1. GRUPOIZI. MORFISME. ACŢIUNI.

(noţiuni algebrice)

Un grupoid poate fi gândit ca un grup *cu mai multe elemente unitate*. Dacă un grupoid are un singur element unitate, atunci de fapt, este grup. Astfel noțiunea de grupoid este o extensie a celei de grup. Pe de altă parte, vom vedea că grupoizii generalizează şi alte structuri printre care se numără acțiunile grupurilor, relațiile de echivalență şi spațiile obişnuite.

Vom prezenta în acest capitol câteva aspecte algebrice elementare referitoare la grupoizi. Vom folosi definiția grupoidului algebric dată de P. Hahn în [41].

Definiție 1.1. Un *grupoid* este o mulțime G împreună cu o submulțime $G^{(2)} \subset G \times G$ şi două aplicații :

$G^{(2)} \ni (x, y) \mapsto xy \in G$ ("*aplicația produs* ")

$G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ ("*aplicația de inversare* ")

având următoarele proprietăți:

(1) $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$

(2) Dacă $(x, y) \in G^{(2)}$ şi $(y, z) \in G^{(2)}$, atunci $(xy, z) \in G^{(2)}$, $(x, yz) \in G^{(2)}$ şi

$$(xy)z = x(yz)$$

(3) $(\forall)x \in G \Rightarrow \left(x, x^{-1}\right) \in G^{(2)}$, şi dacă $(y, x) \in G^{(2)}$ atunci $(yx)x^{-1} = y$

(4) $(\forall)x\in G \Rightarrow (x^{-1}, x)\in G^{(2)}$, şi dacă $(x, y)\in G^{(2)}$ atunci $x^{-1}(xy) = y$.

Mulţimea $G^{(2)}$ se numeşte *mulţimea perechilor compozabile*, iar x^{-1} se numeşte *inversul* lui x.

Pentru $x \in G$ se notează $r(x)=xx^{-1}$ şi $d(x)=x^{-1}x$. Atunci $(x, y)\in G^{(2)}$ dacă şi numai dacă d(x) = r(y). U_G = r(G) = d(G) este *spaţiul unităţilor* lui G, elementele sale fiind *unităţi* în sensul că xd(x) = r(x)x = x.

Pentru $u, v\in U_G$ şi $A \subset G$, notăm

$$A^u := \{x\in A : r(x)=u\}, A_v := \{x\in A : d(x)=v\} \text{ şi } A^u_v := A^u \cap A_v .$$

G^u_u se numeşte *grup de izotropie* pentru orice $u \in U_G$, şi se mai notează cu $G|_u$.

Pentru A, B $\subset$ G, definim $A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}$ şi

$$AB = \{z\in G : (\exists)x\in A, (\exists)y\in B \text{ cu } z = xy\}.$$

Pe U_G se defineşte următoarea relaţie de echivalenţă : $u \sim v \overset{def}{\iff} (\exists)x\in G$ astfel încât $r(x)=u$ şi $d(x)=v$. Clasele de echivalenţă se numesc *orbite*, iar orbita unei unităţi $u \in U_G$ se notează [u]. O mulţime $A \subset U_G$ se numeşte *saturată* sau *invariantă* dacă este reuniunea orbitelor elementelor sale (i.e. $u \in A$ şi $v \sim u \Rightarrow v \in A$). Pentru $A \subset U_G$ mulţimea $[A] = \bigcup_{u\in A}[u] = d(r^{-1}(A)) = r(d^{-1}(A))$ se numeşte *saturata* lui A.

G se numeşte *grupoid tranzitiv* dacă $(r, d): G \to U_G \times U_G$ este surjectivă sau, echivalent dacă pentru orice $u\in U_G$ avem $[u] = U_G$.

G se numeşte *grupoid principal* dacă $(r, d): G \to U_G \times U_G$ este injectivă .

Un *subgrupoid* al grupoidului G este o submulţime G' închisă pentru aplicaţia "produs" şi aplicaţia de "inversare".

Vom da o serie de exemple de grupoizi dintre care unele vor fi frecvent utilizate în capitolele următoare

Exemple 1.2.

1. Orice grup este un grupoid. Mai mult, grupoidul G este grup <=> $G^{(2)}=G\times G$ (orice două elemente sunt compozabile) <=> U_G conține un singur element (elementul unitate al grupului).

2. Fie S o mulțime şi g un grup. Definim o structură de grupoid pe G=S×g prin

$$G^{(2)} := \{((s_1,x_1,t_1),(s_2,x_2,t_2)) : t_1 = s_2\}$$

$$(s_1,x_1,t_1)(t_1,x_2,t_2) := (s_1,x_1x_2,t_2) \text{ şi } (s,x,t)^{-1} := (t,x^{-1},s)$$

Este uşor de verificat că r(s,x,t) = (s,e,s), d(s,x,t) = (t,e,t) şi $U_G = S \times \{e\} \times S$ (e elementul neutru din g). De obicei vom identifica U_G cu S. Grupoidul G = S × g × S se numeşte *grupoidul trivial pe S de grup g*, şi este un grupoid tranzitiv. În particular, orice grup poate fi considerat un grupoid trivial pe o mulțime formată dintr-un singur element, şi orice produs cartezian S × S este un *grupoid trivial pe S* de grup $\{e\}$.

1. Fie S o mulțime, g un grup care acționează la stânga (respectiv la dreapta) pe S şi $g\times S \ni (x,s) \mapsto xs \in S$ (resp. $S\times g \ni (s,x) \mapsto sx \in S$) acțiunea. Vom defini pe G = g × S (resp. $G = S\times g$) o structură de grupoid astfel:

$$G^{(2)} := \{((x,s),(y,t)) \in (g\times S)\times(g\times S) : s = yt\}$$

$$(\text{resp. } G^{(2)} := \{((s,x),(t,y)) \in (S\times g)\times(S\times g) : t = sx\})$$

$(x,yt)(y,t) := (xy,t)$ (resp. $(s,x)(sx,y) := (s,xy)$)

$(x,s)^{-1} := (x^{-1},xs)$ (resp. $(s,x)^{-1} := (sx,x^{-1})$)

Cu aceste operații G devine grupoid cu spațiul unităților $U_G = \{e\}\times S$ (resp. $U_G = S\times\{e\}$) (e elementul neutru din g). Vom identifica spațiul unităților cu S. Aplicațiile r, d sunt definite prin

$$r(x,s) = (e,xs),\ d(x,s) = (e,s) \text{ pentru orice } (x,s)\in g\times S\ )$$

$$(\text{resp. } r(s,x) = (s,e),\ d(s,x) = (sx,e) \text{ pentru orice } (s,x)\in S\times g\ ).$$

Grupoidul G se numeşte *grupoidul determinat de acţiunea lui g pe S*. G este grupoid tranzitiv dacă şi numai dacă acţiunea lui g pe S este tranzitivă, şi este grupoid principal dacă şi numai dacă acţiunea este liberă.

4. Dacă G este grupoid putem defini pe $G^{(2)}$ o structură de grupoid după cum urmează

$G^{(2)(2)} := \{((x,y),(z,w)) \in G^{(2)} \times G^{(2)} : z = xy\}$

$(x,y)(xy,w) := (x, yw)$ şi $(x,y)^{-1} := (xy, y^{-1})$

Notăm aplicaţiile r, d corespunzătoare grupoidului $G^{(2)}$ cu $r^{(2)}$, respectiv $d^{(2)}$. Avem $r^{(2)}(x,y) = (x,d(x))$ şi $d^{(2)}(x,y) = (xy, d(xy))$, deci spaţiul unităţilor $U_{G^{(2)}}$ poate fi identificat cu G. $G^{(2)}$ este grupoid principal. Grupoidul $G^{(2)}$ este tranzitiv dacă şi numai dacă G este grup.

5. Fie G un grupoid şi E o submulţime a spaţiului unităţilor U_G. Notăm

$G|_E = \{x \in G : r(x) \in E, d(x) \in E\} = r^{-1}(E) \cap d^{-1}(E)$

Dacă definim $(G|_E)^{(2)}$ ca fiind $G^{(2)} \cap (G|_E \times G|_E)$ şi operaţiile ca restricţii ale operaţiilor de pe G, atunci $G|_E$ devine grupoid cu spaţiul unităţilor egal cu E. $G|_E$ este un subgrupoid al lui G, numit *contracţia* (sau *reducerea*) lui G la E.

6. Fie S o mulţime şi $R \subset S \times S$ o relaţie de echivalenţă. Luăm

$R^{(2)} = \{((s_1, t_1),(s_2, t_2)) : t_1 = t_2\}$

şi definim $(s_1, t_1)(t_1, t_2) := (s_1, t_2)$ şi $(s, t)^{-1} := (t, s)$. Este uşor de verificat că R devine grupoid cu $U_R = \{(s,s) : s \in S\}$. Vom identifica frecvent U_R cu S şi astfel, r(s,t) = s, d(s,t).= t. R este grupoid principal. Punem în evidenţă două cazuri extreme. Dacă R = S × S, atunci R este *grupoidul trivial* pe mulţimea S, iar dacă R = diag(S) = $\{(s,s) : s \in S\}$, atunci R se numeşte grupoidul *co-trivial* pe mulţimea S.

7. Dacă G este un grupoid, atunci

$\{(u,v) \in U_G \times U_G : (\exists) x \in G, r(x) = u, d(x) = v\} = \{(r(x), d(x)) : x \in G\}$

este relaţia de echivalenţă pe U_G din definiţia 1.1. Grupoidul definit de această relaţie de echivalenţă (ca în exemplul anterior) se numeşte *grupoidul principal asociat lui* G şi se notează cu (r,d)(G). Spaţiul unităţilor acestui grupoid se identifică cu U_G.

8. Fie S o mulțime şi $p : S \to U$ o aplicație surjectivă. Numim $p^{-1}(u)$ fibra peste u şi o notăm cu S_u pentru $u \in U$. Fie Iso(S, p, U) = { (v, φ, u) : $\varphi : S_u \to S_v$ este bijectivă}. Spunem că două elemente (v_1, φ_1, u_1) şi (v_2, φ_2, u_2) sunt compozabile dacă şi numai dacă $u_1 = v_2$. Definim următoarele operații

$$(v_1, \varphi_1, u_1)(u_1, \varphi_2, u_2) := (v_1, \varphi_1 \circ \varphi_2, u_2) \text{ şi } (v, \varphi, u)^{-1} := (v, \varphi^{-1}, u).$$

Relativ la aceste operații Iso(S, p, U) este un grupoid, numit *grupoidul de izomorfisme ale fibratului* $p : S \to U$.

9. Fie S o mulțime. Notăm:

$$\mathrm{Inj}(S) := \{ f : D(f) \to S : D(f) \subset S, f \text{ injectivă}\}$$

$$R(f) := f(D(f)) \subset S$$

Luăm $\mathrm{Inj}(S)^{(2)} = \{(f,g) : D(f) = R(g)\}$, şi definim următoarele aplicații:

$$(f,g) \mapsto fg\,[: \mathrm{Inj}(S)^{(2)} \to \mathrm{Inj}(S)],\ fg : D(g) \to S,\ fg(x) = f(g(x))$$

$$f \mapsto f^{-1}[: \mathrm{Inj}(S) \to \mathrm{Inj}(S)]$$

Pentru a defini f^{-1} ținem cont de faptul că $f : D(f) \to S$ este injectivă, deci $\bar{f} : D(f) \to R(f)$, $\bar{f}(x) = f(x)\ (\forall)x \in D(f)$ este bijectivă, şi $(\exists)\ g : R(f) \to D(f)$, $g = \bar{f}^{-1}$ (inversa lui $\bar{f}$ relativ la compunere). Definim $f^{-1} : R(f) \to S$, $f^{-1}(x) = g(x)\ (\forall)x \in R(f)$. Cu aceste operații $\mathrm{Inj}(S)$ devine grupoid. Pentru acest grupoid aplicațiile de proiecție $r, d : \mathrm{Inj}(S) \to U_{\mathrm{Inj}(S)}$ sunt definite prin

$$d(f) = f^{-1}f = 1_{D(f)},\ r(f) = f^{-1}f = 1_{R(f)}$$

iar spațiul unităților este dat de

$$U_{\mathrm{Inj}(S)} = \{1_A : A \to S\ /\ A \subset S\},$$

unde prin 1_A am notat funcția identică pe A.

Punem în evidență doi subgrupoizi şi grupoidului $\mathrm{Inj}(S)$. Dacă $U_0 = \{1_S : S \to S\}$ atunci

$$\mathrm{Inj}(S)\big|_{U_0} = \{f : D(f) \to S\ /\ 1_{D(f)} = 1_S = 1_{R(f)}\} = \{f : S \to S\ / f \text{ bijectivă}\}$$

Deci contracția grupoidului $\mathrm{Inj}(S)$ la mulțimea formată din funcția identică a lui S este chiar grupul de permutări al lui S. Dacă $\{P\}_{P\in \mathcal{P}}$ este o partiție a lui S şi $U_1 = \{1_P : P \in \mathcal{P}\}$ atunci

$$\mathrm{Inj}(S)\big|_{U_1} = \{f : D(f) \to S \text{ injectivă} /\ (\exists)P_1, P_2 \in \mathcal{P} \text{ a.î. } D(f) = P_1 \text{ şi } R(f) = P_2\}.$$

Grupoidul $\mathrm{Inj}(S)\big|_{U_1}$ se notează cu $\mathrm{Inj}(S, \mathcal{P})$ şi este format din funcțiile injective al căror domeniu şi a căror imagine aparțin partiției P. Dacă $P = \{P_i\}_{i \in I}$, definim $p : S \to I$, prin $p(s) = i$ dacă $s \in P_i$. Este uşor de observat că grupoidul $\mathrm{Inj}(S, \mathcal{P})$ poate fi identificat cu Iso(S, p, I). Grupoizii Inj(S) şi Iso(S, p, I) pot fi priviți ca grupoizi care generalizează grupul de permutări ai mulțimii S.

10. Fie $G = \{G_u\}_{u\in U}$ o familie de grupuri indexate după o mulțime U. Notăm

$$U*G = \{(u,t) : u \in U, t \in G_u\}.$$

Definim

$$(U*G)^{(2)} := \{((u, t),(v, s)) : u = v\},\ (u, t)(u,s) := (u, ts) \text{ şi } (u, t)^{-1}:=(u, t^{-1}).$$

Cu această structură U∗G devine un grupoid, numit fibrat de grupuri peste U. Punem în evidență un fibrat de grupuri asociat unui grupoid H. Fie $I = \{x \in H : r(x) = d(x)\}$. I este un subgrupoid al lui H. Deoarece I este reuniunea disjunctă $\bigcup_{u\in U_H} H|_{\{u\}}$, I poate fi privit ca un fibrat de grupuri (grupurile de izotropie ale lui H) peste spațiul unităților lui H. I este numit *fibratul de grupuri de izotropie* al lui H.

11. Fie $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o familie de grupoizi disjuncți doi câte doi, şi $G = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$.

Cu $G^{(2)} = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha^{(2)}$

şi cu operațiile evidente G devine grupoid.

12. Fie $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o familie de grupoizi, şi $G = \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$. Cu

$$G^{(2)} = \{((x_\alpha), (y_\alpha)) : (x_\alpha, y_\alpha) \in G_\alpha^{(2)}\}$$

şi cu operațiile definite pe componente G devine grupoid.

Definiție 1.3. Dacă G , H sunt grupoizi atunci o funcție $\rho: G \to H$ se numește *morfism (strict)* dacă pentru orice $(x, y) \in G^{(2)}$ rezultă $(\rho(x), \rho(y)) \in G^{(2)}$ și $\rho(x)\rho(y) = \rho(xy)$. Dacă ρ este și bijectivă, atunci se numește *izomorfism*.

Este ușor de observat că orice morfism comută cu aplicațiile r și d ($\rho \circ r = r \circ \rho$ și $\rho \circ d = d \circ \rho$), duce unitățile în unități și inversele în inverse. Pentru un morfism de grupoizi $\rho: G \to H$ se notează cu $\widetilde{\rho}$ restricția lui ρ la U_G, $\widetilde{\rho} : U_G \to U_H$.

Propoziție 1.4. 1) Orice morfism de grupoizi triviali $\varphi : S_1 \times g_1 \times S_1 \to S_2 \times g_2 \times S_2$ este de forma $\varphi(s, x, t) = (\varphi(s, e, s), \theta(s)f(x)\theta(t)^{-1}, \varphi(t, e, t))$, unde e este elementul neutru al grupului g_1, $f : g_1 \to g_2$ este un morfism de grupuri, iar $\theta : S_1 \to g_2$ este o aplicație oarecare.

2) Dacă $G_1 = S \times S$ este un grupoid trivial pe o mulțime S și G_2 este un grupoid oarecare, atunci orice morfism $\varphi : G_1 \to G_2$ este de forma $\varphi(s,t) = \theta(s)\theta(t)^{-1} = \theta(r(s,t))\theta(d(s,t))^{-1}$, unde $\theta : S\ (= U_{G_1}) \to G_2$ este o funcție oarecare.

Demonstrație. 1) Deoarece $\varphi \circ r = r \circ \varphi$ și $\varphi \circ d = d \circ \varphi$, atunci componentele 1și 3 din $\varphi(s, x, t)$ trebuie să fie $\varphi(s, e, s)$, respectiv $\varphi(t, e, t)$. Fie un $b \in S_1$ fixat. Definim $\theta : S_1 \to g_2$ și $f : g_1 \to g_2$ prin

$$\varphi(s, e, b) = (\varphi(s, e, s), \theta(s), \varphi(b, e, b)), \quad \varphi(b, x, b) = (\varphi(b, e, b), f(x), \varphi(b, e, b)).$$

Avem $(\varphi(b, e, b), f(xy), \varphi(b, e, b)) = \varphi(b, xy, b) = \varphi((b, x, b)(b, y, b)) = \varphi(b, x, b)\varphi(b, y, b) =$

$$= (\varphi(b, e, b), f(x), \varphi(b, e, b))\,(\varphi(b, e, b), f(y), \varphi(b, e, b)) = (\varphi(b, e, b), f(x)f(y), \varphi(b, e, b)).$$

Obținem $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x,y \in g_1$, deci f morfism de grupuri. În plus,

$$\varphi(s, x, t) = \varphi((s, e, b)(b, x, b)\,(b, e, t)) = \varphi(s, e, b)\varphi(b, x, b)\,\varphi(t, e, b)^{-1} =$$

$$= (\varphi(s, e, s), \theta(s), \varphi(b, e, b))\,(\varphi(b, e, b), f(x), \varphi(b, e, b))\,(\varphi(t, e, t), \theta(t), \varphi(b, e, b))^{-1} =$$

$$= (\varphi(s, e, s), \theta(s)f(x)\theta(t)^{-1}, \varphi(t, e, t)).$$

Se observă că aplicațiile $f : g_1 \to g_2$, $\theta : S_1 \to g_2$ nu sunt unice (depind de alegerea lui b din S_1).

2) Fie $b \in S$ fixat. Definim $\theta : S\ (= U_{G_1}) \rightarrow G_2$ prin $\theta(s) = \varphi(s,b)$. Atunci pentru $(s,t) \in S\times S$,

$$\varphi(s,t) = \varphi((s,b)(b,t)) = \varphi(s,b)\varphi(b,t) = \varphi(s,b)\varphi(t,b)^{-1} = \theta(s)\,\theta(t)^{-1} = \theta(r(s,t))\,\theta(d(s,t))^{-1}.$$

Propoziție 1.5. 1) Grupurile de izotropie ale unui grupoid corespunzătoare la unități din aceeaşi orbită sunt izomorfe.

2) Orice grupoid poate fi scris, în mod unic, ca o reuniune disjunctă de grupoizi tranzitivi.

3) Orice grupoid tranzitiv este izomorf cu un grupoid trivial de grup egal cu unul din grupurile de izotropie ale grupoidului G.

Demonstrație. Pentru a arăta prima afirmație, considerăm $u,v \in U_G$ cu $u \sim v$. Atunci există $x \in G$ astfel încât $r(x) = u$ şi $d(x) = v$. Aplicația $I_x : G_v^v \rightarrow G_u^u$, definită prin $I_x(y) = xyx^{-1}$, este în mod evident un izomorfism de grupuri. A doua afirmație rezultă din faptul că $G = \bigcup_{[u]} G|_{[u]}$, iar $G|_{[u]}$ este grupoid tranzitiv. Pentru a demonstra a treia afirmație, să observăm că dacă G este tranzitiv şi $u \in U_G$ este o unitate fixată, atunci aplicația $r|_{G_u}$ este surjectivă, şi deci există $\sigma : U_G \rightarrow G_u$ injectivă astfel încât $r\circ\sigma = 1_{U_G}$. Definim $\varphi : U_G\times G_u^u \times U_G \rightarrow G$, prin

$$\varphi(v, x, w) = \sigma(v)x\sigma(w)^{-1} \text{ pentru orice } (v, x, w) \in U_G\times G_u^u \times U_G.$$

Se verifică uşor că φ este izomorfism, şi că

$$\varphi^{-1} : G \rightarrow U_G\times G_u^u \times U_G,\ \varphi^{-1}(x) = (r(x), \sigma(r(x))^{-1}x\sigma(d(x)), d(x)).$$

Definiție 1.6. Fie G_1 şi G_2 doi grupoizi. Morfismele $\varphi_1,\varphi_2 : G_1 \rightarrow G_2$ se numesc *similare* dacă există o funcție $\theta : U_{G_1} \rightarrow G_2$ astfel încât $\varphi_2(x) = \theta(r(x))\varphi_1(x)\theta(d(x))^{-1}$ pentru orice x din G_1.

Doi grupoizi G_1 şi G_2 se numesc *similari* dacă există două morfisme $\varphi_1 : G_1 \rightarrow G_2$ şi $\varphi_2 : G_2 \rightarrow G_1$ astfel încât $\varphi_1 \circ \varphi_2$ este similar cu identitatea din G_2 şi $\varphi_2 \circ \varphi_1$ este similar cu identitatea din G_1.

Observație 1.7. 1. Noțiunea de similaritate pentru morfisme de grupoizi generalizează noțiunea de conjugare pentru morfisme de grupuri. Aceasta înseamnă că, dacă G_1 şi G_2 sunt grupuri, atunci morfismele $\varphi_1, \varphi_2 : G_1 \to G_2$ sunt similare în sensul definiției precedente dacă şi numai dacă există $b \in G_2$ astfel încât $\varphi_2(x) = b\varphi_1(x)b^{-1}$ pentru orice $x \in G_1$.

2. Relația de similaritate a grupoizilor este o relație de echivalență.

1.8. Exemple de grupoizi similari

1. Orice grupoid G este similar cu contracția lui la o mulțime care intersectează fiecare orbită.

Într-adevăr, fie U_0 o submulțime a lui U_G care intersectează fiecare orbită (i.e. $[U_0] = U_G$). Fie $i : G|_{U_0} \to G$, definită prin $i(x) = x$ pentru orice $x \in G|_{U_0}$, şi o funcție $\theta : U_G \to G$ definită după cum urmează. $\theta(u) = u$ pentru orice $u \in U_0$. Dacă $u \notin U_0$ există $v \in U_0$ cu $v \sim u$, şi deci există $x \in G$ cu $r(x) = u$ şi $d(x) = v$. În acest caz punem $\theta(u) = x$. Considerăm morfismul de grupoizi $\varphi: G \to G|_{U_0}$, definit prin $\varphi(x) = \theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}$ pentru orice $x \in G$. Deoarece $\theta(u) = u$ pentru $u \in U_0$, φ coincide cu identitatea pe $G|_{U_0}$ şi deci $\varphi \circ i$ este identitatea pe $G|_{U_0}$. Pentru a arăta că $i \circ \varphi = \varphi$ este similar cu identitatea lui G, utilizăm θ: $\varphi(x) = \theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}$ pentru orice $x \in G$.

2. Orice grupoid G este similar cu o reuniune disjunctă de grupuri.

Dacă în exemplul precedent U_0 conține exact câte un element din fiecare orbită, atunci $G|_{U_0} = \bigcup_{u \in U_0} G_u^u$, şi deci G este similar cu $\bigcup_{u \in U_0} G_u^u$.

3. Un grupoid tranzitiv G este similar cu un grup.

Într-adevăr, conform exemplului 1.8.1, G este similar cu $G|_{\{u\}} = G_u^u$.

4. Dacă G este un grup şi H este un subgrup a lui G, atunci $F = G\backslash H \times G$ (grupoidul determinat de acțiunea lui G pe $G\backslash H$) este similar cu H.

Dacă în exemplul 1.8.1 $U_0 = \{(H,e)\}$ (e este unitatea grupului G), atunci F este similar cu $F|_{U_0}$. Deoarece $h \mapsto (H, h)$ este un izomorfism al lui H pe $F|_{U_0}$, rezultă că F este similar cu H.

Acțiunea la stânga (respectiv la dreapta) a unui grup G pe o mulțime S este dată de un morfism (respectiv un antimorfism) al lui G pe grupul permutărilor lui S. Prin analogie vom defini acțiunea unui grupoid pe o mulțime.

Propoziția 1.9. Fie G un grupoid şi S o mulțime. Considerăm

$$\mathsf{F}(S) = \{f : D(f) \to S \mid D(f) \subseteq S\}$$

$$\psi : G \to \mathsf{F}(S)$$

Pentru $x \in G$ notăm cu $D'(x)$ domeniul aplicației $\psi(x)$, deci

$$\psi(x) : D'(x) \to S,\ D'(x) \subseteq S$$

Notăm $\psi(x)(s) = xs$.

ψ este un morfism de grupoizi de la G la $Inj(S)$ (grupoidul din exemplul 1.2.9) dacă şi numai dacă următoarele două condiții sunt îndeplinite

(a) $$u \in U_G \text{ şi } s \in D'(u) \Rightarrow us = s$$

(b) $$(x,y) \in G^{(2)},\ s \in D'(y) \Rightarrow \begin{cases} ys \in D'(x) \\ s \in D'(xy) \end{cases} \text{şi } x(ys) = (xy)s$$

Demonstrație. Pentru $x \in G$ notăm cu $R'(x) = \{xs \ / \ s \in D'(x)\}$. Demonstrăm că (a)+(b) $\Rightarrow \psi : G \to Inj(S)$ morfism de grupoizi. Fie $x \in G$ şi $s_1, s_2 \in D'(x)$ cu proprietatea că $\psi(x)(s_1) = \psi(x)(s_2)$ (echivalent cu $xs_1 = xs_2$). Deoarece $s_1 \in D'(x)$, avem

$$x^{-1}(xs_1) = (x^{-1}x)s_1 = d(x)s_1 \underset{d(x)\in U(G)}{\overset{(a)}{=}} s_1$$

Analog $x^{-1}(xs_2) = s_2$. Dar $xs_1 = xs_2$, deci $s_1 = s_2$. Am demonstrat că $\psi(x)$ este injectivă pentru oricare $x \in G$, şi în consecință că $\psi : G \to Inj(S)$ este corect definită. Arătăm că $D'(x) = R'(x^{-1})$ pentru oricare $x \in G$. Dacă $s \in D'(x)$, atunci

$s = (x^{-1}x)s = x^{-1}(xs) \in R'(x^{-1})$. Dacă $s \in R'(x^{-1})$, atunci există t $\in$ $D'(x^{-1})$astfel încât $s = x^{-1}t$, şi din (x, x^{-1}) $\in$ $G^{(2)}$ rezultă că s $\in$ D'(x). Arătăm că pentru$(x, y) \in G^{(2)}$ avem $D'(x) = R'(y)$. Dacă s $\in$ R'(y), atunci există t $\in$ D'(y) astfel încât s = yt. Din $(x, y) \in G^{(2)}$ rezultă că s = yt $\in$ D'(x). Reciproc, dacă s $\in$ D'(x) atunci xs $\in$ D'(x^{-1}), şi din $(y^{-1}, x^{-1}) \in G^{(2)}$ rezultă că s $\in$ D'(y^{-1}) = R'(y). În consecinţă, din $(x, y) \in G^{(2)}$ rezultă $(\psi(x), \psi(y)) \in Inj(S)^{(2)}$. Pentru $(x, y) \in G^{(2)}$ rezultă că $(xy, y^{-1}) \in G^{(2)}$ şi D'(xy) = R'(y^{-1}) = D'(y). Pentru $s \in D'(xy) = D'(y)$ avem

$$\psi(x)\psi(y)(s) = \psi(x)(\psi(y)(s)) = \psi(x)(ys) = x(ys) \overset{b)}{=} (xy)s = \psi(xy)(s)$$

Deci ψ este morfism de grupoizi.

Demonstrăm că $\psi : G \to Inj(S)$ morfism => (a)+(b). Fie $u \in U_G$ şi $s \in D'(u)$ $us = \psi(u)(s) \underset{u \text{ unitate} \Rightarrow \psi(u) \text{ unitate}}{=} s$. Condiţia (a) este astfel îndeplinită.

Dacă $(x, y) \in G^{(2)}$ şi $s \in D'(y) = D(\psi(y))$, atunci ys

$= \psi(y)(s) \in R(\psi(y)) = R'(y) = D'(x)$.

Pe de altă parte din $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ rezultă $(xy)s = x(ys)$.

<u>*Definiţie 1.10*</u> Fie G grupoid, S o mulţime şi $F \subset G \times S$ o submulţime cu proprietatea că pentru fiecare $x \in G$ există cel puţin un $s \in S$ astfel încât $(x, s) \in F$. Pentru $x \in G$ notăm

$$D'(x) = \{s \in S : (x, s) \in F\}.$$

O funcţie $\psi : F \to S$ se numeşte *acţiune la stânga* a lui G în S dacă şi numai dacă funcţia $\overline{\psi} : G \to \mathcal{F}(S)$, $\overline{\psi}(x)(s) = \psi(x, s)$ satisface condiţiile (a) şi (b) din propoziţia 1.9.

Dacă $S = \bigcup_{x \in G} D'(x) = \bigcup_{x \in G} F_x$ spunem că *G acţionează pe S.*

Observație 1.11. Fie $S_0 = \bigcup_{x \in G} D'(x)$. Atunci $S_0 \subset S$ şi $Inj(S_0)$ este un subgrupoid al grupoidului $Inj(S)$. Deci orice acțiune a grupoidului G pe S dă naştere unei acțiuni a grupoidului G pe S_0.

Definiție 1.12 Un morfism de grupoizi $\psi : G \to Inj(S) | 1_S$ se numeşte *reprezentare a lui* G *prin permutări*.

Dacă P este o partiție a lui S atunci o acțiune căreia îi corespunde un morfism $\psi : G \to Inj(S; \mathsf{P})$ se numeşte *acțiune care respectă partiția* P.

Morfismul de grupoizi $\psi : G_1 \to G_2$ se numeşte *adevărat* dacă şi numai dacă din $\psi(x)\psi(y)$ definit rezultă xy definit.

O acțiune este *adevărată* dacă şi numai dacă $s \in D'(y)$ şi $ys \in D'(x)$ implică xy definit.

Propoziția 1.13. Dacă G este un grupoid, S o mulțime şi $\psi : G \to Inj(S)$ este un morfism atunci ψ este adevărat dacă acțiunea corespunzătoare este adevărată. Reciproca este adevărată dacă acțiunea respectă o partiție.

Demonstrație. Pentru x,y $\in$ G,

$$(\psi(x), \psi(y)) \in G^{(2)} <=> R(\psi(y)) = D(\psi(x)) <=> R'(y) = D'(x)$$

Dacă acțiunea este adevărată, atunci avem şirul de implicații

$$s \in D'(y) => ys \in R'(y) = D'(x) => xy \text{ este definit.}$$

Pentru reciprocă observăm că dacă $s \in D'(y)$ şi $ys \in D'(x)$, atunci $ys \in D'(x) \cap R'(y)$.

Deoarece $D'(x) \cap R'(y) \neq \phi$, şi acțiunea este subordonată unei partiții, avem $D'(x) = R'(y)$, de unde rezultă $(\psi(x), \psi(y)) \in G^{(2)}$, şi deci $(x, y) \in G^{(2)}$.

Propoziția 1.14. Dacă $(x,s) \to xs$ este o acțiune adevărată a grupoidului G pe o mulțime S, considerăm relația definită prin

$s \sim t <=> (\exists) x \in G$ astfel încât $xt = s$

şi definim orbita [s] pentru s $\in$ S ca fiind

$$[s] = \{xs : s \in D'(x)\}.$$

Atunci relaţia ~ este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie. Verificăm doar reflexivitatea. Fie s $\in$ S şi x $\in$ G astfel încât $(x,s) \in F$. Atunci s $\in$ D'(x), xs $\in$ D'(x^{-1}) şi $s = (x^{-1}x)s$.

<u>*Teorema 1.15.*</u> (***Teorema lui Cayley***)

Fie G un grupoid. Considerăm următoarea partiţie a lui G, $\mathsf{P} = \{G^u\}_{u \in U_G}$.

Dacă $x \in G$ definim $\psi(x) \in \mathrm{Inj}(G, \mathsf{P})$ prin $\begin{array}{l}\psi(x) : G^{d(x)} \to G \\ \psi(x)(y) = xy\end{array}$

Atunci ψ este un morfism adevărat, şi de fapt un izomorfism al lui G pe un subgrupoid al lui $\mathrm{Inj}(G, \mathsf{P})$.

Demonstraţie. Evidentă.

<u>*Observaţie 1.16*</u>. Conform exemplului 1.2.9 grupoidul $\mathrm{Inj}(G, \mathsf{P})$ poate fi identificat cu grupoidul Iso(G, r, U_G), şi deci teorema lui Cayley mai poate fi enunţată şi astfel: Orice grupoid G este izomorf cu un subgrupoid al lui Iso(S, p, U) pentru un anumit fibrat p : S $\to$ U.

<u>*Propoziţia 1.17.*</u> Pentru $x \in G$ considerăm $D'(x) = \{d(x)\}$ şi pentru $s \in D'(x)$ definim $x * s = r(x)$. Atunci * este o acţiune adevărată a lui G pe U.

Demonstraţie. Evidentă.

<u>*Observaţie 1.18*</u> În restul lucrării prin acţiune $(x,s) \to xs$ [: F $\to$ S] vom înţelege o acţiune adevărată şi având în plus, proprietatea că $S = \bigcup_{x \in G} D'(x) = \bigcup_{x \in G} F_x$.

Pentru astfel de acţiuni putem defini o aplicaţie p : S $\to$ U_G prin p(s) = d(x), unde x este un element din G cu proprietatea că (x, s) $\in$ F. Aplicaţia p se notează cu r, când nu există pericol de confuzie cu aplicaţia scop r a grupoidului. Cu această observaţie putem defini acţiunile în următorul mod (notând mulţimea F cu G∗S):

Definiţie 1.19. Fie G un grupoid şi S o mulţime. Spunem că *G acţionează la stânga pe S*, sau că *S este un G-spaţiu la stânga*, dacă există o surjecţie $r:S\to U_G$ şi o aplicaţie $(x,s)\mapsto xs$ definită pe $G*S=\{(x,s):d(x)=r(s)\}$ astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiţii:

(1) $r(xs)=r(x)$, $(x,s)\in G*S$

(2) $(x,s)\in G*S,(y,x)\in G^{(2)}\Rightarrow \begin{cases}(yx,s),(y,xs)\in G*S\\ y(xs)=(yx)s\end{cases}$

(3) $r(s)s=s, s\in S$

Acţiunile la dreapta şi G-spaţiile la dreapta se definesc similar , dar vom nota cu d aplicaţia de la S la U_G şi cu S∗G = {(s , x) : d(s) = r(x) }.

Observaţie 1.20. 1. Dacă G acţionează la stânga (respectiv la dreapta) pe S , atunci G∗S (resp. S∗G) are o structură de grupoid şi se numeşte *grupoidul acţiune* la stânga (resp. la dreapta) . Spaţiul perechilor compozabile $(G*S)^{(2)}$, (resp. $(S*G)^{(2)}$) se defineşte ca

$$\{((x_1,s_1),(x_2,s_2)) : s_1=x_2s_2\} \text{ (resp. } \{((s_1,x_1),(s_2\, x_2)) : s_2=s_1x_1\} \text{),}$$

iar operaţiile

$$(x_1,x_2s_2)(x_2,s_2):=(x_1x_2,s_2) \text{ şi } (x,s)^{-1}:=(x^{-1},xs)$$

$$\text{(resp. } (s_1,x_1)(s_1x_1,x_2):=(s_1,x_1x_2) \text{ şi } (s,x)^{-1}:=(sx,x^{-1}) \text{).}$$

Spaţiul unităţilor lui G∗S (resp. S∗G) se identifică cu S prin aplicaţia s ↔ (r(s) , s) (resp. s ↔ (s , d(s))) deoarece

$$r(x,s)=(x,s)(x,s)^{-1}=(x,s)(x^{-1},xs)=(xx^{-1},xs)=(r(x),xs)=(r(xs),xs),$$

$$d(x,s)=(x,s)^{-1}(x,s)=(x^{-1},xs)(x,s)=(x^{-1}x,s)=(d(x),s)$$

(resp.:

$$r(s,x)=(s,x)(s,x)^{-1}=(s,x)(sx,x^{-1})=(s,xx^{-1})=(s,r(x))$$

$$d(s,x)=(s,x)^{-1}(s,x)=(sx\ ,x^{-1})(s,x)=(sx,x^{-1}x)=(sx,d(x))=(sx,d(sx))\ ).$$

Grupoizii S∗G şi G∗S generalizează grupoizii din exemplul 1.2.3.

Scriem G \ S (resp. S / G) pentru spaţiul cât obţinut prin factorizarea la următoarea relaţie de echivalenţă: $s \sim t \iff (\exists)\ x \in G$ astfel încât $xs = t$ (resp. $sx = t$).

2. Punem în evidenţă grupoidul obţinut prin acţiunea la dreapta prin translaţie a lui G asupra lui însuşi. În acest caz $G*G = G^{(2)}$, iar structura de grupoid este aceeaşi cu cea din exemplul 1.2.4. Unităţile (x , d(x)) şi (y , d(y)) sunt echivalente dacă şi numai dacă r(x) = r(y). Astfel, $G^{(2)}$ poate fi privit ca o relaţie de echivalenţă pe G ale cărei clase de echivalenţă sunt spaţiile G^u , $u \in U_G$.

<u>Definiţie 1.21.</u> Fie S un G-spaţiu la stânga , şi fie S^{op} tot spaţiul S, dar pe care se consideră acţiunea lui G la dreapta , definită după cum urmează : $d^{op} = r$ şi $sx := x^{-1}s$. Se notează cu

$$S^{op} * S := \{(s,t) : d^{op}(s) = r(t)\} = \{(s,t) : r(s) = r(t)\}$$

şi se defineşte *acţiunea diagonală* prin :

$$x(s,t) := (sx^{-1}, sxt) = (xs, xt)\ , \text{dacă}\ d(x) = d^{op}(s) = r(t)\ .$$

Notăm spaţiul cât G \ (S∗S) prin $\underline{G}$ sau prin $S^{op} *_G S$, iar elementele sale prin [s , t] , pentru $(s , t) \in S^{op} * S$. Rezultă că avem [s x , t] = [s , x t] . $\underline{G}$ are o structură de grupoid definită prin :

$$\underline{G}^{(2)} := \{([s_1, t_1],[s_2, t_2]) : (\exists) x \in G\ \text{cu proprietatea}\ s_2x = t_1\}$$

$$[s_1, t_1][s_2, t_2] = [s_1, t_1][t_1x^{-1}, t_2] = [s_1, t_1][t_1, x^{-1}t_2] := [s_1, x^{-1}t_2] = [s_1x^{-1}, t_2]$$

$$[s, t]^{-1} := [t, s]$$

Aplicaţiile de proiecţie sunt :

$$\underline{r}([s,t]) = [s,t][s,t]^{-1} = [s,t][t,s] = [s,s]$$

$$\underline{d}([s,t]) = [s,t]^{-1}[s,t] = [t,s][s,t] = [t,t]$$

Spațiul unităților $U_{\underline{G}}$ se identifică cu G \ S prin aplicația [s] $\leftrightarrow$ [s , s], şi astfel putem scrie $\underline{r}([s,t])=[s]$ şi $\underline{d}([s,t])=[t]$.

S devine $\underline{G}$ –spațiu la dreapta dacă punem :

$$d : S \to G \setminus S \approx U_{\underline{G}} \;,\; d(s) = [s]$$

$$S * \underline{G} = \{ (q,[s,t]) : d(q)=\underline{r}([s,t])\} = \{ (q,[s,t]) : [q]=[s] \} .$$
$$= \{ (q,[s,t]) : (\exists) x \in G, q = x s = s x^{-1} \}$$

$$q\,[q\,x , t] = q\,[q , x\,t] := x\,t .$$

Acțiunile lui G şi $\underline{G}$ comută :

$$x\,(q[s,t]) = x\,(q[qx_1,t]) = x\,(x_1 t) = (xx_1)t = x\,q[(x\,q)(xx_1),t]$$
$$= x\,q[(qx^{-1})(xx_1),t] = xq[qx_1,t] = (xq)[s,t]$$

Dându-se un G-spațiu la dreapta S, putem transforma S într-un G-spațiu la stânga, notat de asemenea cu S^{op} , prin formula $x\,s := sx^{-1}$. Aplicația r^{op} este d . Putem forma grupoidul $\underline{G}$ = $S *_G S^{op}$, care este câtul lui $S * S^{op}$ prin acțiunea diagonală a lui G , şi putem observa că $S *_G S^{op}$ acționează la stânga pe S . Din nou , această acțiune comută cu acțiunea inițială a lui G .

Grupoidul $\underline{G}$ = $S^{op} *_G S$ (resp. $S *_G S^{op}$) asociat G-spațiului la stânga (resp. la dreapta) S se numeşte *grupoidul de imprimitivitate* al perechii (S, G), sau simplu al lui S dacă rolul lui G este clar .

Grupoidul *G acționează liber pe S* (la stânga) dacă x s = s implică x = d(x) = r(s). Analog se defineşte noțiunea de acțiune liberă la dreapta.

<u>Definiție 1.22.</u> Fie G şi H doi grupoizi . Spunem că G şi H sunt *echivalenți* dacă există o mulțime S , o acțiune la stânga , liberă a lui G pe S și o acțiune la dreapta , liberă a lui H pe S astfel încât:

1. cele două acțiuni comută
2. aplicația r induce o bijecție între S / H şi U_G i.e $r(s_1) = r(s_2)$ <=> $(\exists)$ x în H astfel încât $s_1 x = s_2$

3. aplicația d induce o bijecție între $G \setminus S$ şi U_H i.e $d(s_1)=d(s_2)$ <=> (∃) $y \in G$ astfel încât $y s_1 = s_2$

S se numeşte echivalență între G şi H sau simplu (G , H)–echivalență .

Observație 1.23. Dacă G acționează liber pe S la stânga, iar $\underline{G}$ este grupoidul construit anterior atunci S este o $(G,\underline{G})$-echivalență .

Exemple de echivalențe 1.24.

1. Presupunem că G este grupoidul trivial peste {1,2,3,…,n}, (deci $G=\{1,2,3,...,n\}\times\{1,2,3,...,n\}$), H este $\{1,2,3,...,m\}\times\{1,2,3,...,m\}$, şi S este $\{1,2,3,...,n\}\times\{1,2,3,...,m\}$. Aplicația r este definită prin r(k,l):=k , în timp ce aplicația d prin d(k,l):=l . Dacă $(i,j)\in G$ şi $(j,k)\in S$, atunci $(i,j)(j,k):=(i,k)$ şi analog se defineşte acțiunea (la dreapta) a lui H pe S . Se verifică uşor că S este o (G,H)-echivalență .

2. Fie G un grupoid şi T o submulțime a lui U_G a cărei saturată [T] = $d(r^{-1}(T))=r(d^{-1}(T))$ este întreaga mulțime U_G . Fie $S=G^T$. Deoarece d(S) = U_G , G acționează la dreapta pe S prin translație (multiplicare) la dreapta. Analog , pentru că r(S) = T (T este spațiul unităților lui $G|_T$) , este uşor de observat că $G|_T$ acționează pe S la stânga prin multiplicare la stânga , şi că S este o $(G|_T, G)$ -echivalență.

3. Un caz particular al exemplului de mai sus se obține punând T = U_G . În acest caz rezultă că G este o (G,G)-echivalență.

4. Noțiunea de echivalență generalizează noțiunea de izomorfism. Dacă avem $\varphi: H \to G$ un izomorfism, atunci G devine o (G,H)-echivalență considerând că G acționează pe G prin multiplicare la stânga, iar acțiunea lui H pe G este dată prin : xy = xφ(y).

Observaţii 1.25. 1. Dacă G şi H sunt echivalenţi via S , atunci H este izomorf cu $\underline{G}$. Într-adevăr ;dacă $[s,t]\in\underline{G}$, atunci $r(s)=d^{op}(s)=r(t)$. Astfel există un unic x astfel încât tx =s .Se verifică uşor că aplicaţia $[s,t]\mapsto x$ este un izomorfism .

2. Dându-se un grupoid G şi un G-spaţiu liber la stânga S, este uşor de demonstrat că G şi $\underline{\underline{G}}$ sunt izomorfi, unde $\underline{\underline{G}} = \underline{(\underline{G})}$.

3. Echivalenţa de grupoizi este o relaţie de echivalenţă . Într-adevăr , dacă S este o (G,H)-echivalenţă , şi T este o (H,K)-echivalenţă , atunci $S *_H T$ este o (G,K)-echivalenţă, unde $S *_H T$ este spaţiul cât obţinut prin factorizarea lui S relativ la acţiunea diagonală a lui H: $((s,t),x)\to(sx,xt)$.

Propoziţie 1.26. 1) Dacă G este un grupoid tranzitiv, atunci pentru fiecare unitate $u\in U_G$, G şi $G|_{\{u\}}$ sunt echivalenţi.

2) Fiecare grupoid este echivalent cu un fibrat grupal.

Demonstraţie. A doua afirmaţie rezultă din prima, pentru că echivalenţa respectă reuniunile disjuncte . Prima afirmaţie este un caz particular al exemplului 1.24.2 - este suficient să considerăm T $=\{u\}$. Faptul că G este tranzitiv este echivalent cu [u] = U_G . ■

Propoziţie 1.27. Doi grupoizi sunt echivalenţi dacă şi numai dacă sunt similari.

Demonstraţie. Deoarece ambele noţiuni respectă reuniunile disjuncte , putem presupune că cei doi grupoizi sunt tranzitivi. Vom ţine de asemenea seama de faptul că două grupuri sunt echivalente sau similare dacă şi numai dacă sunt izomorfe. Este suficient să observăm că un grupoid tranzitiv este similar şi echivalent cu $G|_{\{u\}}$, $(\forall)u\in G$ ■.