Spații topologice. Spații metrice. Spații normate. Spații Hilbert

Reamintim o serie de definiții şi teoreme legate de spațiile topologice, metrice, normate şi spațiile Hilbert.

Topologie. Mulțimi deschise. Mulțimi închise. Vecinătăți. Puncte interiore, exterioare, aderente, de frontieră.

Fie X o mulțime. O familie τ de submulțimi ale lui X se numeşte ***topologie*** pe X dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. X şi $\varnothing$ sunt elemente ale lui τ
2. Dacă I este o familie oarecare de indici şi dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$.
3. Dacă I este o familie *finită* de indici şi dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcap_{i\in I} G_i \in \tau$.

Mulțimea X înzestrată cu o topologie τ se numeşte ***spațiu topologic*** şi se notează (X,τ). Dacă nu există posibilitatea unei confuzii, nu se mai precizează topologia τ. Elementele unui spațiu topologic se numesc ***puncte***, iar elementele topologiei se numesc ***mulțimi deschise*** (cu alte cuvinte, $G\subset X$ se numeşte mulțime deschisă dacă şi numai dacă $G \in \tau$). O submulțime F a spațiului topologic X se numeşte ***închisă*** dacă este complementara (în raport cu X) unei mulțimi deschise.

Topologia în care familia mulțimilor deschise este $\{\varnothing, X\}$ se numeşte ***topologia indiscretă*** sau ***trivială*** pe X. Topologia $\tau_d = 2^X$ se numeşte ***topologia discretă*** pe X. Familia reuniunilor de intervale deschise ale lui **R** împreună cu $\varnothing$ dă o topologie pe R numită ***topologia uzuală*** (sau ***topologia naturală***) pe **R**

O submulțime V a spațiului topologic X se numeşte ***vecinătate*** a punctului $x\in X$ dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $x\in G \subset V$. Mai general, V este o vecinătate a mulțimii $A \subset X$ dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $A \subset$

$G \subset V$. Se poate arăta uşor că o submulţime $A \subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său. O mulţime $U(x)$ de vecinătăţi ale unui punct $x \in X$ se numeşte ***sistem fundamental de vecinătăţi*** pentru punctul x dacă pentru orice V vecinătate a lui x există $U \in U(x)$ astfel încât $U \subset V$. Dacă notăm cu $V(x)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x atunci sunt adevărate următoarele proprietăţi:

V1. Dacă $V \in V(x)$ atunci $x \in V$.

V2. Dacă $V \in V(x)$ şi $V \subset U$, atunci $U \in V(x)$.

V3. Dacă $V, U \in V(x)$, atunci $V \cap U \in V(x)$.

V4. Dacă $V \in V(x)$, atunci există $U \in V(x)$ astfel încât V este vecinătate pentru fiecare punct $y \in U$.

Se poate arăta că proprietăţile V1-V4 definesc unic topologia lui X, în sensul că dacă funcţia $x \to V(x)$ satisface condiţiile V1-V4, atunci

$$\tau = \{G \subset X: G \in V(x) \text{ pentru orice } x \in G\} \cup \{\emptyset\}$$

este o topologie pe X şi $V(x)$ este mulţimea vecinătăţilor lui x în această topologie. Se spune că această ***topologie a fost generată cu ajutorul vecinătăţilor***. Această observaţie ne permite să definim o topologie pe X pornind de la o familie $\{U(x)\}_{x \in X}$ de submulţimi ale lui X cu proprietatea că

$$V(x) = \{V \subset X: \text{există } U \in U(x) \text{ astfel încât } U \subset V\}$$

satisface condiţii V1-V4 pentru orice x.

În cele ce urmează A este o submulţime a spaţiului topologic X.

Se numeşte ***interiorul mulţimii*** A, şi se notează cu ***int(A)*** (sau $\overset{\circ}{A}$), reuniunea tuturor mulţimilor deschise incluse în A. Int(A) poate fi definit în mod echivalent ca fiind cea mai mare mulţime deschisă (relativ la relaţia de incluziune) conţinută în A. Punctele mulţimii int(A) se numesc ***puncte interioare*** ale lui A. În consecinţă, $x \in \mathrm{int}(A)$ dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă G astfel încât $x \in G \subset A$. Mulţimea A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \mathrm{int}(A)$.

Se numeşte ***închiderea mulţimii*** A, şi se notează cu $\overline{A}$, intersecţia tuturor mulţimilor închise ce conţin pe A. $\overline{A}$ poate fi definită în mod echivalent ca fiind cea mai mică mulţime închisă (relativ la relaţia de incluziune) care conţine pe A. Punctele mulţimii $\overline{A}$ se numesc ***puncte aderente*** ale lui A. Se observă imediat că

$x \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui x, $V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$. Mulțimea A se numeşte ***densă*** în X dacă $\overline{A} = X$. Se poate arăta că

$$X - \overline{A} = \mathrm{int}(X-A) \text{ şi } X - \mathrm{int}(A) = \overline{X - A}.$$

Se numeşte ***exteriorul mulțimii*** A, şi se notează cu ***exterior(A)***, mulțimea int(X-A). Un punct $x \in$ exterior(A) se numeşte ***punct exterior*** lui A. Rezultă imediat că $x \in$ exterior(A) dacă şi numai dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \cap A = \emptyset$.

Se numeşte ***frontiera mulțimii*** A, şi se notează cu ***Fr(A)*** sau ***∂(A)***, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{X - A}$. Elementele mulțimii Fr(A) se numesc ***puncte frontieră*** ale lui A (puncte care nu aparțin nici interiorului nici exteriorului mulțimii A). Vom nota cu ***frn(A)***=Fr(A)-A= $\overline{A}$-A (mulțimea punctelor frontieră ale lui A care nu aparțin lui A).

Se poate arăta că:

- $\mathrm{int}(A) = A - \mathrm{Fr}(A)$
- $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$
- $\mathrm{Fr}(X-A) = \mathrm{Fr}(A)$
- $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$
- $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$
- $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{exterior}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$
- $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$
- $\mathrm{Fr}(\mathrm{int}(A)) \subset \mathrm{Fr}(A)$
- A este deschisă dacă şi numai dacă $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - A$
- A este închisă dacă şi numai dacă $\mathrm{Fr}(A) = A - \mathrm{int}(A)$

Mulțimea A se numeşte ***mulțime de tipul G_δ*** dacă se poate scrie sub forma unei intersecții numărabile de mulțimi deschise ale lui X. Mulțimea A se numeşte ***mulțime de tipul F_σ*** dacă se poate scrie sub forma unei reuniuni numărabile de mulțimi închise ale lui X.

Dacă (X, τ) este un spațiu topologic şi A o submulțime a lui X, atunci

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$$

este o topologie pe A numită ***topologia indusă*** pe A de topologia τ, sau ***restricția (urma) topologiei*** τ pe A. Se mai spune că A este subspațiu topologic al lui X. Orice element al lui τ_A se numeşte mulțime deschisă în A, iar orice submulțime a lui A închisă în topologia τ_A (i.e. complementara unui element al lui τ_A) se numeşte mulțime închisă în A. Mulțimea B este τ_A-închisă (închisă în A) dacă şi numai dacă există o mulțime închisă F (relativ la τ) astfel încât $B = F \cap A$. Închiderea lui B în topologia τ_A este intersecția dintre închiderea lui B în topologia τ şi A.

Fie τ_1 şi τ_2 două topologii pe X. Se spune că τ_1 este ***mai slabă*** (sau ***mai puțin fină***) decât τ_2 sau că τ_2 este ***mai tare*** (sau ***mai fină***) decât τ_1 dacă orice mulțime deschisă în topologia τ_1 este deschisă şi în topologia τ_2 (cu alte cuvinte, $G\in\tau_1 \Rightarrow G\in\tau_2$).

Un spațiu topologic X se numeşte ***spațiu T_2*** sau ***spațiu (separat) Hausdorff*** dacă şi numai dacă oricare ar fi punctele distincte $x, y \in X$, există două mulțimi deschise disjuncte G_x şi G_y astfel încât $x\in G_x$ şi $y\in G_y$.

Şiruri în spații topologice

Se numeşte ***şir*** în spațiul topologic X (sau cu termeni din spațiu topologic X) o funcție $x: \mathbf{N}\to X$. Un şir $x: \mathbf{N}\to X$ se notează cu $(x_n)_n$, $x_n = x(n)$ pentru orice $n\in\mathbf{N}$. Se numeşte ***subşir*** al şirului $x: \mathbf{N}\to X$ şirul $x\circ g$ unde $g: \mathbf{N} \to\mathbf{N}$ este o funcție strict crescătoare (adică, $g(n) < g(n+1)$ pentru orice n). Notând $k_n = g(n)$, obținem $x\circ g(n) = x(k_n) = x_{k_n}$. Un subşir $x\circ g$ se notează cu $\left(x_{k_n}\right)_n$.

Un punct $a\in X$ se numeşte ***limita şirului*** $(x_n)_n$ din X (sau se spune că $(x_n)_n$ ***converge*** la a în X) şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui a există $n_V\in\mathbf{N}$ astfel încât pentru orice $n\geq n_V$ avem $x_n \in V$.

Dacă X este spațiu T_2 (Hausdorff), atunci limita unui şir (dacă există) este unică.

Un şir din spațiu topologic X care are limită în X se numeşte ***convergent*** în X. Un şir care nu este convergent se numeşte ***divergent***.

Un punct $a \in X$ se numeşte ***punct limită al şirului*** $(x_n)_n$ dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui a şi orice $n \in N$ există $k \geq n$, astfel încât $x_k \in V$. Un punct a este punct limită al şirului $(x_n)_n$ dacă şi numai dacă există un subşir al şirului $(x_n)_n$ convergent la a.

Fie A o submulțime nevidă a mulțimii numerelor reale. Un element $M \in \mathbf{R}$ (respectiv $m \in \mathbf{R}$) se numeşte ***majorant*** respectiv, ***minorant***) al mulțimii A dacă pentru orice $x \in A$ avem $x \leq M$ (respectiv $x \geq m$). Cel mai mic majorant (respectiv, cel mai mare minorant) al mulțimii A se numeşte ***margine superioară*** (respectiv, ***margine inferioară***) a mulțimii A şi se notează cu ***sup A*** sau $\sup_{x \in A} x$, respectiv ***inf A*** sau $\inf_{x \in A} x$. Dacă A nu admite majoranți (respectiv, minoranți), sup A = ∞ (respectiv, inf A = $-\infty$). Este uşor de observat că M (respectiv, m) este marginea superioară (respectiv, marginea inferioară) a mulțimii A dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

1. $x \leq M$ (respectiv, $x \geq m$) pentru orice $x \in A$.
2. pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon > M-\varepsilon$ (respectiv, $x_\varepsilon < m+\varepsilon$)

Pentru un şir de numere reale $(x_n)_{n \geq n_0}$ se notează

$$\sup_n x_n = \sup\{x_n, n \geq n_0\} \text{ şi } \inf_n x_n = \inf\{x_n, n \geq n_0\}.$$

Este uşor de arătat că dacă şirul de numere reale $(x_n)_n$ este crescător (adică $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice n) atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n$. De asemenea, dacă şirul $(x_n)_n$ este descrescător (adică $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice n) atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n$.

Pentru şirul de numere reale $(x_n)_n$ notăm $A_n = \{x_k, k \geq n\}$. Se numeşte ***limita superioară*** (respectiv ***limita inferioară***) a şirului $(x_n)_n$ şi se notează $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (respectiv, $\liminf_{n\to\infty} x_n$) limita şirului descrescător (respectiv, crescător) $(b_n)_n$, unde $b_n = \inf A_n$ (respectiv, $b_n = \sup A_n$). Altfel spus,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k.$$

Evident, $\inf_n x_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \sup_n x_n$. Pentru orice şir de numere reale $(x_n)_n$ se poate arăta că

- Există $\lim_{n\to\infty} x_n$ dacă şi numai dacă $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$, şi în acest caz cele trei limite coincid.
- Orice punct limită a al lui $(x_n)_n$ are proprietatea că :

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Funcţii continue pe spaţii topologice

Fie X şi Y două spaţii topologice, A o submulţime a lui X şi fie $f : A \to Y$ o funcţie. Fie a un punct de acumulare al lui A (adică un punct cu proprietatea că pentru orice U vecinătate a lui a, $A \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$). Se spune că f are ***limita*** $b\in Y$ în punctul a şi se scrie $\lim_{x\to a} f(x) = b$ dacă pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in (U_V \setminus \{a\}) \cap A$.

Se spune că $f : A \to Y$ este ***continuă într-un punct*** $a \in A$ dacă pentru orice vecinătate V a lui f(a) există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U_V \cap A$. Se observă că f este continuă în orice punct izolat (adică un punct $a\in A$ pentru care există o vecinătate U a lui a astfel încât $A \cap U = \{a\}$). Dacă $a\in A$ este punct de acumulare pentru A, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dacă f este continuă în a şi $(x_n)_n$ este un şir din X astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Se spune că $f : A \to Y$ este ***continuă*** pe A dacă f este continuă în orice punct $a \in A$.

Dacă X şi Y sunt două spaţii topologice şi $f:X\to Y$ este o funcţie, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. f continuă pe X
2. Pentru orice mulţime deschisă $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ este deschisă în X
3. Pentru orice mulţime închisă $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ este închisă în X
4. Pentru orice $A \subset X$ avem

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

5. Pentru orice $B \subset Y$ avem

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

Dacă X şi Y sunt două spații topologice şi $f:X\to Y$ este o funcție bijectivă, atunci f se numeşte homeomorfism dacă f şi f^{-1} sunt continue.

Spații compacte

Un spațiu topologic X se numeşte ***compact*** dacă este Hausdorff şi din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită (mai precis, oricare ar fi familia $(G_i)_i$ de mulțimi deschise cu proprietatea că $\bigcup_i G_i = X$, există o subfamilie finită $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ astfel încât $\bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j} = X$). O submulțime A a unui spațiu topologic X se numeşte ***compactă*** dacă înzestrată cu topologia indusă de X este spațiu compact. Orice submulțime compactă a unui spațiu Hausdorff este închisă. O submulțime A a unui spațiu topologic X se numeşte ***relativ compactă*** dacă $\overline{A}$ compactă.

Dacă X este un spațiu compact, Y este un spațiu topologic Hausdorff şi $f:X\to Y$ este o funcție continuă, atunci f(X) este compactă în Y.

O submulțime a lui **R** (cu topologia uzuală) este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită. Dacă X este un spațiu compact şi $f:X\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci f este mărginită şi îşi atinge extremele, adică există x_{min}, $x_{max} \in X$ astfel încât:

$$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}) \text{ pentru orice } x\in X.$$

Spații local compacte

Un spațiu topologic X se numeşte ***local compact*** dacă este Hausdorff şi dacă orice punct al său are o vecinătate compactă. Se poate arăta că X este local compact dacă şi numai dacă este o submulțime deschisă a unui spațiu compact.

Pentru orice submulţime compactă K a spaţiului local compact X şi pentru orice vecinătate V a lui K, există o funcţie continuă f: K $\rightarrow$[0, 1] astfel încât f (x) = 1 pentru orice x$\in$K şi f (x) = 0 pentru orice x$\in$X-V.

R (cu topologia uzuală) este spaţiu local compact.

Spaţii metrice

Fie X o mulţime. Se numeşte ***distanţă*** (sau ***metrică***) pe X o funcţie

$$d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

cu următoarele proprietăţi:

1. d(x, y) $\geq$ 0 pentru orice x, y $\in$X;
2. d(x, y) = 0 dacă şi numai dacă x = y;
3. d(x,y) = d(y,x) pentru orice x, y $\in$X;
4. d(x,y) $\leq$ d(x,z) + d(z,y) pentru orice x, y, y $\in$X.

Perechea (X, d) se numeşte ***spaţiu metric***. Petru orice a$\in$X şi orice r >0 se numeşte ***bila*** (deschisă) din X centrată în a de rază r şi se notează cu B(a, r) mulţimea:

$$B(a, r) = \{x \in X: d(a,x)< r\}.$$

Familia bilelor din spaţiul metric (X, d) definesc o topologie numită ***topologia asociată (canonic) distanţei (metricii)*** d. Mai precis, o mulţime G este deschisă în această topologie dacă pentru orice x $\in$ G există r_x>0 astfel încât B(x,r_x)$\subset$G. Două distanţe (metrice) se numesc ***echivalente*** dacă topologiile asociate coincid. Un spaţiu topologic se numeşte ***metrizabil*** dacă există o distantă (metrică) d pe X cu proprietatea că topologia asociată lui d coincide cu topologia de pe X.

Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $(x_n)_n$ un şir din X. Punctul a$\in$X este limita şirului $(x_n)_n$ din X (relativ la topologia indusă de metrica d) dacă şi numai dacă pentru orice ε>0 există $n_\varepsilon\in$N astfel încât pentru orice n$\geq n_\varepsilon$ avem d(a,x_n) <ε.

Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $(x_n)_n$ un şir din X. Şirul $(x_n)_n$ se numeşte ***şir Cauchy*** (sau ***fundamental***) dacă şi numai dacă pentru orice ε>0 există $n_\varepsilon\in$N astfel încât pentru orice m,n$\geq n_\varepsilon$ avem d(x_m,x_n) <ε (sau echivalent, pentru orice ε>0 există $n_\varepsilon\in$N astfel încât pentru orice n$\geq n_\varepsilon$ şi orice p$\in$N avem d(x_{n+p},x_n) <ε).

Orice şir convergent este şir Cauchy. Reciproca nu este adevărată. Un spațiu metric (X, d) în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte ***spațiu metric complet***.

Fie (X, d_X) şi (Y, d_Y) două spații metrice şi fie $f : X \to Y$ o funcție. Pentru orice $a \in X$ următoarele afirmații sunt echivalente

1. f continuă în a
2. Dacă $(x_n)_n$ este un şir din X astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
3. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ cu $d_X(x,a) < \delta_\varepsilon$ rezultă $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

O funcție $f : X \to Y$ între spațiile metrice (X, d_X) şi (Y, d_Y) se numeşte ***uniform continuă*** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice x, $y \in X$ cu proprietatea că $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$, să avem $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Evident, orice funcție uniform continuă este continuă. Dacă X este spațiu compact, atunci orice funcție continuă $f : X \to Y$ este uniform continuă.

Spații normate şi spații Hilbert

Un ***spațiu liniar (vectorial)*** V peste corpul **K (K=R sau K=C)** este o mulțime nevidă înzestrată cu două operații: o operație internă

$$+ : V \times V \to V,\ (x, y) \to x + y,$$

numită adunarea vectorilor, împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică satisface axiomele:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, oricare ar fi $x, y, z \in V$ (legea este asociativă);
2. $x + y = y + x$ oricare ar fi $x, y \in V$ (legea este comutativă);
3. există în V un element 0, numit vectorul nul, astfel încât $x + 0 = 0 + x$ oricare ar fi $x \in V$ (există element neutru);
4. oricare ar fi $x \in V$ există $- x \in V$ astfel încât $x + (- x) = (-x) + x = 0$ (orice element admite simetric)

şi o operație externă :

$$\mathbf{K} \times V \to V,\ (\alpha, x) \to \alpha x$$

(de înmulțire a vectorilor cu scalari) care satisface axiomele:

a. dacă $1\in\mathbf{K}$ este elementul neutru la înmulţire din $\mathbf{K}$, atunci $1x = x$, oricare ar fi $x\in\mathbf{K}$.

b. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ oricare ar fi $\alpha, \beta\in\mathbf{K}$ şi $x\in V$;

c. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ oricare ar fi $\alpha, \beta \in\mathbf{K}$ şi $x\in V$;

d. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ oricare ar fi $\alpha\in\mathbf{K}$ şi $x, y\in V$.

Pentru spaţiul liniar V peste K, elementele lui V se numesc vectori, corpul K se numeşte corpul scalarilor, iar elementele lui se numesc scalari.

Două spaţii liniare V şi W peste corpul **K** se numesc ***spaţii liniare izomorfe*** dacă există o aplicaţie bijectivă $h: V \to W$ cu proprietăţile: $h(x+y) = h(x) + h(y)$ pentru orice $x, y \in V$ şi $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ pentru orice $\alpha\in\mathbf{K}$ şi orice $x\in V$. Aplicaţia h (cu proprietăţile de mai sus) se numeşte ***izomorfism*** de spaţii liniare.

Fie V un spaţiu liniar peste corpul K. Vectorul $x\in V$ este ***combinaţie liniară*** a familiei de vectori $\{x_i, i\in I\}$, dacă x se poate scrie sub forma $x = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$, unde numai un număr finit dintre coeficienţii α_i sunt nenuli. Familia $\{x_i, i\in I\}$ de vectori din V se numeşte ***familie liniar independentă*** (***sistem liniar independent***) dacă şi numai dacă vectorul nul 0 se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei *numai* cu scalari nuli: mai precis, pentru orice mulţime finită $I_0 \subset I$ pentru care există scalarii α_i, $i\in I_0$ astfel încât $\sum_{i\in I_0}\alpha_i x_i = 0$ rezultă $\alpha_i = 0$ pentru orice $i\in I_0$. Familia $\{x_i, i\in I\}$ de vectori din V se numeşte ***sistem de generatori*** pentru V dacă pentru orice $x\in V$ există mulţimea finită $I_0 \subset I$ şi scalarii $\alpha_i \in I_0$ astfel încât $x = \sum_{i\in I_0}\alpha_i x_i$**.** Se numeşte ***bază*** a spaţiului liniar V o familie de vectori care este liniar independentă şi sistem de generatori. Un spaţiu liniar se numeşte ***finit dimensional*** dacă există o bază a sa cu un număr finit de vectori. Orice două baze ale lui V au acelaşi cardinal. Se numeşte ***dimensiunea spaţiului liniar*** V peste corpul K şi se notează cu $\dim_K V$ numărul cardinal al unei baze.

Dacă pe $\mathbf{K}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)^t : \alpha_i \in \mathbf{K}$, oricare ar fi $i \in\{1, 2,\dots n\}\}$ ($\mathbf{K}=\mathbf{R}$ sau $\mathbf{K}=\mathbf{C}$) definim adunarea şi înmulţirea cu scalari din $\mathbf{K}$ în maniera de mai jos

$(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n) = (\alpha_1+ \beta_1, \alpha_2 + \beta_2,\ldots, \alpha_n + \beta_n)$

$\alpha(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2,\ldots, \alpha\alpha_n)$,

atunci este uşor de observat că sunt îndeplinite condițiile cerute de definiția spațiului vectorial şi deci $\mathbf{K}^n$ este spațiu vectorial peste **K**. Dacă pentru orice i $\in\{1, 2, ..., n\}$ notăm

$$e^i = (0, 0, ... , \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poziția } i}}{1}, 0, ...0)^t$$

atunci $B = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ este o bază în $\mathbf{K}^n$ numită ***baza canonică***. Deci $\dim_{\mathbf{K}}\mathbf{K}^n = n$. Se poate arătă că orice spațiu liniar V peste K a cărui dimensiune $\dim_{\mathbf{K}}V = n$ este izomorf cu $\mathbf{K}^n$.

Fie V un spațiu liniar peste corpul **K**. O submulțime G a lui V se numeşte ***subspațiu liniar*** (sau ***subspațiu vectorial***) dacă din x, y $\in$G rezultă x+y$\in$G şi $\alpha x \in G$ pentru orice $\alpha\in\mathbf{K}$ (sau echivalent, oricare ar fi x, y $\in$V şi $\alpha, \beta\in \mathbf{K}$, avem $\alpha x+\beta y \in G$). Orice subspațiu liniar G al lui V este spațiu liniar peste **K** în raport cu operațiile induse de pe V. Dacă A este o submulțime a lui V, atunci cel mai mic (în raport cu relația de incluziune) subspațiu liniar al lui V care conține A se numeşte ***subspațiul liniar generat de A*** şi se notează cu ***Sp(A)***. Se poate arăta că mulțimea Sp(A) coincide cu mulțimea tuturor combinațiilor liniare formate cu vectori din A.

Fie V un spațiu vectorial peste corpul **K** (**K**=**R** sau **K**=**C**). O ***normă*** pe V este o funcție p: V $\to [0, \infty)$ care satisface următoarele condiții:

1. p(x) = 0 dacă şi numai dacă x = 0.
2. $p(x +y) \le p(x) + p(y)$ pentru orice x şi y $\in$ V.
3. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pentru orice $\lambda\in\mathbf{K}$ şi orice x $\in$V.

Perechea (V, p) se numeşte ***spațiu normat***. În cele ce urmează vom nota $p(x) = ||x||$ pentru orice x$\in$V şi vom spune că V este un spațiu normat în loc de $(V, ||\cdot||)$, atunci când norma $||\cdot||$ se subînțelege. Pe orice spațiu normat se poate defini o metrică (distanță) canonică d prin $d(x, y) = ||x - y||$ pentru orice x, y $\in$V. Prin urmare oricărui spațiu normat i se pot asocia în mod canonic o structură metrică şi o structură topologică. Petru orice $x_0\in V$ şi orice r >0 vom nota cu $B(x_0, r)$ bila din V centrată în x_0 de rază r:

$$B(x_0, r) = \{x \in V: \| x - x_0 \| < r\}.$$

Pentru orice spaţiu normat V (înzestrat cu structura metrică şi structura topologică asociate în mod canonic) sunt adevărate următoarele afirmaţii:

1. Şirul $(x_n)_n$ din V converge la $x \in V$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$
2. Şirul $(x_n)_n$ din V este şir Cauchy (fundamental) dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$ pentru orice $m,n \geq n_\varepsilon$.
3. $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ este o aplicaţie continuă
4. Funcţiile $(x, y) \to x + y$ $[: V \times V \to V]$ şi $(\lambda, x) \to \lambda x$ $[: \mathbf{K} \times V \to V]$ sunt continue ($V \times V$ şi $\mathbf{K} \times V$ sunt înzestrate cu topologia produs).

O normă se numeşte ***completă*** dacă metrica asociată ei este completă (i.e. dacă orice şir Cauchy este convergent). Un spaţiu normat se numeşte ***spaţiu Banach*** dacă norma cu care este înzestrat este completă. Normele p_1 şi p_2 definite pe spaţiul vectorial V se numesc ***echivalente*** dacă topologiile asociate (în mod canonic) lor coincid. Pentru a desemna faptul că p_1 şi p_2 sunt echivalente vom folosi notaţia $p_1 \sim p_2$. Se poate arăta că normele p_1 şi p_2 sunt echivalente dacă şi numai dacă există M, m >0 astfel încât

$$m\, p_1(x) \leq p_2(x) \leq M\, p_1(x) \text{ pentru orice } x \in V.$$

V se numeşte **K** algebră normată dacă V este **K** algebră şi în plus este înzestrat cu o normă $||\cdot||$ ce satisface următoarele două proprietăţi:

1. $(V, ||\cdot||)$ este spaţiu normat
2. $||xy|| \leq ||x|| \, ||y||$ pentru orice $x, y \in V$,

O algebră normată înzestrată cu o normă completă se numeşte ***algebră Banach***.

Fie V şi W două spaţii liniare peste corpul **K** (**K**=**R** sau **K**=**C**). O aplicaţie $f:V\to W$ se numeşte ***liniară*** dacă şi numai dacă $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ şi $x, y \in V$. Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară, iar V şi W sunt spaţii normate, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. f este continuă
2. f este continuă în origine
3. Există $M > 0$ cu proprietatea că $\| f(x) \| \leq M\|x \|$ pentru orice $x \in E$.
4. $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} ||f(x)|| < \infty$.

5. $\sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$.

Vom nota cu L(V, W) spațiul aplicațiilor liniare şi continue $f : V \to W$. Pentru orice $f \in L(V, W)$, avem

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \inf\{M > 0 : \| f(x) \| \le M\|x\| \text{ pentru orice } x \in V\}.$$

Dacă pentru orice $f \in L(V, W)$, definim $\| f \| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|f(x)\|$, atunci $(L(V, W), \|\cdot\|)$ devine un spațiu normat. Spațiul L(V, W) este denumit ***spațiul operatorilor liniari şi mărginiți*** definiți pe V cu valori în W, iar elementele din L(V, W) se mai numesc ***operatori liniari mărginiți***. Spațiul operatorilor liniari şi mărginiți L(V, W) este spațiu Banach dacă şi numai dacă W este spațiu Banach.

Dacă V este un spațiu normat iar pe spațiul L(V, V) introducem drept lege de "înmulțire" compunerea operatorilor, atunci L(V, V) devine o algebră normată. Dacă V este un spațiu normat peste corpul **K**, atunci spațiul normat L(V, **K**) se numeşte ***dualul*** lui V şi se notează V'.

Fie H un spațiu vectorial peste corpul **K** (**K**=**R** sau **K**=**C**). Se numeşte ***produs scalar*** pe H o aplicație $\varphi : H \times H \to \mathbf{K}$ care are următoarele proprietăți:

1. $\varphi(x+y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in H$.
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$ pentru orice $\lambda \in \mathbf{K}$ şi $x \in H$
3. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ pentru orice $x, y \in H$.
4. $\varphi(x,x) > 0$ pentru orice $x \neq 0$.

Vom nota $\varphi(x,y) = \langle x, y\rangle$ pentru orice $x, y \in H$. Se spune că norma spațiului normat $(H, \| \cdot \|)$ provine dint-un produs scalar $\langle\cdot, \cdot\rangle$ dacă $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pentru orice x din H. Un ***spațiu pre-Hilbert*** este un spațiu normat în care norma provine dintr-un produs scalar, iar un ***spațiu Hilbert*** este un spațiu pre-Hilbert complet (cu normă completă).

Dacă H un spațiu pre-Hilbert, atunci:

1. Două elemente x şi y din H se numesc ***ortogonale*** dacă $\langle x, y\rangle = 0$.
2. Pentru $A \subset H$ şi $x \in H$, x se spune ***ortogonal*** pe A şi se notează $x \perp A$, dacă $\langle x,y\rangle = 0$ pentru orice $y \in A$.

3. O familie $(x_i)_i$ de elemente ale lui H se numeşte ***sistem ortogonal*** sau ***familie ortogonală*** dacă $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ pentru orice $i \neq j$.
4. Un sistem ortogonal $(x_i)_i$ se numeşte ***ortonormal*** dacă $\|x_i\| = 1$ pentru orice i.
5. Se numeşte ***bază ortonormată*** a spaţiului Hilbert H un sistem ortonormal maximal (în raport cu relaţia de incluziune).

Este uşor de arătat că orice sistem ortogonal de vectori nenuli este liniar independent. Dacă H este un spaţiu Hilbert şi $(x_i)_i$ este un sistem ortonormal, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. $(x_i)_i$ bază ortonormală
2. Dacă $x\in H$ şi $x\perp x_i$ pentru orice i, atunci $x = 0$.
3. Dacă $x\in H$, atunci $x = \sum_i \langle x, x_i\rangle x_i$.
4. Dacă $x, y\in H$, atunci $\langle x, y\rangle = \sum_i \langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle$.
5. Dacă $x\in H$, atunci $\|x\| = \sum_i \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2$.

Orice două baze ortonormale ale unui spaţiu Hilbert au acelaşi cardinal. ***Dimensiunea (hilbertiană)*** a unui spaţiu Hilbert este cardinalul unei baze ortonormate.

Dacă F este un subspaţiu al spaţiului Hilbert H, atunci se notează cu

$$F^{\perp} = \{x, x\perp F\}$$

complementul ortogonal al lui F. Dacă F este un subspaţiu închis, atunci $H = F \oplus F^{\perp}$ (orice element din H poate fi reprezentat în mod unic ca suma dintre un element din F şi unul din $F^{\perp}$).

Se numeşte ***adjunctul*** operatorului liniar şi mărginit $A \in L(H_1, H_2)$ (unde H_1, H_2 sunt spaţii Hilbert) operatorul liniar şi mărginit $A^*\in L(H_2, H_1)$ care satisface condiţia:

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle \text{ pentru orice } x\in H_1,\ y\in H_2.$$

Orice operator liniar şi mărginit admite un unic adjunct.

Dacă H este un spaţiu Hilbert şi $A\in L(H, H)$, atunci

1. A se numeşte ***autoadjunct*** (sau ***hermitian***) dacă $A = A^*$.
2. A se numeşte ***unitar*** dacă $AA^* = A^*A = I$.

3. A se numeşte ***pozitiv*** dacă A este autodjunct şi $\langle A(x), x\rangle \geq 0$ pentru orice $x \in H$.

Considerăm spaţiul vectorial V = $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K}=\mathbf{R}$ sau $\mathbf{K}=\mathbf{C}$), $n\in\mathbf{N}^*$. Pe acest spaţiu orice două norme complete sunt echivalente. Vom nota cu $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ următoarele norme uzuale pe $\mathbf{K}^n$:

$$||x||_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$$

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$||x||_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$.

Norma $||\cdot||_2$ se numeşte ***normă euclidiană*** şi provine din produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \text{ pentru } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ şi } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

(dacă $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, atunci $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$). Acest produs scalar este numit ***produsul scalar canonic*** pe $\mathbf{K}^n$.

Pentru $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ avem:

$\mathbf{K}^n$ este spaţiu Hilbert (în raport cu produsul scalar de mai sus) $\Rightarrow$ $\mathbf{K}^n$ este spaţiu Banach (în raport cu norma $||\cdot||_2$ indusă de produsul scalar)$\Rightarrow$ $\mathbf{K}^n$ este spaţiu metric complet (în raport cu distanţa euclidiană indusă de norma $||\cdot||_2$)$\Rightarrow$ $\mathbf{K}^n$ este spaţiu topologic (în raport cu topologia indusă de distanţa euclidiană).

În raport cu această topologie $\mathbf{K}^n$ este spaţiu local compact. O submulţime A lui $\mathbf{K}^n$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă (echivalent, conţine limita fiecărui şir convergent cu termeni din A) şi mărginită (echivalent, există M>0 astfel încât $||x||_2\leq M$ pentru orice $x\in A$).

Elemente de analiză matriceală

Vom nota cu $M_{m,n}(\mathbf{K})$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). $M_{m,n}(\mathbf{K})$ are o structură de spaţiu vectorial relativ la operaţiile:

adunare: $A = (a_{ij})_{i,j}, B=(b_{ij})_{i,j}, C=(c_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbf{K})$,

$C = A+B$ dacă şi numai dacă $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pentru orice $1\le i\le m$ şi $1\le j\le n$.

înmulţire cu scalari: $A = (a_{ij})_{i,j}$, $C=(c_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, $\lambda\in\mathbf{K}$.

$C = \lambda A$ dacă şi numai dacă $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pentru orice $1\le i\le m$ şi $1\le j\le n$.

Produsul AB a două matrice $A = (a_{ij})_{i,j}\in M_{m,n}(\mathbf{K})$ şi $B=(b_{ij})_{i,j}\in M_{n,p}(\mathbf{K})$ este o matrice $C=(c_{ij})_{i,j} \in M_{m,p}(\mathbf{K})$ pentru care

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ pentru orice } 1\le i\le m \text{ şi } 1\le j\le p.$$

Transpusa unei matrice $A=(a_{ij})_{i,j}$, este o matrice notată $A^t = (a^t_{i,j})_{i,j}$, ale cărei elemente sunt: $a^t_{i,j} = a_{j,i}$ pentru orice $1\le i\le n$, $1\le j\le m$.

Conjugata unei matrice $A=(a_{ij})_{i,j}$, este o matrice notată $A^* = (a^*_{i,j})_{i,j}$, ale cărei elemente sunt: $a^*_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ pentru orice $1\le i\le n$, $1\le j\le m$. Conjugata este caracterizată prin :

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \text{ pentru orice } x\in\mathbf{C}^n \text{ şi orice } y\in\mathbf{C}^m.$$

(unde $\langle\cdot, \cdot\rangle$ este produsul scalar canonic pe $\mathbf{C}^n$)

O matrice pentru care m=n se numeşte ***pătratică***. Elementul neutru la înmulţire în $M_{n,n}(\mathbf{K})$ este ***matricea unitate*** I_n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\text{------------------------------}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

O matrice $A\in M_{n,n}(\mathbf{K})$ este ***inversabilă*** dacă există $B\in M_{n,n}(\mathbf{K})$ astfel încât $AB=BA=I_n$. Inversa unei matrice A se notează A^{-1}. Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A) \ne 0$ - în acest caz se zice ***nesingulară***.

Matricele pentru care $A=A^t$ se numesc matrice ***simetrice***, iar cele pentru care $A=A^*$ se numesc matrice ***hermitiene*** (evident, pentru matrice cu coeficienţi reali cele două noţiuni coincid). O matrice A se zice ***ortogonală*** dacă $A^{-1} =A^t$ şi ***unitară*** dacă $A^{-1} =A^*$. Matricea A este ***diagonală*** dacă $a_{ij}=0$ pentru orice $i\ne j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}} \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

O matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ poate fi tratată ca un vector din $\mathbf{K}^{nm}$:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Datorită acestui fapt norma unei matrice poate fi introdusă în mod similar cu norma unui vector din $\mathbf{K}^{nm}$. Pe de altă parte, se ştie că există un izomorfism de spații liniare între $M_{m,n}(\mathbf{K})$ şi $L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$.

Fiecărei matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ i se asociază operatorul liniar $S(A)$ definit prin

$$S(A)(x) = Ax = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big)_{1\le i\le m} \text{ pentru orice } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbf{K}^n.$$

În cele ce urmează vom identifica A cu S(A). Cele mai des utilizate norme de matrice sunt ***normele operatoriale***: astfel pentru o matrice $A\in M_{m,n}(\mathbf{K})$, dacă pe $\mathbf{K}^m$ se consideră norma $\|\cdot\|_\alpha$, iar pe $\mathbf{K}^n$ se consideră norma $\|\cdot\|_\beta$, atunci se notează cu $\|A\|_{\alpha\beta}$ norma de aplicație liniară:

$$\|A\|_{\alpha\beta} := \sup_{\|x\|_\beta \le 1} \|Ax\|_\alpha = \sup_{\|x\|_\beta = 1} \|Ax\|_\alpha.$$

În cazul în care $\alpha=\beta$ se utilizează notația $\|A\|_\alpha = \|A\|_{\alpha\alpha}$ şi se spune că $\|A\|_\alpha$ este norma operatorială a lui A subordonată normei vectoriale $\|\cdot\|_\alpha$.

Fie $A\in M_{n,n}(\mathbf{C})$. Scalarul λ din $\mathbf{C}$ se numeşte ***valoare proprie*** pentru A dacă există vectorul nenul $x \in \mathbf{C}^n$ astfel încât:

$$Ax = \lambda x$$

Vectorul x se numeşte ***vector propriu*** asociat valorii proprii λ. Se numeşte ***subspațiu propriu*** asociat valorii proprii λ, subspațiul liniar

$$V_\lambda = \{x\in\mathbf{C}^n: Ax = \lambda x\}$$

Mulțimea valorilor proprii ale lui A formează ***spectrul*** lui A şi se notează cu $\sigma(A)$.

Raza spectrală a lui A se defineşte prin:

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$$

Normele operatoriale pentru o matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ subordonate normelor vectoriale $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sunt respectiv:

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

$$||A||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} \left|a_{ij}\right|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\rho\left(A^* A\right)}.$$

Pentru orice matrice $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$ şi orice norma operatorială $||\cdot||$ avem $\rho(A) \le ||A||$.

Dacă $||\cdot||$ este o normă operatorială pe $M_{n,n}(\mathbf{C})$, atunci $\left\|\lim\limits_{k\to\infty} A^k\right\|=0$ dacă şi numai dacă $\rho(A) < 1$.

Fie $<\cdot, \cdot>$ produsul scalar canonic pe $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$) O matrice $A \in M_{n,n}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (respectiv, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) se numeşte

- ***pozitiv definită*** dacă este simetrică (respectiv, hermitiană) şi dacă

  $$<Ax, x> \; > 0 \text{ pentru orice } x \neq 0 \text{ din } \mathbf{K}^n.$$

- ***negativ definită*** dacă este simetrică (respectiv, hermitiană) şi dacă

  $$<Ax, x> \; < 0 \text{ pentru orice } x \neq 0 \text{ din } \mathbf{K}^n.$$

- ***pozitiv semidefinită*** dacă este simetrică (respectiv, hermitiană) şi dacă

  $$<Ax, x> \; \ge 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{K}^n.$$

- ***negativ semidefinită*** dacă este simetrică (respectiv, hermitiană) şi dacă

  $$<Ax, x> \; \le 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{K}^n.$$

O matrice pozitiv definită introduce un produs scalar pe $\mathbf{K}^n$ prin formula:

$$<x, y>_A \; = \; <Ax, y> \text{ pentru orice } x, y \in \mathbf{K}^n.$$

În cele ce urmează ne vom concentra asupra matricelor $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ simetrice.

Pentru o astfel de matrice notăm determinanţii situaţi pe diagonala principală cu

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ & & & \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

(k =1,2,…n) şi îi numim ***minori principali***.

- Dacă $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ este o matrice simetrică şi minorii principali Δ_k ($k \in \{1,2,\ldots n\}$) sunt toți pozitivi, atunci A este pozitiv definită.
- Dacă $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ este o matrice simetrică şi minorii principali Δ_k ($k \in \{1,2,\ldots n\}$) respectă următoarea alternanță a semnelor:

  $$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \ldots,\ (-1)^n \Delta_n > 0,$$

  atunci A este negativ definită.

Dacă $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ este o matrice simetrică, atunci toate valorile ei proprii sunt reale şi există o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^n$ formată din vectori proprii ai lui A. În consecință, există o matrice ortogonală Q (având pe coloane vectori proprii al lui A) astfel încât:

$$Q^t A Q^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A.

Matricea simetrică $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ este o matrice pozitiv semidefinită dacă şi numai dacă toate valorile ei proprii sunt nenegative. De asemenea, $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă toate valorile ei proprii sunt (strict) pozitive.

Factorul de condiționare al unei matrice pătrate $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ se defineşte prin

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

unde $\|\cdot\|$ este o norma operatorială a matricei A. Prin convenție $\mathrm{cond}(A) = \infty$ dacă A este singulară. Dacă A este pozitiv definită, atunci $\|A\|_2 = \rho(A) = \lambda_{max}$, unde λ_{max} este cea mai mare valoare proprie a lui A, iar $\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{min}}$, unde λ_{min} este cea mai mică valoare proprie a lui A. În consecință, pentru o matrice pozitiv definită A, factorul de condiționare $\mathrm{cond}(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, unde λ_{max} (respectiv, λ_{min}) este cea mai mare, respectiv cea mai mică valoare proprie a lui A.

Se numeşte ***câtul Rayleigh*** asociat matricei $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$, funcția

$$R_A : \mathbf{R}^n \setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ R_A(x) = \frac{<x, Ax>}{<x, x>}.$$

Se observă uşor că $R_A(\alpha x) = R_A(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^n \setminus\{0\}$ şi orice $\alpha \in \mathbf{R}$. Dacă A este o matrice simetrică, atunci $x \in \mathbf{R}^n \setminus\{0\}$ este punct staționar pentru R_A (adică $\nabla R_A(x) = 0$) dacă şi numai dacă x este vector propriu al matricei A.

Principiul de minmax Courant-Fischer: Dacă $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ este o matrice simetrică cu valorile proprii $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, atunci

$$\lambda_k = \sup_{\dim_{\mathbf{R}}(S)=k} \ \inf_{x \in S, x \neq 0} \frac{<x, Ax>}{<x, x>},\ 1 \leq k \leq n.$$

(S este subspațiu liniar al lui $\mathbf{R}^n$).

Ca o consecință a principiului de minmax Courant-Fischer, rezultă că pentru o matrice simetrică A

$$\lambda_{max} = \max_{x \neq 0} \frac{<x, Ax>}{<x, x>},\ \lambda_{min} = \min_{x \neq 0} \frac{<x, Ax>}{<x, x>},$$

unde λ_{max} (respectiv, λ_{min}) este cea mai mare, respectiv cea mai mică valoare proprie a lui A. Ca urmare

$$\lambda_{min} \leq \frac{<x, Ax>}{<x, x>} \leq \lambda_{max} \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

$$\max_{x \neq 0} |R_A(x)| = \max\{|\lambda_{max}|, |\lambda_{min}|\} = ||A||_2.$$

Lema Gershgorin: Valorile proprii ale matricei $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ sunt conținute în reuniunea discurilor $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$, unde

$$K_j = \left\{ \lambda \in \mathbf{C} : \left|\lambda - a_{jj}\right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left|a_{jk}\right| \right\},\ 1 \leq j \leq n.$$