul hessianei Hf în punctul staționar a : Minorii principali ai matricei $Hf(a)$ sunt $\Delta_1 = \frac{1}{4} > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{16^2} > 0$$

și

$$\begin{aligned}
 \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{64} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{64} \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \frac{1}{(16)^2} (3 - 1) > 0
 \end{aligned}$$

Deoarece $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ și $\Delta_3 > 0$, $Hf(a)$ este pozitiv definită. În consecință $a = (2, 4, -8)$ este punct de minim local.

Analiză Matematică - curs 10

cu necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ se numesc multiplicatori Lagrange, iar funcția

$$(x, \lambda) \mapsto f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$$

funcția Lagrange.

Pasul 2: Se calculează diferențiala de ordinul 2 a lui F în a

$$d^2 F_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(a) dx_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$$

Pasul 3: Se diferențiază relațiile $\varphi_i(x) = 0$ în a și se obține sistemul

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) dx_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m.$$

privit formal ca un sistem liniar în necunoscutele $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$. Deoarece rangul matricei $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ este m , m necunoscute sunt principale și $n - m$ sunt secundare. Eventual renumerotând putem presupune că $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-m}$ sunt necunoscute secundare, iar $dx_{n-m+1}, dx_{n-m+2}, \dots, dx_n$ principale. Ca urmare $dx_{n-m+1}, dx_{n-m+2}, \dots, dx_n$ pot fi exprimate în funcție de $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-m}$. Înlocuindu-le în $d^2 F_a$ se obține

$$d^2 F_a = \sum_{1 \leq i, j \leq n-m} a_{ij} dx_i dx_j$$

Pasul 4: Se studiază matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-m}$ obținută la pasul 3.

1. Dacă A este pozitiv definită, atunci a este punct de minim local condiționat.
2. Dacă A este negativ definită, atunci a este punct de maxim local condiționat.
3. Dacă A este nedefinită, atunci a nu este punct de extrem local condiționat.

Exemplul 5.9.2 Să se determine punctele de extrem local condiționat ale funcției $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy < 0 \text{ și } xz > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $xy < 0$, cu legăturile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $x + y + z = 0$.

R: Fie $F : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy < 0 \text{ și } xz > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x) = xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x + y + z)$$

Pasul 1: Determinăm punctele staționare (critice) ale funcției F , ce satisfac legăturile adică soluțiile din $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy < 0 \text{ și } xz > 0\}$ ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Avem $xy + xz + yz = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = -\frac{1}{2}$. În plus, adunând primele trei ecuații și ținând cont că $x + y + z = 0$, obținem $\lambda_2 = \frac{1}{6}$. Înmulținând prima ecuație cu x , a doua cu y , a treia cu z și adunându-le, obținem $3xyz + 2\lambda_1 = 0$. Pe de altă parte înmulținând prima ecuație cu yz , a doua cu xz , a treia cu xy , adunându-le și ținând cont că $(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = (xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x + y + z) = \frac{1}{4}$ obținem $\frac{1}{4} + 6\lambda_1 xzy - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0$. Ca

urmare $4\lambda_1^2 = \frac{1}{6}$, de unde obținem $\lambda_1 \in \left\{-\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}\right\}$ și corespunzător $xyz \in \left\{\frac{\sqrt{6}}{18}, -\frac{\sqrt{6}}{18}\right\}$. Așadar x, y, z sunt rădăcinile ecuației în t :

$$t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + xz + yz)t - xyz = 0$$

Dacă $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ ecuația devine $t^3 - \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{6}}{18} = 0 \Leftrightarrow 18t^3 - 9t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)(18t^2 - 3\sqrt{6}t - \sqrt{6}) = 0$. Deci are rădăcinile $t_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $t_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ și $t_3 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$. Deoarece $xy < 0$ și $xz > 0$, obținem punctul staționar $a_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Dacă $\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}$ ecuația în t devine $t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{6}}{18} = 0 \Leftrightarrow 18t^3 - 9t + \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)(18t^2 + 3\sqrt{6}t - 6) = 0$. Deci are rădăcinile $t_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $t_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ și $t_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Deoarece $xy < 0$ și $xz > 0$, obținem punctul staționar $a_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Pasul 2: În fiecare punct staționar a calculăm diferențiala de ordinul 2 a lui F în a . Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2) = 2\lambda_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2) = 2\lambda_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2) = 2\lambda_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2) = z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2) = y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2) = x$$

Deci

$$dF_a = 2\lambda_1 dx^2 + 2\lambda_1 dz^2 + 2\lambda_1 dz^2 + 2z dx dy + 2y dx dz + 2x dy dz.$$

Pasul 3: Se diferențiază legăturile în fiecare punct staționar $a = (x, y, z)$ și se obține sistemul

$$\begin{aligned} 2xdx + 2ydy + 2zdz &= 0 \\ dx + dy + dz &= 0 \end{aligned}$$

Deoarece pentru orice punct staționar $x \neq y$ și $x = z$ obținem $dx = -\frac{zdz-ydz}{x-y} = \frac{y-z}{x-y}dz = -dz$ și $dy = -\frac{xdz-zdz}{x-y} = \frac{z-x}{x-y}dz = 0$ care înlocuite în dF_a conduc la

$$dF_a = (2\lambda_1 + 2\lambda_1 + 2y)dz^2 = (4\lambda_1 - 2y)dz^2$$

Pasul 4: Studiul $A = (4\lambda_1 - 2y)$ pentru fiecare punct staționar $a = (x, y, z)$. Pentru $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ avem un singur punct staționar $a_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, iar pentru acesta $A = -\frac{\sqrt{6}}{3} - 2\frac{\sqrt{6}}{3} < 0$ și ca urmare $a_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ este punct de maxim local condiționat al lui f . Pentru $\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}$ avem de asemenea un singur punct staționar $a_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, iar în acest caz $A = \frac{\sqrt{6}}{3} + 2\frac{\sqrt{6}}{3} > 0$ și ca urmare $a_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ este punct de minim local condiționat al lui f .

Exemplul 5.9.3 Să se determine imaginea funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \quad (x, y) \in D,$$

unde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

R: Mulțimea D fiind conexă și f fiind continuă, $f(D)$ este conexă. Cum $f(D) \subset \mathbb{R}$ și $f(D)$ conexă, rezultă $f(D)$ este interval. Evident capetele intervalului $f(D)$ sunt $\inf_{x \in D} f(x)$ și $\sup_{x \in D} f(x)$. Deoarece D este o submulțime închisă și mărginită a lui $\mathbb{R}^2$, D este compactă și ca urmare funcția continuă f își atinge extremele pe D . Așadar

$$f(D) = \left[\inf_{x \in D} f(x), \sup_{x \in D} f(x) \right] = \left[\min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f(x) \right].$$

Determinăm mai întâi punctele de extrem local ale funcției f pe interiorul mulțimii D și apoi pe frontiera lui D și vom compara valorile extreme ale

funcției. Interiorul mulțimii D este mulțimea:

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Determinăm punctele staționare (critice) ale funcției f pe D_1 , adică soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - 2x - 4y) = 2x - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 2x - 4y) = 2y - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Deoarece $x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \geq 1$, funcția f nu are puncte staționare pe D_1 și în consecință nici puncte de extrem local.

Determinăm punctele de extrem local ale funcției f pe frontiera mulțimii D , adică pe mulțimea:

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Cu alte cuvinte avem de rezolvat o problemă de extreme condiționate. Notăm $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ și definim funcția $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \\ &= x^2 + y^2 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Pasul 1: Determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ și punctele staționare ale funcției $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, adică rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)) = 2x - 2 + 2\lambda x \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)) = 2y - 4 + 2\lambda y\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda+1} \\ y = \frac{2}{\lambda+1} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Înlocuind x și y în ultima ecuație obținem

$$\begin{aligned}1 + 4 - (\lambda + 1)^2 &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

Pentru $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$ obținem $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $y_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ și punctul staționar $a_1 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, iar pentru $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$ obținem $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $y_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ și punctul staționar $a_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

Pasul 2: În fiecare punct staționar a calculăm d^2F_a

$$d^2F_a = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a) dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a) dy^2$$

Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x - 2 + 2\lambda x) = 2 + 2\lambda \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y - 4 + 2\lambda y) = 2 + 2\lambda y \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y - 4 + 2\lambda y) = 0\end{aligned}$$

Deci

$$d^2F_{(x,y)} = (2 + 2\lambda) dx^2 + (2 + 2\lambda) dy^2$$

Pasul 3: Diferențiem legătura $x^2 + y^2 - 1 = 0$ și obținem $2xdx + 2ydy = 0$ de unde

$$dy = -\frac{x}{y}dx$$

înlocuind în $d^2F_{(x,y)}$ obținem

$$d^2F_{(x,y)} = (2 + 2\lambda) \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) dx^2$$

Pasul 4: Pentru $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$ avem $(2 + 2\lambda) \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) < 0$, deci $a_1 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ este punct de maxim local condiționat. Pentru $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$ avem $(2 + 2\lambda) \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) > 0$, deci $a_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ este punct de minim local condiționat. Așadar

$$\min_{x \in D} f(x) = f(a_2) = f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} = 1 - 2\sqrt{5}$$

$$\max_{x \in D} f(x) = f(a_1) = f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{5} = 1 + 2\sqrt{5}$$

$$f(D) = \left[\min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f(x) \right] = \left[1 - 2\sqrt{5}, 1 + 2\sqrt{5} \right].$$

Pentru stabilirea condițiilor necesare și suficiente de extrem condiționat, pe care le-am folosit în exemplele anterioare pentru determinarea punctelor de extrem local condiționat, este necesară teorema funcțiilor pe care o prezentăm în secțiunea următoare.

5.10 Funcții implicite

Teorema 5.10.1 (Teorema funcției inverse) *Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă și $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 pe A cu proprietatea că jacobianul*

$$\det(Jf(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

pentru orice $a \in A$, atunci f este difeomorfism local, i.e pentru fiecare punct $a \in A$ există o vecinătate deschisă $U_a \subset A$ a lui a astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:

1. $V_a = f(U_a)$ este deschisă;
2. $f|_{U_a} : U_a \rightarrow V_a$, $f|_{U_a}(x) = f(x)$ pentru orice $x \in U_a$, este bijectivă;
3. $(f|_{U_a})^{-1} : V_a \rightarrow U_a$ este de clasă C^1 .

5.10.1 Teorema funcțiilor implicite

Considerăm "ecuația implicită" $F(x, y) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Dorim să rezolvăm această ecuație, măcar local, obținând explicit variabila y funcție de x (mai precis, obținând local $y = \varphi(x)$).

Teorema 5.10.2 (Cazul unei ecuații și al unei funcții implicite de o variabilă) Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $(a, b) \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferentiabilă pe A care îndeplinește următoarele condiții

- i) $f(a, b) = 0$
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în (a, b)
- iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Atunci există $r, s > 0$ și o funcție $h : (a - r, a + r) \rightarrow (b - s, b + s)$ astfel încât

1. $(a - r, a + r) \times (b - s, b + s) \subset A$;
2. $f(x, h(x)) = 0$ pentru orice $x \in (a - r, a + r)$;
3. h este derivabilă pe $(a - r, a + r)$ și h' este continuă în a
4. Pentru orice $(x, y) \in (a - r, a + r) \times (b - s, b + s)$ cu proprietatea că $f(x, y) = 0$ avem $y = h(x)$.

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă, există o vecinătate $V \subset A$ a punctului (a, b) astfel încât $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in V$. Există $r_0 > 0$, $r_0 < r$ astfel încât pentru orice $x \in (a - r_0, a + r_0)$, $(x, h(x)) \in V$. Derivând

$$f(x, h(x)) = 0$$

într-un punct $x \in (a - r_0, a + r_0)$ obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) h'(x) = 0$$

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))}$$

Exemplul 5.10.3 Să se calculeze $h'(1)$ și $h''(x)$ pentru funcția h ($y = h(x)$) definită implicit de ecuația

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) - 5 &= 0 \\ h(1) &= 2. \end{aligned}$$

R: Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) - 5$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Avem $f(1, 2) = 0$, f este indefinit derivabilă și

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4(x^2 + y^2)y - 8y \\ &= 4(x^2 + y^2 - 2)y \end{aligned}$$

și deci $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 24 \neq 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite există $r, s > 0$ și o funcție $h : (a - r, a + r) \rightarrow (b - s, b + s)$ local unică astfel încât

$$f(x, h(x)) = 0.$$

Derivând obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) h'(x) = 0$$

și deoarece

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4(x^2 + y^2)x - 8x \\ &= 4(x^2 + y^2 - 2)x\end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))} = -\frac{4(x^2 + h(x)^2 - 2)x}{4(x^2 + h(x)^2 - 2)h(x)} = -\frac{x}{h(x)} \\ h'(1) &= -\frac{1}{h(1)} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Derivând

$$h'(x) = -\frac{x}{h(x)}$$

obținem

$$\begin{aligned}h''(x) &= -\frac{h(x) - xh'(x)}{h(x)^2} \\ h''(1) &= -\frac{h(1) - xh'(1)}{h(1)^2} = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Teorema 5.10.4 (Cazul unei ecuații și al unei funcții implicite de mai multe variabile) Fie $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o mulțime deschisă, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, b) \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe A care îndeplinește următoarele condiții

- i) $f(a, b) = 0$
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, și $\frac{\partial f}{\partial y}$ (y este notația pentru cea de $n+1$ variabilă) sunt continue în (a, b)
- iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Atunci există $r, s > 0$ și o funcție $h : B(a, r) \rightarrow (b-s, b+s)$ astfel încât

1. $B(a, r) \times (b-s, b+s) \subset A$;

2. $f(x, h(x)) = 0$ pentru orice $x \in B(a, r)$;
3. h este diferențiabilă pe $B(a, r)$ și dh este continuă în a
4. Pentru orice $(x, y) \in B(a, r) \times (b-s, b+s)$ cu proprietatea că $f(x, y) = 0$ avem $y = h(x)$.

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă, există o vecinătate $V \subset A$ a punctului (a, b) astfel încât $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in V$. În plus, există $r_0 > 0$, $r_0 < r$ astfel încât pentru orice $x \in B(a, r_0)$, $(x, h(x)) \in V$. Derivând parțial relativ la x_i ($1 \leq i \leq n$)

$$f(x, h(x)) = 0$$

într-un punct $x \in B(a, r_0)$ obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, h(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))}$$

Exemplul 5.10.5 Să se calculeze $\frac{\partial h}{\partial x}(1, -\sqrt[3]{2})$ și $\frac{\partial h}{\partial x_i}(1, -\sqrt[3]{2})$ pentru funcția $h(z = h(x, y))$ definită implicit de ecuația

$$\begin{aligned} 2x^3 + y^3 + 2z^3 - 4xyz &= 0 \\ h(1, -\sqrt[3]{2}) &= 0. \end{aligned}$$

R: Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x, y, z) = 2x^3 + y^3 + 2z^3 - 4xyz$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Avem $f(1, -\sqrt[3]{2}, 0) = 0$, f este indefinit derivabilă și

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 6z^2 - 4xy$$

și deci $\frac{\partial f}{\partial z}(1, -\sqrt[3]{2}, 0) = 4\sqrt[3]{2} \neq 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite există $r, s > 0$ și o funcție $h : B(a, r) \rightarrow (b - s, b + s)$ local unică astfel încât

$$f(x, y, h(x, y)) = 0.$$

Derivând parțial în raport cu x obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, h(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0$$

și deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6x^2 - 4yz$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, h(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, h(x, y))} = -\frac{6x^2 - 4yh(x, y)}{6h(x, y)^2 - 4xy} \\ \frac{\partial h}{\partial x}(1, -\sqrt[3]{2}) &= -\frac{6}{4\sqrt[3]{2}} = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{4} \end{aligned}$$

Derivând parțial în raport cu y în $f(x, y, h(x, y)) = 0$ obținem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, h(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0$$

și deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 - 4zx$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, h(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, h(x, y))} = -\frac{6y^2 - 4h(x, y)x}{6h(x, y)^2 - 4xy} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(1, -\sqrt[3]{2}) &= -\frac{6\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{2}} = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \end{aligned}$$

Teorema 5.10.6 (Cazul unui sistem cu n ecuații și n funcții implicite)

Fie $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ o mulțime deschisă, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $(a, b) \in A$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă pe A care îndeplinește următoarele condiții

- i) $f(a, b) = 0$
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$, (y_i este notația pentru cea de $m + i$ variabilă) sunt continue în (a, b)
- iii) $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(a, b) \neq 0$

Atunci există $r, s > 0$ și o funcție $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) : B(a, r) \rightarrow B(b, s)$ astfel încât

1. $B(a, r) \times B(b, s) \subset A$;
2. $f(x, h(x)) = 0$ pentru orice $x \in B(a, r)$;
3. h este diferențiabilă pe $B(a, r)$ și dh este continuă în a
4. Pentru orice $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, s)$ cu proprietatea că $f(x, y) = 0$ avem $y = h(x)$.

Deoarece $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(a, b) \neq 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ continue în (a, b) , există o vecinătate $V \subset A$ a punctului (a, b) astfel încât $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(x, y) \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in V$. În plus, există $r_0 > 0$, $r_0 < r$ astfel încât pentru orice $x \in B(a, r_0)$, $(x, h(x)) \in V$. Derivând parțial relativ la x_i ($1 \leq i \leq m$) în

$$f_j(x, h(x)) = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

într-un punct $x \in B(a, r_0)$ obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, h(x)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, h(x)) \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(x) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, h(x)) \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(x) &= -\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, h(x)), \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

adică un sistem liniar cu n ecuații și necunoscutele $\frac{\partial h_1}{\partial x_i}(x)$, $\frac{\partial h_2}{\partial x_i}(x)$, ..., $\frac{\partial h_n}{\partial x_i}(x)$. Sistemul este compatibil determinat și aplicând regula lui Cramer rezultă:

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \dots, y_n)}(x, h(x))}{\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(x, h(x))}$$

pentru orice $1 \leq j \leq n$ și orice $1 \leq i \leq m$.

Exemplul 5.10.7 Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1)$ și $\frac{\partial v}{\partial y}(0, 1)$ pentru funcțiile $(z = u(x, y), t = v(x, y))$ definite implicit de sistemul

$$\begin{aligned} z^2 - x - y &= 0 \\ zt - y &= 0 \end{aligned}$$

în vecinătatea punctului $(0, 1, 1, 1)$ ($u(0, 1) = 1$, $v(0, 1) = 1$). Fie $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funcția definită prin

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= z^2 - x - y \\ f_2(x, y, z, t) &= zt - y \end{aligned}$$

pentru orice $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Avem $f(0, 1, 1, 1) = (0, 0)$, f_1, f_2 sunt indefinit derivabile,

$$\begin{aligned} \frac{D(f_1, f_2)}{D(z, t)}(x, y, z, t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z, t) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, y, z, t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z, t) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(x, y, z, t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2z & 0 \\ t & z \end{vmatrix} = 2z^2 \end{aligned}$$

și deci $\frac{D(f_1, f_2)}{D(z, t)}(0, 1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite există $r, s > 0$ și o funcție $h = (u, v) : B((0, 1), r) \rightarrow B((1, 1), s)$ local unică astfel încât

$$f(x, y, h(x, y)) = 0.$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, t)}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & u(x, y) \end{vmatrix} = -u(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{D(f_1, f_2)}{D(y, t)}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & u(x, y) \end{vmatrix} = -u(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 1) = -1$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{D(f_1, f_2)}{D(z, x)}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2u(x, y) & -1 \\ v(x, y) & 0 \end{vmatrix} = v(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1) = 1$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{D(f_1, f_2)}{D(z, y)}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, u(x, y), v(x, y)) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2u(x, y) & -1 \\ v(x, y) & -1 \end{vmatrix} = -2u(x, y) + v(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, 1) = -2 + 1 = -1.$$

Definiția 5.10.8 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f_1, f_2, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ m funcții de clasă C^1 . Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_m$ se numesc funcțional dependente pe A $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ și o funcție $\Phi : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât

$$f_j(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{j-1}(x), f_{j+1}(x), \dots, f_m(x))$$

pentru orice $x \in A$.

Definiția 5.10.9 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f_1, f_2, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ m funcții de clasă C^1 . Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_m$ se numesc funcțional dependente în $a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ există o vecinătate deschisă $V \subset A$ a lui a astfel încât $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt funcțional dependente pe V . Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_m$ se numesc funcțional independente în $a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ nu sunt funcțional dependente în a .

Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_m$ se numesc funcțional independente pe $A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_1, f_2, \dots, f_m$ se numesc funcțional independente în orice punct din A .

Dacă $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt funcțional dependente în a , atunci matricea jacobiană

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

are rangul strict mai mic decât m . Într-adevăr, deoarece $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt funcțional dependente în a , există o vecinătate deschisă $V \subset A$ a lui a există $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ și o funcție $\Phi : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât

$$f_j(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{j-1}(x), f_{j+1}(x), \dots, f_m(x))$$

pentru orice $x \in V$. Derivând parțial la x_k obținem

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) = \sum_{p=1}^{j-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}((f_1(a), f_2(a), \dots, f_{j-1}(a), f_{j+1}(a), \dots, f_m(a))) \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a) +$$

$$\sum_{p=j}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}((f_1(a), f_2(a), \dots, f_{j-1}(a), f_{j+1}(a), \dots, f_m(a))) \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_k}(a)$$

Deci linia j a matricei $Jf(a)$ este o combinație liniară a celorlate linii.

Teorema 5.10.10 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f_1, f_2, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ m funcții de clasă C^1 . Dacă rangul matricei

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

este m în fiecare punct $a \in A$, atunci $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt funcțional independente pe A .

Teorema 5.10.11 Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f_1, f_2, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ m funcții de clasă C^1 . Dacă rangul matricei

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

este $r < m$, atunci există o vecinătate deschisă $V \subset A$ a lui a astfel încât r dintre cele m funcții sunt independente pe V , celelalte fiind dependente de acestea pe V .

Eventual renumerotând putem presupune în teorema anterioară că $f_1, f_2, \dots, f_r$ sunt independente pe V . Teorema mai afirmă că există funcțiile $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{m-r} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât

$$f_{r+j}(x) = \Phi_j(f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x))$$

pentru orice $x \in V$ și pentru orice $j \in \{1, \dots, m-r\}$.

Exemplul 5.10.12 Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + 2y + z \\ g(x, y, z) &= x - 2y + z \\ h(x, y, z) &= 8(xy + zy). \end{aligned}$$

Matricea jacobiană este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8y & 8(x+z) & 8y \end{pmatrix}$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8y & 8(x+z) & 8y \end{vmatrix}_{C_1=C_3} = 0$$

și

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

rezultă că rangul matricei jacobiene este $2 < 3$ în orice punct (x, y, z) din $\mathbb{R}^3$. Deci f, g, h sunt funcțional dependente. Funcțiile f și g sunt funcțional independente pe $\mathbb{R}^3$ și h este funcțional dependentă de f și g . De fapt se poate verifica ușor că pentru orice punct (x, y, z) din $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= f(x, y, z)^2 - g(x, y, z)^2 \\ &= \Phi(f(x, y, z), g(x, y, z)), \end{aligned}$$

unde $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(u, v) = u^2 - v^2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Index

aplicație multiliniară
 negativ definită, [4](#)
 negativ semidefinită, [4](#)
 pozitiv definită, [4](#)
 pozitiv semidefinită, [4](#)

criteriul lui Sylvester, [7](#)

funcția Lagrange, [23](#)

hessiana, [14](#)

legături, [22](#)

multiplicatori Lagrange, [23](#)

punct critic, [13](#)
punct de extrem (global), [3](#)
punct de extrem local, [4](#)
punct de extrem local condiționat, [22](#)
punct de maxim (global), [3](#)
punct de maxim local, [3](#)
punct de maxim local condiționat, [22](#)
punct de minim (global), [3](#)
punct de minim local, [3](#)
punct de minim local condiționat, [22](#)
punct staționar, [13](#)

teorema funcției inverse, [29](#)
teorema funcțiilor implicite, [30](#)
teorema lui Fermat, [13](#)