2. MĂSURI INVARIANTE PE GRUPOIZI

În acest capitol vom stabili (în 2.3 şi 2.4) câteva rezultate legate de existenţa, continuitatea şi unicitatea sistemelor Haar. În demonstraţia acestor rezultate un rol important îl joacă următoarea lemă demonstrată de Mackey (Lemma 1.1 [47]): Dacă X şi Y sunt două spaţii local compacte cu bază numărabilă, atunci pentru fiecare aplicaţie continuă surjectivă $\pi : X \to Y$ există o secţiune boreliană regulată, i.e. o aplicaţie boreliană $\rho : Y \to X$ astfel încât $\pi(\rho(y)) = y$ pentru orice $y \in Y$ şi $\rho(K)$ este relativ compactă în X pentru orice compact K din Y.

Primele două subcapitole au caracter expozitoriu. În 2.1 sunt prezentate noţiunile de grupoid borelian şi grupoid cu măsură în sensul lui Mackey (fără condiţia de ergodicitate) şi sunt enunţate rezultatele lui Hahn referitoare la existenţa măsurii Haar pentru astfel de grupoizi. În 2.2 sunt prezentaţi grupoizii topologici, precum şi noţiunea de sistem Haar (continuu) pe un grupoid local compact introdusă de Renault în [68].

2.1. GRUPOIZI BORELIENI

Înainte de a da definiţia unui grupoid măsurabil, enunţăm câteva rezultate de teoria măsurii şi stabilim nişte notaţii şi convenţii. Numim *spaţiu borelian* o mulţime S împreună cu o σ -algebră de părţi, B(S), a lui S, numite *mulţimi boreliene*. (S, B(S)) se numeşte *numărabil separat* dacă există un şir de mulţimi boreliene $(E_i)_i$ care separă punctele lui S: i.e pentru orice pereche de puncte distincte ale lui S există $i \in \mathbf{N}$ astfel încât E_i conține unul din puncte şi nu conține pe celălalt. O funcție de la un spațiu borelian la altul se numeşte *boreliană* dacă imaginea inversă a oricărei mulțimi boreliene este boreliană. O funcție boreliană bijectivă pentru care şi inversa ei este boreliană se numeşte *izomorfism borelian*. În cazul unui spațiu metric separabil şi complet vom considera pe post de mulțimi boreliene mulțimile aparținând σ-algebrei generate de mulțimile deschise. (S, B(S)) se numeşte *spațiu standard* dacă este izomorf (Borel) cu o mulțime boreliană a unui spațiu metric separabil şi complet. *Spațiu analitic* este un spațiu borelian numărabil separat care este imaginea printr-o funcție boreliană a unui spațiu standard. Prin *măsură* pe spațiul S, înțelegem o măsură pozitivă , numărabil aditivă , σ -finită . Dacă $s \in S$, se notează cu δ_s măsura Dirac în s. Pe spațiul măsurilor pe S considerăm relația de echivalență:

$$\mu \sim \lambda \overset{def}{<=>} \left(\mu(E)=0 <=> \lambda(E)=0,\ (\forall)E \in \mathcal{B}(S) \right)$$

$[\mu] \overset{not}{=} \{\lambda : \lambda \sim \mu\}$ este numită *clasa măsurii μ.* Pentru X, Y spații boreliene, $p : X \to Y$ boreliană, μ măsură finită pe X se notează cu $p_*(\mu)$ imaginea lui μ prin p ($p_*(\mu)(E) = \mu(p^{-1}(E))$).

Vom folosi următoarea teoremă (2.1/pg. 5 [41] sau 4.4 [33]) pentru a defini dezintegrarea unei măsuri:

Fie (S, λ) un spațiu de probabilitate, analitic, T un alt spațiu analitic, $p : S \to T$ o aplicație boreliană surjectivă şi fie $\nu \sim \lambda$. Fie P o funcție boreliană pozitivă astfel încât $P=\frac{d\nu}{d\lambda}$ şi fie $\tilde{\lambda}=p_*(\lambda)$. Atunci există o funcție $t \mapsto \nu_t$ de la T la spațiul măsurilor pe S cu proprietățile:

(1) $f \geq 0$ boreliană pe $S => t \mapsto \int f\, d\nu_t\ [:T \to \overline{R}]$ boreliană .

(2) $\nu_t\left(S - p^{-1}(\{t\})\right)=0$, $(\forall)\, t \in T$.

(3) $(\forall)f$ boreliană pe $S => \int f\, d\nu = \int \left(\int f\, d\nu_t \right) d\tilde{\lambda}(t)$.

Aplicația $t \mapsto \nu_t$ este determinată până la mulțimi boreliene $\tilde{\lambda}$ –nule. $\tilde{\lambda}$ -a.p.t. λ_t sunt probabilități (am considerat că $t \mapsto \lambda_t$ este aplicația obținută înlocuind ν cu λ) şi $P = \frac{d\nu_t}{d\lambda_t}$ pentru $\tilde{\lambda}$ -a.p.t. $t \in T$.

Spunem că $\lambda = \int \lambda_t \, d\tilde{\lambda}(t)$ este o *p-dezintegrare a lui λ*, iar $\nu = \int \nu_t \, d\tilde{\lambda}(t)$ este o *p-dezintegrare a lui ν relativ la* $\tilde{\lambda}$.

Definiție 2.1.1. G se numeşte *grupoid borelian* dacă este înzestrat cu o structură boreliană astfel încât $G^{(2)}$ să fie mulțime boreliană în $G \times G$ şi aplicațiile :

$$x \mapsto x^{-1} \; [:G \to G] \, , \; (x, y) \mapsto xy \; [:G^{(2)} \mapsto G \;]$$

să fie boreliene.

Dacă structura boreliană este standard, G se numeşte *grupoid standard*, iar dacă este analitică G se numeşte *analitic*.

Se observă dacă G este grupoid borelian, atunci r şi d sunt boreliene, iar dacă G este analitic atunci şi spațiul unităților $U_G = r(G) \subset G$ este analitic.

Definiție 2.1.2. Fie G un grupoid analitic şi fie C o clasă de măsuri pe G.

1. Clasa C se numeşte *simetrică* dacă există $\lambda \in C$ simetrică, i.e există $\lambda \in C$ cu $\lambda = \lambda^{-1}$ (λ^{-1} fiind imaginea lui λ prin aplicația de inversare $x \mapsto x^{-1}$).

Este uşor de observat că dacă C este simetrică şi $\nu \in C$, atunci $\nu \sim \nu^{-1}$. Pe de altă parte dacă o măsură pe G ν are proprietatea că $\nu \sim \nu^{-1}$, atunci clasa $[\nu]$ conține o probabilitate simetrică.

2. Fie C este o clasă simetrică, $\lambda \in C$ o probabilitate şi $\lambda = \int \lambda^u \, d\tilde{\lambda}(u)$ r-dezintegrarea lui λ peste U_G, unde $\tilde{\lambda} = r_*(\lambda)$. λ se numeşte *cvasi invariantă (la stânga)* dacă există o mulțime boreliană $U_1 \subset U_G$ cu complementara de măsura $\tilde{\lambda}$ -nulă astfel încât

$$x \in G|_{U_1} \Rightarrow x\,\lambda^{d(x)} \sim \lambda^{r(x)},$$

unde $x\lambda^{d(x)}$ este măsura definită prin: $\int f(y)d\left(x\lambda^{d(x)}\right)(y) = \int f(xy)d\lambda^{d(x)}(y)$, pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G.

3. O clasă simetrică C se numeşte *invariantă (la stânga)* dacă există o probabilitate cvasi invariantă (la stânga) în C.

4. Dacă C este invariantă, atunci perechea (G, C) se numeşte *grupoid cu măsură*.

5. Dacă (G,C) este un grupoid cu măsură şi dacă $U \subset U_G$ este o mulțime boreliană cu complementara de măsură $\tilde{\lambda}$-nulă, atunci grupoidul cu măsură $(G|_U, C)$ se numeşte o *contracție (sau reducere) neesențială* a lui G.

6. Un grupoid cu măsură (G, [λ]) se numeşte *ergodic (sau grup virtual)* dacă singurele funcții boreliene $\varphi : U_G \to \mathbf{R}$ care satisfac $\int \left|\varphi \circ r - \varphi \circ d\right| d\lambda = 0$ sunt cele constante $\tilde{\lambda}$-a.p.t., sau echivalent, dacă orice mulțime boreliană $A \subset U_G$ *aproape invariantă* este fie de măsură $\tilde{\lambda}$-nulă, fie cu complementara de măsură $\tilde{\lambda}$-nulă (unde prin mulțime aproape invariantă, sau *aproape saturată*, înțelegem o mulțime boreliană $A \subset U_G$ cu $\lambda\left(d^{-1}(A) \Delta r^{-1}(A)\right) = 0$).

7. Pentru orice mulțime boreliană $E \subset U_G$ saturata $[E] = d(r^{-1}(E)) = r(d^{-1}(E))$ este analitică, şi deci măsurabilă în raport cu orice măsură pe U_G. Grupoidul cu măsură (G, [λ]) se numeşte *esențial tranzitiv* dacă există o orbită [u] ($u \in U_G$) cu complementara de măsură $\tilde{\lambda}$-nulă.

8. Un grupoid ergodic (G, C) care nu este esențial tranzitiv se numeşte *propriu ergodic*.

Enunțăm în continuare definiții echivalente pentru noțiunile definite mai sus şi fixăm nişte notații.

1) Dacă (G, C) este un grupoid cu măsură şi $\lambda \in C$ este o probabilitate cu r-dezintegrarea $\int \lambda^u d\tilde{\lambda}(u)$, atunci există o submulțime boreliană $U_0 \subset U_G$ astfel încât

(i) $u \in U_0 \Rightarrow \lambda^u(G) = 1$.

(ii) $u \in U_0 \Rightarrow \lambda^u(G - G|_{U_0}) = 0$.

(iii) $u \in U_0 \Rightarrow \lambda^u(G^u) = 1$.

(iv) $x \in G|_{U_0} \Rightarrow x\lambda^{d(x)} \sim \lambda^{r(x)}$.

(Lemma 2.4/ pg. 6 [41]). Deci condiția de cvasi invarianță impusă probabilității $\lambda \in C$ poate fi întărită.

2) Dacă C este o clasă de măsuri pe un grupoid analitic G şi $\lambda \in C$ este o probabilitate simetrică, atunci $r_*(\lambda) = d_*(\lambda)$. Putem defini o condiție de cvasi invarianță la dreapta, utilizând d-dezintegrarea lui λ, $\int \lambda_u \, d\tilde{\lambda}(u)$, astfel: λ se numeşte *cvasi invariantă la dreapta* dacă există o mulțime boreliană $U_1 \subset U_G$ cu complementara de măsura $\tilde{\lambda}$ -nulă astfel încât

$$x \in G|_{U_1} \Rightarrow \lambda_{r(x)}x \sim \lambda_{d(x)},$$

unde $\lambda_{r(x)}x$ este măsura definită prin: $\int f(y)d(\lambda_{r(x)}x)(y) = \int f(yx)d\lambda_{r(x)}(y)$, pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G. Dacă λ este cvasi invariantă la dreapta, atunci clasa C se numeşte invariantă la dreapta. Se demonstrează că o clasă de măsuri simetrică pe un grupoid analitic G este invariantă la stânga dacă şi numai dacă este invariantă la dreapta, observând că între r-dezintegrarea şi d-dezintegrarea lui λ există următoarea legătură: $\lambda_u = (\lambda^u)^{-1}$ $\tilde{\lambda}$ -a.p.t. $u \in U_G$.

3) Dacă C este o clasă invariantă de măsuri pe un grupoid analitic G şi $\lambda \in C$ este o probabilitate simetrică, atunci clasa lui $\tilde{\lambda} = r_*(\lambda) = d_*(\lambda)$ depinde doar de C şi se notează cu $\tilde{C}$. Dacă $\int \lambda^u \, d\tilde{\lambda}(u)$ este r-dezintegrarea lui λ iar $\int \lambda_u \, d\tilde{\lambda}(u)$ este d-dezintegrarea lui λ, atunci $\lambda^{(2)} = \int \lambda_u \times \lambda^u \, d\tilde{\lambda}(u)$ defineşte o măsură pe $G^{(2)}$. $[\lambda^{(2)}]$ depinde tot doar de C şi se notează cu $C^{(2)}$.

4) A. Ramsay a demonstrat că grupoidul cu măsură (G, $[\lambda]$) este ergodic dacă şi numai dacă orice submulțime analitică saturată a spațiului unităților este fie de măsură $\tilde{\lambda}$ -nulă, fie are complementara de măsură $\tilde{\lambda}$ -nulă. (Theorem 4.2/pg. 277 [62])

5) Orice grupoid esențial tranzitiv este ergodic (Theorem 4.6/ pg. 278 [62]).

6) Un grupoid ergodic (G, [λ]) este propriu ergodic dacă şi numai dacă $\widetilde{\lambda}$ ([u]) = 0 pentru orice u ∈ U_G. (Lemma 4.8/pg. 278 [62]).

7) Dacă (G,[λ]) este esenţial tranzitiv şi $\lambda = \int \lambda^u \, d\widetilde{\lambda}(u)$ r- dezintegrarea lui λ, atunci $\widetilde{\lambda} \sim d_*(\lambda^u)$ $\widetilde{\lambda}$ -a.p.t. u ∈ U_G(Lemma 4.5/pg. 277 [62]).

Exemple 2.1.3. 1. Dacă G este un grup local compact cu bază numărabilă şi h este măsura Haar la stânga pe G, atunci (G, [h]) este grupoid cu măsură.

2. Fie g un grup local compact cu bază numărabilă şi S un g-spaţiu analitic, aceasta însemnând că există o acţiune boreliană $(s, x) \mapsto sx$ [: $S \times g \to S$]. Pentru $E \subset S$ se notează cu Ex mulţimea $\{sx \in S : s \in E\}$. O măsură μ pe S se numeşte *cvasi invariantă pentru acţiunea lui g* dacă pentru orice $x \in g$ şi orice $E \in B(S)$ rezultă $\mu(Ex) = 0$ dacă şi numai dacă $\mu(E) = 0$. μ se numeşte invariantă dacă $\mu(Ex) = \mu(E)$ pentru orice $x \in g$ şi orice $E \in B(S)$. Se spune că acţiunea lui g pe (S,μ) este *ergodică* dacă şi numai dacă orice mulţime boreliană $E \subset S$ care satisface Ex = E pentru orice x ∈ g fie are măsura μ -nulă fie are complementara de măsură μ -nulă. Conceptul, aparent mai slab, obţinut punând condiţia ca orice mulţime boreliană $E \subset S$ care satisface $1_{Ex} = 1_E$ a.p.t. x, relativ la măsura Haar pe g, să fie ori μ -nulă ori să aibă complementara de măsură μ -nulă, este echivalent cu ergodicitatea. Fie h măsura Haar la stânga pe g. Considerăm $S \times g$ înzestrat cu structura de grupoid indusă de acţiunea lui g pe S, structură definită în exemplul 1.2.3. Atunci ($S \times g$, [$\mu \times h$]) este un grupoid cu măsură. Acest grupoid este ergodic dacă şi numai dacă acţiunea lui g pe (S,μ) este ergodică. (Theorem 4.3/ pg. 276 [62]).

3. Fie S un spaţiu analitic şi $\mathsf{E} \subset S \times S$ o mulţime boreliană care în plus, este relaţie de echivalenţă. Presupunem date o probabilitate μ şi o familie de probabilităţi $\{\alpha_s, s \in S\}$care satisfac următoarele condiţii:

(i) $\alpha_s([s]) = 1$ μ-a.p.t. $s \in S$, unde $[s] = \{t : (s, t) \in \mathsf{E}\}$.

(ii) $E \in B(S) \Rightarrow s \mapsto \alpha_s(E)$ boreliană.

(iii) Există o mulţime $S_0 \in B(E)$ cu complementara μ-nulă astfel încât

$$(s, t) \in \mathsf{E} \cap (S_0 \times S_0) \Rightarrow \alpha_s \sim \alpha_t$$

(iv) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe E avem

$$\int f(s,t)d\alpha_s(t)d\mu(s) = 0 \Rightarrow \int f(t,s)d\alpha_s(t)d\mu(s) = 0$$

Dacă aceste patru condiții sunt îndeplinite spunem că $(S, \mathsf{E}, \mu, \{\alpha_s\})$ este o *relație de echivalență măsurabilă*. Dacă, în plus,

(v) Pentru orice $E \in B(S)$ avem

$$\int |1_E(s) - 1_E(t)| d\alpha_s(t)d\mu(s) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0.$$

atunci $(S, \mathsf{E}, \mu, \alpha_s\})$ se numeşte *relație de echivalență ergodică*. Considerăm pe E structura de grupoid din exemplul 1.2.6. Definim pe E măsura λ prin

$$\lambda(E) = \int 1_E(s,t)d\alpha_s(t)d\mu(s) \text{pentru } E \in B(\mathsf{E}).$$

Atunci $(\mathsf{E}, [\lambda])$ este un grupoid principal cu măsură, care este ergodic dacă şi numai dacă relația de echivalență este ergodică [41]. Reciproc, dacă $(G, [\lambda])$ este un grupoid cu măsură principal şi $\int \lambda^u d\tilde{\lambda}(u)$ este r-dezintegrarea lui λ, atunci măsurile λ^u sunt concentrate pe $\{u\} \times [u]$, deci sunt de forma $\delta_u \times \alpha_u$. $(U_G, G, \tilde{\lambda}, \{\alpha_u\})$ este relație de echivalență măsurabilă.

4. Fie (G, C) un grupoid cu măsură, $\lambda \in C$ o probabilitate şi $(r,d)(G) \subset U_G \times U_G$ grupoidul principal asociat grupoidului G. Atunci $((r,d)(G), [(r,d)_*(\lambda)])$ este grupoid cu măsură principal. Clasa $[(r,d)_*(\lambda)]$ nu depinde de alegerea probabilității λ în C, $(r,d)_*(\lambda)^{\sim} = \tilde{\lambda}$ (prin identificarea spațiului unităților grupoidului $(r,d)(G)$ cu U_G). Grupoidul $((r,d)(G), [(r,d)_*(\lambda)])$ este ergodic dacă şi numai dacă $(G, [\lambda])$ este ergodic.([41], [62])

5. Fie (G, C) un grupoid cu măsură. Cu structura din exemplul 1.2.4 $G^{(2)}$ este de asemenea un grupoid. $G^{(2)} \subset G \times G$ este analitic (standard) dacă G este analitic (standard) (Lemma 3.3/pg. 9[41]). $(G^{(2)}, C^{(2)})$ este grupoid cu măsură (Proposition 3.4/pg 9 [41]). Pentru a arăta aceasta se consideră o probabilitate simetrică $\lambda \in C$ cu r-dezintegrarea $\lambda = \int \lambda^u d\tilde{\lambda}(u)$. Dacă se ia $\lambda_u = (\lambda^u)^{-1}$ pentru toate unitățile $u \in U_G$ şi

$\lambda^{(2)} = \int \lambda_u \times \lambda^u \, d\tilde{\lambda}(u)$, atunci [$\lambda^{(2)}$] este simetrică. Se identifică $U_{G^{(2)}}$ cu G şi $r_*^{(2)}\left(\lambda^{(2)}\right)$ cu λ. Dacă $r^{(2)}$-dezintegrarea lui $\lambda^{(2)}$ este $\lambda^{(2)} = \int \lambda^{(2)(x,d(x))} d\lambda(x)$, atunci putem lua $\lambda^{(2)(x,d(x))} = \delta_x \times \lambda^{d(x)}$. Prin calcul se verifică cvasi invarinţa lui $\lambda^{(2)}$. ($G^{(2)}$, $C^{(2)}$) este grupoid ergodic dacă şi numai dacă C este concentrată pe o orbită (Remark 4.5 [56]).

Definiţie 2.1.4. Fie G şi H doi grupoizi analitici şi $\varphi : G \to H$ o aplicaţie boreliană.

1. φ se numeşte *morfism strict* dacă, algebric, φ este morfism în sensul definiţiei 1.3.
2. Fie C o clasă invariantă de măsuri pe G. φ se numeşte *morfism (relativ la C)* dacă există o contracţie neesenţială a lui (G,C), $G|_U$, astfel încât restricţia lui φ la $G|_U$ să fie morfism strict.
3. Fie C o clasă invariantă de măsuri pe G. φ se numeşte *morfism a.p.t. (relativ la C)* dacă mulţimea $\{ (x, y) \in G^{(2)} : (\varphi(x), \varphi(y)) \in H^{(2)}$ şi $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)\}$ are complementara de măsură nulă relativ la $C^{(2)}$.

Teorema 2.1.5. Fie (G,C) un grupoid cu măsură, H un grupoid analitic şi $\varphi : G \to H$ un morfism a.p.t.. Atunci există un morfism $\varphi_0: G \to H$ astfel încât $\varphi_0 = \varphi$ a.p.t. C. (Lemma 5.1/pg. 283 [62]).

Definiţie 2.1.6. Fie (G,C) un grupoid cu măsură, H un grupoid analitic şi $\varphi_i : G \to H$ morfism pentru $i = \overline{1,2}$. Fie $U_i \subset U_G$ o mulţime cu complementară de măsură $\tilde{C}$-nulă astfel încât $\varphi_i |_{G_{U_i}}$ este un morfism strict de la $G|_{U_i}$ la H, pentru $i = \overline{1,2}$.

1. Dacă există o funcţie boreliană $\theta : U_G \to H$ şi o contracţie neesenţială $G|_U$ a lui G, cu $U \subset U_1 \cap U_2$, astfel încât $\varphi_2(x) = \theta(r(x))\varphi_1(x)\theta(d(x))^{-1}$ pentru orice $x \in G|_U$, atunci φ_1 şi φ_2 se numesc *slab echivalente (sau similare)*.

2. Dacă mulțimea U (din 1.) poate fi aleasă egală cu întreg spațiul U_G, atunci φ_1 şi φ_2 se numesc *strict similare*, iar θ *similaritate strictă*.

3. Dacă mulțimea U (din 1.) poate fi aleasă invariantă (saturată), atunci φ_1 şi φ_2 se numesc *echivalente*.

Observație 2.1.7. 1. Relațiile de "echivalență slabă", "echivalență", "similaritate strictă" sunt relații de echivalență.

2. Grupoizii slab echivalenți, echivalenți sau strict similari se definesc prin analogie cu grupoizii similari din cazul algebric.

Pentru grupoizii ergodici există două concepte de morfisme, şi în consecință două concepte de similaritate: Fie (G_1, C_1) şi (G_2, C_2) doi grupoizi ergodici şi φ un morfism borelian strict de la grupoidul borelian G_1 la grupoidul borelian G_2. În definiția lui Mackey [49], pentru ca φ să fie morfism se cere ca $\tilde{\varphi}^{-1}(N)$ să fie $\tilde{C}_1$-nulă pentru orice mulțime $N \in B(U_{G_2})$ care este $\tilde{C}_2$-nulă şi este conținută în reuniunea orbitelor nule. În definiția lui Ramsay [62] nu este necesar ca $\tilde{\varphi}^{-1}(N)$ să fie nulă dacă $[N] = d(r^{-1}(N))$ are complementara de măsură nulă.

În această lucrare nu vom folosi aceste noțiuni de morfisme corespunzătoare cazului special al grupoizilor ergodici, de aceea nu prezentăm rezultatele referitoare la grupoizii ergodici similari.

Fie (G,C) un grupoid cu măsură, $\lambda \in C$ o probabilitate simetrică cu r-dezintegrarea $\lambda = \int \lambda^u d\tilde{\lambda}(u)$. Cvasi invarianța măsurii λ înseamnă că există o contracție neesențială a lui G, $G_0 = G|_{U_0}$, astfel încât pentru $x \in G_0$

$$\left(f \mapsto \int f(y) d\lambda^{r(x)}(y)\right) \sim \left(f \mapsto \int f(xy) d\lambda^{d(x)}(y)\right)$$

(cele două integrale au aceleaşi funcții nule). P. Hahn a demonstrat în [41] că se poate transforma cvasi invarianța în invarianță, dacă se înlocuieşte λ cu o măsură $\nu \sim \lambda$, nu neapărat finită sau simetrică. În acest caz, dacă $\nu = \int \nu^u \, d\tilde{\lambda}(u)$ este r-dezintegrarea lui ν relativ la $\tilde{\lambda}$ pe G_0 atunci

$$\int f(y) d\nu^{r(x)}(y) = \int f(xy) d\nu^{d(x)}(y).$$

Enunțăm mai jos rezultatele lui P. Hahn referitoare la existența măsurii invariante.

Teoremă 2.1.8. Fie (G,C) un grupoid cu măsură, $\lambda \in C$ o probabilitate simetrică. Atunci există o mulțime boreliană $U_0 \subset U_G$, cu complementara de măsură $\tilde{\lambda}$-nulă, şi o funcție boreliană pozitivă $P : G|_{U_0} \to R_+^*$ astfel încât

(1) λ are cu r-dezintegrarea $\lambda = \int \lambda^u \, d\tilde{\lambda}(u)$ pe $G_0 = G|_{U_0}$ astfel încât $\lambda^u(G_0) = 1$ pentru orice $u \in U_0$.

(2) Pentru orice funcție boreliană $f : G_0 \to \mathbf{R}_+$ şi orice $x \in G_0$

$$\int f(y) P(y) d\lambda^{r(x)}(y) = \int f(xy) P(y) d\lambda^{d(x)}(y)$$

(3) $y \mapsto \dfrac{P(y)}{P(y^{-1})}$ este un morfism strict al lui G_0 în R_+^*.

În plus, dacă P' şi U_0' au de asemenea proprietățile (1)-(3), atunci există o funcție boreliană $\varphi: U_0 \cap U_0' \to R_+^*$ astfel încât $P'(y) = \varphi(d(y))P(y)$ λ-a.p.t. y. (Theorem 3.9/pg.17 [41]).

Definiție 2.1.9. Fie (G,C) un grupoid cu măsură, $\nu \in C$ şi $\mu \in \tilde{C}$ o probabilitate. Perechea (ν,μ) se numeşte *măsură Haar* pentru (G,C) dacă ν are o r-dezintegrare $\nu = \int \nu^u \, d\mu(u)$ relativ la μ astfel încât pentru o contracție neesențială, G_0, a lui G

$$\int f(y) d\nu^{r(x)}(y) = \int f(xy) d\nu^{d(x)}(y).$$

pentru orice $x \in G_0$ şi orice $f \geq 0$ boreliană pe G. (Definition 3.11/pg 18 [41])

Corolar 2.1.10. Pentru fiecare probabilitate $\mu \in \widetilde{C}$ există $\nu \in C$ astfel încât (ν, μ) este o măsură Haar.

Demonstrație. Fie $\lambda \in C$ o probabilitate simetrică. Fie P, U_0, $u \mapsto \lambda^u$ ca în teorema 2.1.8. Dacă pentru $E \in B(G)$ definim

$$\nu^u(E) = \int 1_E P\, d\lambda^u \text{ şi } \nu(E) = \int \nu^u(E) d\mu(u) = \int\int 1_E P\left(\frac{d\mu}{d\widetilde{\lambda}}\right)\circ r\, d\lambda ,$$

atunci (ν,μ) este o măsură Haar cu r-dezintegrarea $\nu = \int \nu^u\, d\mu(u)$.

Teorema 2.1.11. Fie (G,C) un grupoid cu măsură şi (ν,μ) o măsură Haar cu r-dezintegrarea $\nu = \int \nu^u\, d\mu(u)$ relativ la μ. Fie $U_1 \subset U_G$ o mulțime boreliană cu complementara $\widetilde{C}$-nulă. Atunci există o mulțime boreliană $U_0 \subset U_1$, cu complementara nulă, astfel încât pentru $G_0 = G|_{U_0}$ avem

(1) $u \in U_0 \Rightarrow \nu^u(G - G_0) = 0$.

(2) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G_0 şi orice $x \in G_0$,

$$\int_{G_0} f(y) d\nu^{r(x)}(y) = \int_{G_0} f(xy) d\nu^{d(x)}(y).$$

(3) Există un morfism borelian strict $\Delta : G_0 \to R_+^*$ astfel încât $\Delta^{-1} = \frac{d\nu^{-1}}{d\nu}$.

Mai mult, dacă $\Delta' = \left(\frac{d\nu^{-1}}{d\nu}\right)^{-1}$ este un alt morfism, atunci există o contracție neesențială a lui G_0, G_2 astfel încât $\Delta'|_{G_2} = \Delta|_{G_2}$. Dacă (ν_1,μ_1) este o altă o măsură Haar şi $\Delta_1 = \left(\frac{d\nu_1^{-1}}{d\nu_1}\right)^{-1}$, atunci există o funcție boreliană pozitivă φ pe U_G astfel încât

$$\varphi\circ d = \frac{d\nu_1}{d\nu}\frac{d\mu}{d\mu_1}\circ r \text{ şi } \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\varphi\circ d\,(d\mu_1/d\mu)\circ r}{\varphi\circ r\,(d\mu_1/d\mu)\circ d} \quad \text{C-a.p.t.}$$

(Corollary 3.14/pg. 19 [41]).

Definiție 2.1.12. Fie (G,C) un grupoid cu măsură şi (ν,μ) o măsură Haar. O funcție boreliană $\Delta = \left(\frac{d\nu^{-1}}{d\nu}\right)^{-1}$ care este morfism se numeşte *morfism modular* al măsurii Haar (ν,μ). (Definition 3.15/pg. 20 [41]).

Observații 2.1.13. 1. Morfismele modulare sunt determinate doar până la mulțimi boreliene de măsură nulă.

2. Din teorema 2.1.11 rezultă că morfismele modulare corespunzătoare la măsuri Haar diferite pe grupoidul cu măsură (G,C) sunt morfisme similare (sau slab echivalente).

3. Dacă(ν_1,μ_1) este o măsură Haar cu r-dezintegrarea $\nu_1 = \int \nu^u \, d\mu_1(u)$, $\mu \sim \mu_1$ este o altă probabilitate şi $\nu = \int \nu^u \, d\mu(u)$, atunci (ν,μ) este o măsură Haar.

4. Dacă P şi λ sunt ca în teorema 2.1.8, cea mai generală măsură Haar se obține astfel: alegem două funcții pozitive φ, ψ pe U_G astfel încât $\int \psi \, d\widetilde{\lambda} = 1$. Definim, pentru $E \in B(G)$ şi $F \in B(U_G)$

$$\nu(E) = \int_E P\varphi \circ d\,\psi \circ r\,d\lambda \text{ şi } \mu(F) = \int_F \psi\, d\widetilde{\lambda}.$$

Perechea (ν,μ) este o măsură Haar.

Fie $(G,[\lambda])$ un grupoid cu măsură. Fie $\mathsf{E} = (r,d)(G) \subset U_G \times U_G$ grupoidul principal asociat (ca în exemplul 2.1.3.4), $\lambda' = (r,d)_*(\lambda)$ şi $\lambda = \int \lambda_{u,v} \, d\lambda'(u,v)$ (r,d)-dezintegrarea lui λ. Aplicând teorema 2.1.8 grupoidului $(\mathsf{E}, [\lambda'])$, obținem

Lema 2.1.14. Există o mulțime boreliană $U_0' \subset U_G$ cu complementara nulă şi o funcție boreliană $q : G|U_0' \to R_+ - \{0\}$ astfel încât

(1) λ' are r-dezintegrarea $\lambda = \int \lambda'^u \, d\widetilde{\lambda}(u)$ pe $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}\,|_{U_0'}$.

(2) Pentru orice funcție boreliană $f : \mathsf{E}_0 \to R_+$ şi orice $(u,v) \in \mathsf{E}_0$,

$$\int f((u,v)(s,t))q(s,t)d\lambda'^{v}(s,t)=\int f(s,t)q(s,t)d\lambda'^{u}(s,t)$$

(3) $(u,v)\mapsto\dfrac{q(u,v)}{q(v,u)}$ este un morfism strict al lui E_0 în R_+^*.

Următoarea teoremă reprezintă o teoremă de structură pentru măsura Haar (Theorem 4.4/pg.23 [41] transpusă la stânga).

<u>*Teorema 2.1.15*</u> Există o mulțime boreliană $U_0 \subset U_G$ cu complementara nulă astfel încât

(a) $(u,v)\mapsto\dfrac{q(u,v)}{q(v,u)}$ este un morfism strict al lui $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}|_{U_0}$ pe R_+^*.

(b) $y\mapsto\dfrac{P(y)}{P(y^{-1})}=\Delta(y)=\dfrac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ este un morfism strict a lui $G_0 = G|_{U_0}$ pe R_+^*.

Dacă notăm $\delta=y\mapsto\dfrac{P(y)}{P(y^{-1})}\dfrac{q(d(y),r(y))}{q(r(y),d(y))}=\Delta(y)\dfrac{q(d(y),r(y))}{q(r(y),d(y))}$, atunci $\delta : G_0 \to R_+^*$ este un morfism strict.

Pe G_0 integrala $f\mapsto\int f(y)P(y)d\lambda(y)$ admite o (r,d)- dezintegrare

$$\int_{\mathsf{E}_0}\int_{G_0} f(y)d\nu_{u,v}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)$$

relativ la λ’ pe E_0 astfel încât

(1) Pentru orice (u, v) ∈ E_0, $\nu_{u,v}$ este o măsură σ- finită concentrată pe G_v^u.

(2) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe G_0, $(u,v)\mapsto\int_{G_0} f\,d\nu_{u,v}$ este boreliană (cu valori în $\overline{R}$).

(3) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe G_0,

$$\int_{G_0} f(xy)d\nu_{d(x),v}(y)=\int_{G_0} f(y)d\nu_{r(x),v}(y)$$

dacă (u, r(x)) şi (u,d(x)) sunt în E_0.

(4) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe G_0,

$$\delta(x)\int_{G_0} f(yx)d\nu_{u,r(x)}(y)=\int_{G_0} f(y)d\nu_{u,d(x)}(y)$$

dacă (d(x),v) şi (r(x),v) sunt în E_0.

Astfel $\nu_{u,u}$ este o măsură Haar la stânga pe G_u^u pentru orice $u \in U_0$ iar $\delta \mid G_u^u$ este funcția modulară corespunzătoare.

Utilizând această teoremă P. Hahn a caracterizat grupoizii ergodici cu măsură Haar finită (Theorem 5.1./pg.29 [41]):

Teorema 2.1.16. Fie (G,C) un grupoid ergodic. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) (G,C) este similar cu un grup compact.

(2) (G,C) are o măsură Haar finită.

(3) (G,C) este esențial tranzitiv şi există o probabilitate simetrică $\lambda \in C$ şi o măsură Haar $(\nu, \widetilde{\lambda})$ astfel încât în (r,d)-dezintegrare lui ν relativ la λ', din teorema 2.1.15, $\nu_{u,u}$ să fie finite pentru a.p.t. $u \in U_G$.

(4) Există o probabilitate simetrică $\lambda \in C$ astfel încât $(\lambda, \widetilde{\lambda})$ să fie măsură Haar.

2.2. GRUPOIZI LOCAL COMPACȚI

Definiție 2.2.1. Un *grupoid topologic* constă într-un grupoid algebric G împreună cu o topologie compatibilă cu structura de grupoid:

$G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ continuă

$G^{(2)} \ni (x, y) \mapsto xy \in G$ continuă (topologia de pe $G^{(2)}$ este cea indusă de G × G)

Un *morfism de grupoizi topologici* este un morfism în sens algebric care în plus, este continuu.

Observație 2.2.2. Dacă G este grupoid topologic atunci:

1. $x \mapsto x^{-1}\,[:G \to G]$ este homeomorfism
2. $r, d : G \to U_G$ sunt continue
3. Dacă în plus, G este Hausdorff, atunci U_G este închisă în G şi $G^{(2)}$ închisă în $G \times G$.
4. Dacă G' este un subgrupoid al lui G, atunci G' cu topologia indusă este grupoid topologic.

Definiție 2.2.3. 1. Grupoidul topologic G se numeşte *local trivial* dacă există $u_0 \in U_G$, o acoperire deschisă $(U_i)_i$ a lui U_G şi aplicațiile continue $\sigma_i : U_i \to G_{u_0}$ astfel încât $r \circ \sigma_i = 1_{U_i}$ pentru orice i.

2. Grupoidul topologic G se numeşte *slab local trivial* dacă există o acoperire deschisă $(U_i)_i$ a lui U_G, punctele $u_i \in U_G$ şi aplicațiile continue $\sigma_i : U_i \to G_{u_i}$ astfel încât $r \circ \sigma_i = 1_{U_i}$ pentru orice i.

Orice aplicație $\sigma_i : U_i \to G_{u_i}$ se numeşte *secțiune locală*, iar familia $\{\sigma_i : U_i \to G_{u_i}\}_i$ se numeşte *atlas de secțiuni* pentru G.

Observații 2.2.4. 1. Orice grupoid local trivial este tranzitiv.

2. Fie G un grupoid topologic şi U o submulțime deschisă în U_G. Dacă $\sigma : U \to G_{u_0}$ este o secțiune locală, atunci $(u, x, v) \overset{\Sigma}{\mapsto} (\sigma(u)x\sigma(v)^{-1})$ este un izomorfism topologic de la grupoidul trivial $U \times G_{u_0}^{u_0} \times U$ (înzestrat cu topologia produs) la G_U^U. Reciproc, dacă g este un grup topologic cu elementul unitate e şi $\Sigma : U \times g \times U \to G_U^U$ este un izomorfism topologic, atunci aplicația $\sigma : U \to G_{u_0}$ definită prin $\sigma(u) =$

$\Sigma(u,e,u_0)$, $u \in U_G$ este o secțiune locală. Deci un grupoid topologic este slab local trivial dacă şi numai dacă este "local izomorf" cu un grupoid trivial.

3. Pentru un grupoid slab local trivial orbitele sunt submulțimi simultan închise şi deschise ale spațiului unităților U_G.

4. Un grupoid slab local trivial şi tranzitiv este local trivial.

Vom considera doar grupoizii a căror topologie este local compactă (şi Hausdorff). Justificarea utilizării topologiei local compacte este dată de:

Teorema 2.2.5. Fie (G,C) un grupoid cu măsură (definiția 2.1.2). Atunci G are o contracție neesențială, G_0, care poate fi înzestrată cu o topologie local compactă în raport cu care devine grupoid topologic.(Theorem 4.1/pg. 330 [64])

2.2.6. Exemple de grupoizi topologici local compacți:

1. Orice grup topologic local compact este grupoid topologic local compact.

2. Orice spațiu local compact, văzut ca un grupoid cotrivial este grupoid topologic local compact.

3. Grupoidul care provine din acțiunea continuă a unui grup local compact pe un spațiu local compact este grupoid topologic local compact.

4. Dacă X este un spațiu local compact şi $R \subset X \times X$ este o relație de echivalență local compactă relativ la topologia de pe $X \times X$, atunci R este un grupoid local compact. În particular, orice grupoid trivial pe o mulțime local compactă este un grupoid topologic local compact.

Au existat diverse definiții pentru "măsuri Haar" pe grupoizi topologici local compacți ([77],[80],[81]). Prima a fost propusă de J. Westman în [81] pentru un grupoid local trivial:

Definiție 2.2.7. Fie G un grupoid local trivial local compact. Se numeşte *sistem de măsuri invariant la stânga* o familie de măsuri Radon pe G, $\{\nu_{u,v}, (u,v) \in U_G \times U_G\}$, cu următoarele proprietăți:

(1) $\nu_{u,v}$ este concentrată pe G_v^u pentru orice $(u,v) \in U_G \times U_G$.

(2) Pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$, aplicația

$$(u,v) \mapsto \int f(y)d\nu_{u,v}(y)\,[: U_G \times U_G \to C]$$

este continuă.

(3) Pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$, orice $x \in G$ şi orice $v \in U_G$

$$\int f(y)d\nu_{r(x),v} = \int f(xy)d\nu_{d(x),v}\ .$$

Definiție 2.2.8. Fie G un grupoid local trivial local compact. O funcție continuă $\Delta : G \to R_+^*$ se numeşte *funcție modulară* pentru G dacă şi numai dacă

(1) Δ este morfism de grupoizi.

(2) $\Delta|_{G_u^u}$ este funcția modulară a grupului local compact G_u^u pentru orice $u \in U_G$.

Observație 2.2.9. Din teorema 2.1.15 rezultă că orice grupoid cu măsură (G,C) are o contracție neesențială pe care admite un sistem de măsuri, $\{\nu_{u,v}, (u,v) \in U_G \times U_G\}$cu proprietățile (1) şi (3) din definiția 2.2.7.

Teorema 2.2.10. Fie G un grupoid local trivial local compact. Există o corespondență biunivocă între sistemele de măsuri invariante la stânga pe G şi funcțiile modulare pe G.(Theorem 2.6/pg. 623 [81]).

În cazul unui grupoid local compact oarecare, definiția utilizată în prezent a fost introdusă de J. Renault în [68]:

Definiție 2.2.11. Numim *sistem Haar (continuu)* pe grupoidul topologic local compact G o familie de măsuri Radon pozitive pe G $\{\nu^u, u \in U_G\}$ cu proprietățile:

(1) ν^u concentrată pe G^u (de obicei vom presupune că $\mathrm{supp}(\nu^u) = G^u$) .

(2) Pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$, aplicația

$$u \mapsto \int f\, d\nu^u \ [: U_G \to \mathbf{C}]$$

este continuă.

(3) Pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$ şi orice $x \in G$

$$\int f(xy) d\nu^{d(x)}(y) = \int f(y) d\nu^{r(x)}(y).$$

Notăm cu $\nu_u = (\nu^u)^{-1}$ imaginea lui ν^u prin aplicația $x \mapsto x^{-1}$. Fie μ o măsură pe U_G. Se construiesc următoarele măsuri:

$$\nu = \int \nu^u\, d\mu(u),\ \nu^{(2)} = \int \nu_u \times \nu^u\, d\mu(u)$$

Imaginea lui ν prin aplicația $x \mapsto x^{-1}$ este măsura $\nu^{-1} = \int \nu_u\, d\mu(u)$.

μ se numeşte *cvasi invariantă* relativ la $\{\nu^u, u \in U_G\}$ dacă $\nu \sim \nu^{-1}$.

Observații 2.2.12. Fie G este un grupoid local compact σ-compact, $\{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem Haar (continuu) pe G, μ o măsură cvasi invariantă şi $\nu = \int \nu^u\, d\mu(u)$.

1. Dacă G este cu bază numărabilă, atunci (G, [ν]) este un grupoid cu măsură în sensul definiției 2.1.2.

2. Se demonstrează că (Proposition 3.6 / pg. 24 [68]) :

- orice măsură aparținând clasei unei măsuri cvasi invariante este cvasi invariantă
- dacă μ este o măsură pe U_G şi dacă $\nu = \int \nu^u\, d\mu(u)$ este măsura indusă de μ pe G atunci $[d_*(\nu)]$ conține o probabilitate cvasi invariantă .

3. O derivată Radon-Nikodym $\Delta = \dfrac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ se numeşte *funcție modulară a sistemului Haar* $\{\nu^u, u \in U_G\}$ *şi măsurii* μ. Se demonstrează (Proposition 3.3/ pg 23 [68] sau Corollary 3.14/ pg 19 [41]) că dacă G este cu bază numărabilă, atunci Δ este

morfism a.p.t.(în sensul definiției 2.1.4) şi că la măsuri cvasi invariante echivalente corespund morfisme modulare similare (în sensul definiției 2.1.6).

Exemple 2.2.13. 1. Grupoidul G = S × g, determinat de acțiunea grupului local compact g pe spațiul local compact S, admite un sistem Haar (continuu): $\nu^u = \delta_u \times h$, unde h este măsura Haar pe grupul local compact g.

2. Fie G = X × X, grupoidul trivial pe spațiul local compact X. Dacă λ este o măsură Radon fixată pe X şi $\nu^x = \delta_x \times \lambda$, atunci $\{\nu^x, x \in X\}$ este un sistem Haar la stânga pe G. Reciproc, orice sistem Haar $\{\nu^x, x \in X\}$ pe G poate fi scris în această formă, utilizând o măsură Radon λ pe X. $\mathrm{supp}(\nu^x) = G^x$ dacă şi numai dacă $\mathrm{supp}\ \lambda = X$.

Spre deosebire de definiția lui A.K. Seda (Definition 1/pg. 27 [77]) pentru un sistem Haar pe un grupoid local compact, în definiția 2.2.11 nu se presupune fixată nici o măsură pe spațiul unităților, dar în schimb se cere continuitatea sistemului Haar. Condiția de continuitate este necesară pentru a putea construi C^*-algebra asociată grupoidului(pg. 116 [78]). Această condiție de continuitate impune restricții asupra topologiei lui G, după cum rezultă din următoarea propoziție.

Propoziție 2.2.14. Dacă G este un grupoid local compact care admite un sistem Haar (continuu) $\{\nu^u, u \in U_G\}$, cu $\mathrm{supp}(\nu^u) = G^u$ pentru orice $u \in U_G$, atunci aplicațiile r şi d sunt deschise. (Proposition 1.4 [81])

Demonstrație. Este suficient să arătăm că r este deschisă, deoarece d se obține din r prin compunere cu aplicația de inversare care este homeomorfism. Fie $x \in G$ şi fie U o vecinătate compactă a lui x în G. Există o funcție continuă cu suport compact, f, cu f(x) > 0 şi cu supp $f \subset U$. Luăm V egal cu interiorul supp f şi arătăm că W = r(V) este o vecinătate deschisă a lui u = r(x). Aceasta rezultă din faptul că ν^v este concentrată pe G^v pentru orice $v \in V$, şi deci $\nu^v(f) > 0$ dacă şi numai dacă $v \in W$. ■

Vom vedea că pentru un fibrat de grupuri şi reciproca propoziţiei anterioare este adevărată. Topologia de pe fibratul de grupuri trebuie să fie local compactă, iar spaţiul unităţilor să admită o vecinătate "condiţional compactă".

Definiţie 2.2.15. Fie G un grupoid local compact. O mulţime $A \subset G$ se numeşte *d-(relativ)compactă* dacă $A \cap d^{-1}(K)$ este (relativ) compactă pentru orice mulţime compactă $K \subset U_G$. Similar se definesc mulţimile *r-relativ compacte*. Dacă A este simultan r-relativ compactă şi d-relativ compactă, atunci A se numeşte *condiţional compactă*.

Observaţie 2.2.16. Dacă L este relativ compactă şi A este d-relativ compactă atunci $AL = (A \cap d^{-1}(r(L)))L$ este de asemenea relativ compactă, iar dacă A este r-relativ compactă atunci $LA = L(A \cap r^{-1}(d(L)))$ este relativ compactă. Dacă A este simetrică $(A = A^{-1})$ atunci A este d-relativ compactă dacă şi numai dacă A este r-relativ compactă.

Propoziţie 2.2.17. Dacă G este un grupoid local compact cu spaţiul unităţilor paracompact, atunci U_G admite un sistem fundamental de vecinătăţi d-relativ compacte. (Proposition 1.9/ pg. 56 [68]).

Teoremă 2.2.18. Fie G un fibrat de grupuri local compact (un grupoid ca în exemplul 1.2.10) înzestrat cu o topologie relativ la care devine grupoid topologic local compact). Presupunem că există o funcţie continuă pe G, F, astfel încât $0 \le F \le 1$, $F(u) = 1$ pentru orice $u \in U_G$, şi supp F să fie o mulţime condiţional compactă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente

(1) r este o aplicaţie deschisă

(2) G admite un sistem Haar (continuu).

(Lemma 1.3/pg. 6 [70]).

O clasă importantă de grupoizi sunt aşa numiţii *grupoizi r-discreţi*. Aceştia sunt grupoizi local compacţi G pentru care spaţiul unităţilor U_G este o mulţime deschisă în G. Asemenea grupoizi sunt generalizări ale acţiunilor grupurilor discrete pe mulţimi local compacte. Pentru grupoizii r-discreţi se ştie când există sisteme Haar (continue).

<u>*Teorema 2.2.19.*</u> Fie G un grupoid r-discret. Atunci

1) Pentru fiecare $u \in U_G$, G_u şi G^u, cu topologia relativă (de pe G), sunt spaţii discrete.

2) Dacă $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar (continuu) pe G, atunci ν^u este un multiplu al măsurii de numărare pe G^u.

3) Există un sistem Haar (continuu) pe G dacă şi numai dacă r şi d sunt homeomorfisme locale. (I.2.7/pg. 18 şi I.2.8/pg. 19 [68]).

A.K. Seda a stabilit în [75], [76] şi [77] rezultate referitoare la continuitatea, existenţa şi unicitatea sistemelor Haar pe grupoizi local compacţi, pe care le prezentăm în continuare. Un sistem Haar de măsuri în sensul [75] pe un grupoid local compact G este o familie de măsuri Baire nenule, $\{\nu, \mu, \nu^u\}$, unde ν este măsură pe G, μ este măsură pe U_G şi ν^u pe G^u pentru orice $u \in U_G$, astfel încât pentru orice submulţime Baire $E \subset G$ să fie satisfăcute următoarele condiţii:

(3) $u \mapsto \nu^u\left(E \cap r^{-1}(u)\right)$ $[\,: U_G \to \overline{\mathbf{R}}]$ este μ-măsurabilă

(4) $\nu(E) = \int \nu^u\left(E \cap r^{-1}(u)\right) d\mu(u)$

(3) $\nu^{d(x)}\left(E \cap r^{-1}(d(x))\right) = \nu^{r(x)}\left(x\left(E \cap r^{-1}(d(x))\right)\right)$ pentru orice $x \in G$

A.K. Seda a demonstrat (Theorem 2/pg. 430 [76]) că dacă G este un grupoid local compact pentru care aplicaţia $r|_{G_u}: G_u \to U_G$ este deschisă pentru orice $u \in U_G$, atunci orice sistem Haar $\{\nu, \mu, \nu^u\}$ este continuu, în sensul că funcţia

$$u \mapsto \int f\, d\nu^u \quad [\,: U_G \to \mathbf{C}]$$

este continuă pentru orice funcţie $f : G \to \mathbf{C}$, continuă cu suport compact. De asemenea a mai arătat că pentru orice grupoid local compact G există cel puţin un sistem Haar $\{\nu, \mu, \nu^u\}$ cu proprietățile (1), (2) şi (3) de mai sus (Theorem 1/pg. 30 [77]). În ceea ce priveşte unicitatea a stabilit două rezultate referitoare la clasele de sisteme Haar. Prin clasa $[\{\nu, \mu, \nu^u\}]$ se înțelege mulțimea sistemelor Haar $\{\nu', \mu', \nu'^u\}$ pentru care $\nu \sim \nu'$, $\mu \sim \mu'$ şi $\nu^u \sim \nu'^u$ pentru orice $u \in U_G$ (prin măsuri echivalente înțelegându-se două măsuri care au aceleaşi mulțimi nule). Enunțăm în continuare cele două rezultate (Corollary 1/pg. 33 [77] şi Corollary 2/pg. 35 [77]). Dacă G este un grupoid compact şi metrizabil, atunci cardinalul mulțimii

$$\{ [\{\nu, \mu, \nu^u\}] : \{\nu, \mu, \nu^u\} \text{ sistem Haar pe G}\}$$

nu este mai mare decât cardinalul mulțimii

$$\{([\mu_1], [\mu_2]) : \mu_1 \text{ şi } \mu_2 \text{ măsuri Baire pe } U_G\}.$$

Dacă G este un grupoid compact, metrizabil şi local trivial, atunci există o corespondență bijectivă între mulțimea

$$\{ [\{\nu, \mu, \nu^u\}] : \{\nu, \mu, \nu^u\} \text{ sistem Haar pe G}\}$$

şi mulțimea

$$\{([\mu_1], [\mu_2]) : \mu_1 \text{ şi } \mu_2 \text{ măsuri Baire pe } U_G\}.$$

În subcapitolul următor vom demonstra că se poate slăbi condiția suficientă de continuitate a unui sistem Haar stabilită de Seda:

__Teorema 2.2.20.__ Fie G un grupoid local compact pentru care aplicația $r|_{G_u}$: $G_u \to U_G$ este deschisă pentru orice $u \in U_G$. Atunci orice sistem de măsuri, $\{\nu^u, u \in U_G\}$, care are proprietățile (1) şi (3) din definiția 2.2.11 este un sistem Haar (continuu).(Theorem 1/pg. 430 [76]).

Condiția, $r|_{G_u}$:$G_u \to U_G$ deschisă, utilizată de Seda pentru a arăta continuitatea sistemelor Haar poate fi interpretată ca o condiție de local tranzitivitate a grupoidului. Cazul opus al grupoizilor total intranzitivi a fost tratat de Renault, care a arătat că un fibrat grupal G admite un sistem Haar (continuu) dacă şi numai dacă r: G $\to U_G$ este deschisă (Lemma 1.3/ pg. 6 [70]). În subcapitolul 2.3 al acestei lucrări vom demonstra o teoremă din care se pot obține aceste două cazuri extreme drept cazuri particulare. De asemenea în subcapitolul 2.4. vom stabili câteva rezultate referitoare la "unicitatea" unui sistem Haar (utilizând descompunerea acestuia peste grupoidul principal asociat).

Definiția 1.19 a acțiunii unui grupoid pe o mulțime impune doar condiții algebrice. În cazul topologic pe lângă condițiile algebrice, pentru acțiunea la stânga $(x,s)\mapsto xs$ [: $G*S \to S$] a grupoidului topologic G pe spațiul topologic S se va impune continuitatea (pe spațiul $G*S$ se consideră topologia indusă de $G \times S$) şi, în plus, aplicația $r : S \to U_G$ să fie continuă şi deschisă. În mod analog, pentru o acțiune la dreapta $(s,x)\mapsto sx$ [: $S*G \to S$] se va impune continuitatea şi faptul ca $d : S \to U_G$ să fie continuă şi deschisă. Dacă S şi G sunt local compacte, atunci este uşor de observat că grupoizii acțiune $S*G$ şi $G*S$ sunt local compacți. Dacă $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar (continuu) pe G, atunci $\{\nu^{r(s)} \times \delta_s, s\in S\}$ este un sistem Haar (continuu) pe $G*S$, iar $\{\delta_s \times \nu^{d(s)}, s\in S\}$ este un sistem Haar (continuu) pe $S*G$. În particular, grupoidul $G^{(2)}$ care rezultă din acțiunea la dreapta a lui G pe G admite sistemul Haar $\left\{\left(\nu^{(2)}\right)^x, x\in G\right\}$, cu $\left(\nu^{(2)}\right)^x := \delta_x \times \nu^{d(x)}$.

Noțiunea de echivalență topologică impune, de asemenea, şi alte condiții decât cele din definiția 1.22, după cum vom vedea mai departe. Până la sfârşitul acestui subcapitol, vom presupune grupoizii şi spațiile pe care acționează ca fiind spații topologice local-compacte cu bază numărabilă, fără a mai preciza aceasta. De asemenea vom presupune aplicațiile de proiecție r şi d, ale acestor grupoizi topologici ca fiind aplicații deschise.

Definiție 2.2.21. Fie G un grupoid care acționează continuu, la stânga, pe un spațiu S astfel încât aplicația $r: S \to U_G$ să fie continuă şi deschisă. Spunem că *acțiunea este proprie* dacă aplicația $\Phi: G*S \to S\times S$, definită prin formula $\Phi(x,s)=(xs,s)$, este proprie, i.e pentru fiecare mulțime compactă $K\subset S\times S$, $\Phi^{-1}(K)$ este compactă în $G*S$.

Similar se definesc acțiunile proprii la dreapta.

Propoziție 2.2.22. Fie G un grupoid care acționează continuu, la stânga, pe un spațiu S, acțiunea fiind presupusă liberă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) Acțiunea este proprie, i.e Φ este o aplicație proprie.

(2) Φ este o aplicație închisă.

(3) Φ este un homeomorfism de pe $G*S$ pe un subspațiu închis al lui $S \times S$ (înzestrat cu topologia produs).

(4) Dându-se o mulțime compactă $K \subset S$ mulțimea $G(K) := \{x \in G : xK \cap K \neq \phi\}$ este compactă în G.

(5) Dându-se o mulțime compactă $K \subset S$, mulțimea $G(K)$ este relativ compactă în G .

(Proposition 5.26/pg.146 [56]).

Propoziție 2.2.23. Fie G un grupoid care acționează continuu, la stânga, pe un spațiu S . Atunci aplicația cât $\pi : S \to G \setminus S$ este deschisă ($G \setminus S$ este definit în 1.20.1). Dacă acțiunea este proprie, atunci spațiul cât $G \setminus S$ este Hausdorff şi local-compact . (Proposition 5.27/pg.147 [56]).

Definiție 2.2.24. Fie G un grupoid care acționează continuu pe un spațiu S. S se numeşte *G-spațiu propriu* dacă acțiunea este proprie. S se numeşte *G-spațiu principal* dacă acțiunea este liberă şi proprie . Dacă S şi T sunt G-spații principale, atunci un morfism de la S la T este o aplicație echivariantă de la S la T. Un izomorfism este un homeomorfism echivariant .

Definiție 2.2.25. Fie G şi H doi grupoizi topologici. Spunem că spațiul S este o *(G,H) -echivalență topologică* dacă:

(1) S este un G-spațiu principal la stânga şi un H-spațiu principal la dreapta .

(2) Acțiunile lui G şi H comută .

(3) Aplicația $r : S \to U_G$ induce un homeomorfism între U_G şi S / H, i.e. $r(s) = r(t)$ dacă şi numai dacă există (şi este unic) x astfel încât $sx = t$, şi $d : S \to U_H$ aplicația induce un homeomorfism între U_H şi $G \backslash S$.

Vom spune că doi grupoizi local compacți G şi H sunt *Morita echivalenți* dacă există o (G,H)-echivalență .

<u>*Teoremă 2.2.26*</u> Fie H un grupoid şi S un H-spațiu principal la dreapta. Atunci:

1) $S *_H S^{op}$ (grupoidul de imprimitivitate) este un grupoid local-compact, Hausdorff, cu bază numărabilă, relativ la topologia cât .

2) Acțiunea la stânga a lui $S *_H S^{op}$ pe S este continuă, liberă, şi proprie, de unde rezultă că S este un $S *_H S^{op}$ -spațiu principal la stânga.

3) Acțiunile lui H şi $S *_H S^{op}$ comută, şi $d : S \to S / H$ induce un homeomorfism de la S / H la spațiul unităților lui $S *_H S^{op}$, în timp ce $r : S \to S *_H S^{op} \backslash S$ induce un homeomorfism de la $S *_H S^{op} \backslash S$ la U_H.

Astfel S este o ($S *_H S^{op}$,H)-echivalență . (Theorem 5.31/pg 151 [56]).

<u>*2.2.27.Exemple de G-spații principale:*</u> (G grupoid topologic local-compact, cu bază numărabilă):

1. Cel mai simplu exemplu se obține în cazul acțiunii unui grupoid G asupra lui însuşi prin translație la stânga sau la dreapta .

2. Mai general, fie F o submulțime închisă sau deschisă a lui U_G, şi fie $G_F \left(= d^{-1}(F)\right)$. În ambele cazuri, $G|_F$ este un grupoid local-compact. $G|_F$ acționează (algebric) pe G_F la dreapta şi această acțiune este liberă , dar nu este întotdeauna continuă şi proprie . Dacă F este deschisă , atunci restricția lui d la G_F este deschisă ca aplicație de la G_F la F şi de aici rezultă continuitatea acțiunii . Acțiunea este proprie pentru că aplicația $(x, y) \to (x, x y)$, de la $G_F * G|_F$ la $G_F \times G_F$, are inversă: $(x, y) \to (x, x^{-1} y)$. Deci în cazul în care F este deschisă, G_F este $G|_F$ -spațiu

principal. Când F este închisă situația se complică , deoarece restricția $d|G_F$ nu mai este neapărat deschisă . Totuşi, în cazul în care este deschisă G_F devine $G|_F$ –spațiu principal la dreapta .

Presupunem acum că $r(G_F)=U_G$. Este uşor de observat că în acest caz G_F devine G-spațiu principal la stânga exact când restricția lui r la G_F este deschisă ca aplicație de la G_F la U_G (acest lucru nu se întâmplă întotdeauna).

3. Un caz particular în care aplicația $r|G_F$ este deschisă se obține în situația în care G este tranzitiv (local-compact, cu bază numărabilă, cu aplicațiile de proiecție r, d deschise, aşa cum dealtfel am presupus), iar $F=\{u\}$ pentru o anumită unitate $u\in U_G$. Acest rezultat se găseşte în [57] teoremele 2.2A şi 2.2B. Deci în acest caz, pentru fiecare $u\in U_G$, G_u este un G-spațiu principal la stânga.

2.2.28. Exemple de echivalențe topologice:

1. Dacă G este un grupoid topologic local-compact, cu bază numărabilă, cu aplicațiile de proiecție r, d deschise, dacă T este o submulțime închisă a spațiului unităților lui G, a cărei saturată este egală cu U_G, şi dacă restricțiile lui r şi d la G_T sunt deschise, atunci G_T este o $(G,G|_T)$ -echivalență (topologică).

2. Un caz particular al exemplului de mai sus se obține punând $T = U_G$. În acest caz rezultă că G este o (G,G)-echivalență.

3. Fie G, H doi grupoizi topologici local-compacți, cu bază numărabilă, cu aplicațiile de proiecție r, d deschise, şi $\phi:H\to G$ un izomorfism care este în plus şi homeomorfism. Atunci G devine o (G,H)-echivalență considerând că G acționează pe G prin multiplicare la stânga, iar acțiunea lui H pe G este dată prin : $yx=y\phi(x)$.

2.3. SISTEME HAAR – CONTINUITATE ŞI EXISTENȚĂ

a. Uniform continuitate pe grupoizii local compacți

Este cunoscut faptul că orice funcție continuă cu suport compact, definită pe un grup topologic local-compact, este uniform continuă. Vom defini o noțiune de "uniform continuitate" a unei funcții definite pe un grupoid topologic şi vom demonstra că orice funcție continuă cu suport compact definită pe un grupoid local compact, al cărui spațiu al unităților admite o vecinătate simetrică d-compactă, este "uniform continuă".

Definiție.2.3.1(Definition 3.1 [15]). Fie G un grupoid topologic şi E un spațiu Banach.

Funcția continuă $h : G \to E$ se numeşte *"uniform continuă" la stânga* dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate W a spațiului unităților U_G astfel încât:

$$u \in U_G \Rightarrow |h(x)\text{-}h(y)| < \varepsilon \ (\forall)\ x, y \in G_u \ \ xy^{-1} \in W$$

Funcția continuă $h : G \to E$ se numeşte *"uniform continuă" la dreapta* dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate W a lui U_G astfel încât:

$$u \in U_G \Rightarrow |h(x)\text{-}h(y)| < \varepsilon \ (\forall) x, y \in G^u \ \ y^{-1}x \in W$$

Este uşor de observat că h este "uniform continuă" la stânga dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate W a lui U_G astfel încât:

$$|h(sy)\text{-}h(y)| < \varepsilon \ \ (\forall)\ s \in W,\ y \in G^{d(s)}$$

şi că h este "uniform continuă" dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate W a spațiului unităților U_G astfel încât:

$$|h(ys)\text{-}h(y)| < \varepsilon \ (\forall)\ s \in W,\ y \in G_{r(s)}$$

Lema 2.3.2 (Lemma 3.2 [15]). Fie G este un grupoid topologic Hausdorff, S un spațiu topologic, $f : G^{(2)} \to S$ o funcție continuă, $W \subset S$ o mulțime deschisă şi $K \subset G$ o mulțime compactă. Atunci

$$L = \{s : f(s, y) \in W \ \ (\forall) y \in K \cap G^{d(s)}\}$$

este o submulțime deschisă a lui G.

Demonstrație. Fie $s_0 \in L$. Dacă $y \in K$ atunci $\begin{cases} 1)\ r(y) = d(s_0) \\ \qquad\qquad\qquad \text{sau} \\ 2)\ r(y) \neq d(s_0) \end{cases}$

Vom arăta că în ambele cazuri există două mulțimi deschise în G, $U_y \ni s_0$ şi $V_y \ni y$, astfel încât

$$f((U_y \times V_y) \bigcap G^{(2)}) \subset W.$$

Dacă $r(y) = d(s_0)$ atunci $f(s_0,w) \in W$. Deoarece f este continuă în (s_0, y), rezultă că există două mulțimi deschise, $U_y \ni s_0$ şi $V_y \ni y$ astfel încât $f((U_y \times V_y)\bigcap G^{(2)}) \subset W$.

Dacă $r(y) \neq d(s_0)$ atunci există două submulțimi deschise ale lui U_G, $U_y' \ni d(s_0)$ şi $V_y' \ni r(y)$ astfel încât $U_y' \cap V_y' = \phi$. În acest caz dacă luăm $\begin{cases} U_y = d^{-1}(U_y') \ni s_0 \\ V_y = r^{-1}(V_y') \ni y \end{cases}$

avem $(U_y \times V_y) \bigcap G^{(2)} = \phi$. De aceea $f((U_y \times V_y) \bigcap G^{(2)}) = \phi \subset W$.

$\{V_y\}_{y \in K}$ fiind o acoperire deschisă a mulțimii compacte K, rezultă că

$$(\exists) y_1, y_2 ..., y_n \in K \text{ astfel încât } \bigcup_{i=1}^{n} V_{yi} \supset K .$$

Atunci $\bigcap_{i=1}^{n} U_{yi} \ni s_0$ este o mulțime deschisă şi $f((\bigcap_{i=1}^{n} U_{yi} \times \bigcup_{i=1}^{n} V_{yi}) \bigcap G^{(2)}) \subset W$. În consecință,

$$s_0 \in \bigcap_{i=1`}^{n} U_{yi} \subset L \text{ (pentru că } f((\bigcap_{i=1}^{n} U_{yi} \times K)\bigcap G^{(2)}) \subset W). \blacksquare$$

Demonstrația următoarei leme este analoagă.

<u>Lema 2.3.3 (Lemma 3.3 [15]).</u> Fie G este un grupoid topologic Hausdorff, S un spațiu topologic, $f: G^{(2)} \to S$ o funcție continuă, $W \subset S$ o mulțime deschisă şi $K \subset G$ o mulțime compactă. Atunci

$$L = \{y : f(s, y) \in W \quad \forall s \in K_{r(y)}\}$$

este o submulțime deschisă a lui G.

Propoziția 2.3.4 (Proposition 3.4 [15]). Dacă G este un grupoid local compact, U_G are o vecinătate simetrică d-compactă U, E este un spațiu Banach şi $h : G \to E$ este o funcție continuă cu suport compact, atunci h este "uniform continuă" la stânga şi la dreapta.

Demonstrație. Fie K=supp h. Atunci $UK = \left(d^{-1}\left(r(K)\right) \bigcap U\right)K$ este o mulțime compactă. Dacă luăm

$$f : G^{(2)} \to E, f(s,y) = h(sy) - h(y)$$

atunci f este o funcție continuă. Fie ε > 0 fixat. Conform lemei 2.3.2,

$$L = \left\{s : \left|h(sy) - h(y)\right| < \varepsilon \ \ (\forall) y \in (UK)^{d(s)}\right\}$$

este o submulțime deschisă a lui G. Este uşor de observat că $U_G \subset L$. Luăm W = L ∩ U. Dacă $s \in W$ şi $y \in G^{d(s)}$ atunci $y \in (UK)^{d(s)}$ sau $y \in G^{d(s)} \setminus (UK)$. Avem

$$\begin{cases} y \in (UK)^{d(s)} \Rightarrow \left|h(sy) - h(y)\right| < \varepsilon \\ y \in G^{d(s)} \setminus (UK) \Rightarrow y \notin K \ \text{ şi } sy \notin K \Rightarrow \left|h(sy) - h(y)\right| = 0 < \varepsilon. \end{cases}$$

În consecință, $\left|h(sy) - h(y)\right| < \varepsilon \ \ (\forall) y \in G^{d(s)}$ şi $(\forall) s \in W$. Aceasta înseamnă că h este "uniform continuă" la stânga.

Analog, h este "uniform continuă " la dreapta. ■

2.3.5. Exemple de grupoizi pentru care spațiul unităților admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte

1. orice grup local compact
2. orice grupoid local compact cu spațiul unităților paracompact; în particular, orice grupoid σ-compact local compact, şi deci orice grupoid local compact cu bază numărabilă
3. orice grupoid provenit din acțiunea unui grup pe o mulțime.

b. Continuitatea sistemelor Haar pe grupoizi cu orbite deschise

Vom arăta că dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă cu proprietatea că toate orbitele $[u]$ $(u \in U_G)$ sunt mulțimi deschise în U_G, atunci orice sistem pre-Haar pe G (în sensul definiției 2.3.6) este continuu. În particular, rezultă că dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă, tranzitiv, atunci orice sistem pre-Haar sistem este continuu. În restul acestei secțiuni vom lucra cu următoarea noțiune de sistem pre-Haar:

Definiție 2.3.6(Definition 4.1 [15]) Un *sistem pre-Haar la stânga* pe G este o familie de măsuri (pozitive) boreliene $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ cu următoarele proprietăți:

(1) ν^u concentrată G^u $(\forall)$ $u \in U_G$

(2) Pentru orice $x \in G$ și orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$

$$\int f(xy)d\nu^{d(x)}(y) = \int f(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

(3) Pentru orice mulțime compactă $K \subset G$,

$$\sup_{u \in U_G} \nu^u(K) < \infty \quad (\Leftrightarrow \sup_{u \in r(K)} \nu^u(K) < \infty).$$

Lema 2.3.7. (Lemma 4.2 [15]). Fie G un grupoid local compact al cărui spațiu al unităților U_G admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte. Fie $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar pe G, și $f : G \to C$ este o funcție continuă cu suport compact. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există W_ε, o vecinătate simetrică d-relativ compactă a lui U_G, astfel încât.:

$$x \in W_\varepsilon \Rightarrow \left| \int f(y)d\nu^{d(x)}(y) - \int f(y)d\nu^{r(x)}(y) \right| < \varepsilon$$

Demonstrație. Deoarece U_G admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte, conform propoziției 2.3.4, rezultă că f este "uniform continuă" la stânga. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate simetrică d-relativ compactă W_ε, a lui U_G, astfel încât

$$x \in W_\varepsilon \Rightarrow \left|f(xy) - f(y)\right| < \varepsilon \ \forall y \in G^{d(x)}$$

Fie U o vecinătate simetrică d-relativ compactă a spațiului unităților U_G. Putem presupune că $W_\varepsilon \subset U$. Avem

$$\operatorname{supp}\left(y \mapsto \begin{cases} f(xy) - f(y), & y \in G^{d(x)} \\ 0 & , y \notin G^{d(x)} \end{cases} \right) \subset W_\varepsilon \operatorname{supp} f \subset U \operatorname{supp} f \ (\forall) x \in W_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|f(xy) - f(y)\right| < \varepsilon 1_{U\operatorname{supp} f}(y) \quad (\forall) x \in W_\varepsilon,\ (\forall) y \in G^{d(x)}$$

$$\Rightarrow \int \left|f(xy) - f(y)\right| d\nu^{d(x)}(y) \le \varepsilon \int 1_{U\operatorname{supp} f}(y) d\nu^{d(x)}(y)$$

$$\Rightarrow \left|\int f(xy) d\nu^{d(x)}(y) - \int f(y) d\nu^{d(x)}(y)\right| \le \varepsilon\ \nu^{d(x)}(U \operatorname{supp} f) \Rightarrow$$

$$\left|\int f(y) d\nu^{r(x)}(y) - \int f(y) d\nu^{d(x)}(y)\right| \le \varepsilon \sup_{u \in U_G} \nu^u(U \operatorname{supp} f) < \infty. \ \blacksquare$$

<u>Propoziție 2.3.8. (Proposition 4.3 [15])</u> Fie G un grupoid local compact al cărui spațiu al unităților U_G admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte. Fie $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar pe G. Pentru fiecare funcție continuă cu suport compact $f : G \to R$ definim $F_f : G \to R$ prin

$$F_f(x) = \int f(y) d\nu^{d(x)} - \int f(y) d\nu^{r(x)}(y) \quad (\forall)\ x \in G$$

şi $\varphi_f : U_G \to R$ prin

$$\varphi_f(u) = \int f(y) d\nu^u(y) \quad (\forall)\ u \in U_G$$

Atunci

1) F_f este un morfism de grupoizi care este continuu în fiecare punct $u \in U_G$.

2) $F_f|_{G^u}$ şi $F_f|_{G_u}$ sunt aplicații continue pentru orice $u \in U_G$.

3) Dacă G este un grupoid local compact, cu bază numărabilă şi cu orbite local compacte, atunci pentru orice $u_0 \in U_G$ restricția lui φ_f la $[u_0]$ este continuă.

Demonstrație. 1) Pentru orice $(x, y) \in G^{(2)}$ avem

$$F_f(xy) = \int f(z)dv^{d(xy)}(z) - \int f(z)dv^{r(xy)}(y)$$
$$= \int f(z)dv^{d(y)}(z) - \int f(z)dv^{r(x)}(y)$$
$$= \int f(z)dv^{d(y)}(z) - \int f(z)dv^{r(y)}(z) + \int f(z)dv^{d(x)}(z) - \int f(z)dv^{r(x)}(y)$$
$$= F_f(y) + F_f(x) = F_f(x) + F_f(y).$$

Deci F_f este morfism.

Conform lemei precedente, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există W_ε, o vecinătate a spațiului unităților U_G astfel încât:

$$x \in W_\varepsilon \Rightarrow |F_f(x) - F_f(u)| < \varepsilon$$

Acesta înseamnă că F_f este continuu în orice $u \in U_G$.

2) Fie u o unitate, $x_0 \in G^u$ şi $\varepsilon > 0$. Fie W_ε o vecinătate simetrică a lui U_G astfel încât:

$$x \in W_\varepsilon \Rightarrow |F_f(x) - F_f(u)| < \varepsilon .$$

Atunci

$$x \in x_0 W_\varepsilon \Rightarrow |F_f(x) - F_f(x_0)| = \left|F_f\left(x_0^{-1}x\right)\right| < \varepsilon .$$

Astfel $F_f|_{G^u}$ este continuu în x_0.

3) Presupunem prin absurd că există $u_0 \in U_G$ astfel încât restricția lui φ_f la $[u_0]$ nu e continuă în u_0, ceea ce este echivalent cu faptul că există un şir $(u_i)_{i\in I}$ astfel încât $(u_i)_i$ converge la u_0 şi $(\varphi(u_i))_i$ nu converge la $\varphi(u_0)$. Putem presupune (eventual trecând la un subşir) că nici un subşir al lui $(\varphi(u_i))_i$ nu converge la $\varphi(u_0)$. Aplicând Lemma 1.1 [47] spațiilor local compacte G^{u_0}, $[u_0]$, rezultă că aplicația continuă surjectivă $d : G^{u_0} \to [u_0]$ are o secțiune boreliană regulată $\sigma : [u_0] \to G^{u_0}$. Aceasta înseamnă că σ este boreliană şi în plus,

(a) $d(\sigma(u)) = u$ pentru orice $u \in [u_0]$.

(b) închiderea mulțimii $\sigma(K)$ este compactă în G^{u_0} pentru orice compact K în $[u_0]$

Dacă luăm $x_i = \sigma(u_i)$ atunci $d(x_i) = u_i$, $r(x_i) = u_0$ şi $F_f(x_i) = \varphi_f(d(x_i)) - \varphi_f(r(x_i)) = \varphi_f(u_i) - \varphi_f(u_0)$. Deci nici un subşir al şirului $(F_f(x_i))_i$ nu converge la 0. Deoarece $\{u_i, i \in I\}\cup$

$\{u_0\}$este o mulțime compactă, închiderea mulțimii $\sigma(\{u_i, i \in I\} \cup \{u_0\})$ este compactă în G^{u_0}. De aceea există un subşir convergent al lui $(x_i)_{i\in I}$, pe care îl vom nota tot cu $(x_i)_i$. Dacă $x_0 = \lim\limits_i x_i$, atunci $r(x_0) = \lim\limits_i r(x_i) = \lim\limits_i r(\sigma(u_i)) = u_0$ şi $d(x_0) = \lim\limits_i d(x_i) = \lim\limits_i d(\sigma(u_i)) = \lim\limits_i u_i = u_0$. Rezultă că $F_f(x_0) = 0$ în timp ce $(F_f(x_i))_i$ nu converge la 0. Aceasta este o contradicție, deoarece $F_f|_{G^{u_0}}$ este continuă în x_0. Astfel restricția lui φ_f la $[u_0]$ este continuă în u_0. ■

<u>Teorema 2.3.9 (Theorem 4.4 [15]).</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă cu proprietatea că toate orbitele $[u]$ $(u \in U_G)$ sunt mulțimi deschise în U_G, şi fie $\nu=\{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar.

Atunci pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$ funcția

$$u \mapsto \int f(y)d\nu^u(y)[: U_G \to \mathbf{C}]$$

este continuă.

Demonstrație. Fie $f : G \to \mathbf{C}$ o funcție continuă cu suport compact. Aplicând propoziția precedentă, rezultă că pentru fiecare $u_0 \in U_G$ restricția lui φ_f la $[u_0]$ este continuă. Deoarece $[u_0]$ este o mulțime deschisă pentru orice u_0 şi $U_G = \bigcup\limits_{u\in U_G}[u]$, aplicația

$$u \mapsto \int f(y)d\nu^u(y)[: U_G \to \mathbf{C}]$$

este continuă. ■

<u>Observație 2.3.10.</u> Dacă în teorema 2.3.9 r este o aplicație deschisă iar orbitele [u] nu sunt în mod necesar mulțimi deschise, dar sunt local închise, atunci se obține doar continuitatea aplicației $v \mapsto \int f d\nu^v$ pe fiecare orbită [u] (pe [u] se consideră topologia indusă de pe U_G).

Într-adevăr, aplicând propoziția 2.3.8, se obține continuitate funcției $v \mapsto \int f d\nu^v$ pe orbita [u].

Observație 2.3.11. Fie G un grupoid local compact al cărui spațiu al unităților U_G admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte. Fie $\nu=\{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar. Atunci pentru orice $u_0 \in U_G$ şi pentru orice funcție continuă cu suport compact $f: G \to C$ restricția aplicației

$$x \mapsto \int f(y) d\nu^{d(x)}(y) [: G \to C]$$

la G^{u_0} (cu topologia indusă de G) este continuă.

Într-adevăr, cu notațiile din propoziția 2.3.8 se observă că restricțiile aplicațiilor F_f şi $x \mapsto \int f(y) d\nu^{d(x)}(y) [: G \to C]$ la G^{u_0} diferă printr-o constantă ($\int f(y) d\nu^{u_0}(y)$). Din 2.3.8 rezultă că restricția lui F_f este continuă, şi deci $x \mapsto \int f(y) d\nu^{d(x)}(y) [: G^{u_0} \to C]$ este continuă.

Corolar 2.3.12. Fie G un grupoid local compact al cărui spațiu al unităților U_G admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte. Fie $\nu=\{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar. Atunci pentru orice $u_0 \in U_G$ şi pentru orice funcție continuă cu suport compact $f: G \to \mathbf{C}$ aplicația

$$w \mapsto \int f(y) d\nu^{w}(y) \; [: [u_0] \to \mathbf{C}]$$

este continuă relativ la topologia cât pe $[u_0]$ indusă de $d_{u_0}: G^{u_0} \to [u_0]$ definită prin $d_{u_0}(x) = d(x)$ pentru orice $x \in G^{u_0}$ (mulțimile deschise în această topologie sunt cele ale căror imagine inversă prin d_{u_0} sunt deschise în topologia indusă de G pe G^{u_0}).

Demonstrație. Am observat în 2.3.11 că pentru orice funcție continuă cu suport compact $f: G \to \mathbf{C}$ aplicația

$$x \mapsto \int f(y) d\nu^{d(x)}(y) \; [: G^{u_0} \to \mathbf{C}]$$

este continuă relativ la topologia indusă de G pe G^{u_0}. Aplicația $d_{u_0}: G^{u_0} \to [u_0]$ fiind aplicație de identificare, rezultă că

$$w \mapsto \int f(y) d\nu^{w}(y) \; [: [u_0] \to \mathbf{C}]$$

este continuă relativ la topologia cât pe $[u_0]$ indusă de d_{u_0}. ■

<u>Propoziție 2.3.13</u>. Fie G un grupoid local compact şi u o unitate din U_G. Atunci pentru orice $v \in [u]$ aplicația

$$d_v : G^v \to [u],\ d_v(x) = d(x) \text{ pentru orice } x \in G^v.$$

este deschisă relativ la topologia cât indusă de d_v pe [u] (mulțimile deschise în această topologie sun cele ale căror imagine inversă prin d_v sunt deschise în topologia indusă de G pe G^v).

Demonstrație. Fie $x \in G^v$ şi $(w_i)_i$ un şir din [u] convergent în topologia cât la d(x). Această înseamnă că există $y \in G^v$ şi un şir $(y_i)_i$ în G^v ce converge la y, astfel încât $d(y) = d(x)$ şi $d(y_i) = w_i$. Şirul $(xy^{-1}y_i)_i$ converge la x în G^v şi

$$d(xy^{-1}y_i) = d(y_i) = w_i$$

pentru orice i. În consecință, d_v este deschisă. ■

<u>Propoziție 2.3.14.</u> Fie G un grupoid local compact al cărui spațiu al unităților U_G admite un sistem fundamental de vecinătăți d-relativ compacte şi pentru care aplicația r (deci şi d) este deschisă. Fie $f : G \to R$ o funcție continuă cu suport compact şi F_f, φ_f aplicațiile din propoziția 2.3.8. Presupunem că F_f este continuă pe întreg grupoidul G. Atunci mulțimea punctelor de continuitate ale aplicației φ_f este saturată (invariantă).

Demonstrație. Fie u un punct de continuitate pentru φ_f şi fie $v \sim u$. Considerăm x cu $r(x) = u$ şi $d(x) = v$. Fie $(v_i)_{i\in I}$ un şir care converge la v. Aplicația $d: G \to U_G$ fiind deschisă, rezultă că există un şir $(x_i)_{i\in I}$ în G cu proprietate că $(x_i)_{i\in I}$ converge la x şi $d(x_i) = v_i$ pentru orice i. Deoarece F_f este continuă peG, rezultă

$$\lim_i F_f(x_i) = F_f(x) = \varphi_f(v) - \varphi_f(u) \quad (1)$$

Pe de altă parte $\lim_i r(x_i) = r(x) = u$ iar u este punct de continuitate pentru φ_f. Deci

$\lim_i \varphi_f(r(x_i)) = \varphi_f(u)$ şi din $F_f(x_i) = \varphi_f(v_i) - \varphi(r(x_i))$, rezultă

$$\lim_i F_f(x_i) = \lim_i \varphi_f(v_i) - \varphi_f(u) \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\lim_i \varphi_f(v_i) = \varphi_f(v)$. ■

Observație 2.3.15. Aplicația F_f din propoziția 2.3.8 este un morfism de grupoizi care este continuu în fiecare punct $u \in U_G$. Dacă din continuitatea unui morfism de grupoizi pe spațiul unităților s-ar putea trage concluzia că este continuu pe întregul grupoid (ca în cazul grupurilor), atunci propoziția precedentă nu ar avea ipoteze prea restrictive. În [46] (Proposition 1.21/pg. 30) K. Mackenzie demonstrează că există grupoizi pentru care continuitatea unui morfism pe spațiul unităților implică continuitatea pe întreg grupoidul.

În secțiunea **d** a cestui subcapitol vom arăta că există o legătură mai strânsă între aplicațiile φ_f şi F_f.

c. Existența sistemelor pre-Haar

Vom demonstra că orice grupoid local compact cu bază numărabilă admite un sistem pre-Haar în sensul definiției 2.3.6. Dacă în plus, orbitele [u] sunt mulțimi deschise în U_G pentru orice $u \in U_G$, sistemul pre-Haar obținut este continuu. În particular, dacă G este un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă, atunci G admite un sistem pre-Haar continuu. Ca o consecință a existenței sistemelor Haar (continue), vom obține că dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă cu toate orbitele deschise în U_G, atunci aplicația r este deschisă.

Teorema 2.3.16 (Theorem 2.3 [15]). Orice grupoid local compact cu bază numărabilă, G, admite un sistem pre-Haar, $\{\nu^u, u \in U_G\}$, în sensul definiției 2.3.6. În plus, putem alege sistemul $\{\nu^u, u \in U_G\}$ astfel încât:

(1) $\mathrm{supp}\nu^u = G^u$ pentru orice $u \in U_G$.

(2) Există o funcție $h : G \to [0, 1]$ boreliană pe fiecare componentă de tranzitivitate $G|_{[u]}$, cu proprietatea că $h(u) = 1$ şi $\nu^u(h) = 1$ pentru orice $u \in U_G$.

Demonstrație. Fie $(K_n)_n$ un şir de mulțimi compacte şi simetrice cu proprietatea că $\bigcup_n K_n = G$ şi $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pentru orice n. Alegem în fiecare orbită [u] un element notat $e_{[u]}$ în următorul mod: fie m cel mai mic număr natural cu proprietatea că $[u] \cap r(K_m) \neq \emptyset$ şi fie $x_m \in K_m$ cu proprietatea că $r(x_m) \in [u]$; luăm $e_{[u]} = e_{[r(x_m)]} = d(x_m)$. Este uşor de observat că $e(r(K_n)) \subset d(K_n)$ pentru orice n. Datorită simetriei mulțimilor K_n şi $e(d(K_n)) \subset r(K_n)$.

De asemenea pentru fiecare orbită [u] alegem o probabilitate $\eta_{[u]}$ concentrată pe [u].

Fie U_0 o vecinătate simetrică, deschisă, d-relativ compactă a lui U_G. Fie $h_0 : G \to [0, 1]$ o funcție continuă cu $h_0|_{U_G} \equiv 1$ şi cu suportul inclus în U_0. Pentru fiecare $u \in U_G$, considerăm măsura Haar la stânga pe grupul local compact $G_{e(u)}^{e(u)}$, $\mu_{e(u)}$, cu proprietatea că $\mu_{e(u)}(h_0) = 1$.

Fie U vecinătatea deschisă a lui U_G definită de $h_0 > ½$. Pentru fiecare $u \in U_G$ avem:

$$1 = \int h_0(y)d\mu_{e(u)}(y) \geq \int 1_U(y)h_0(y)d\mu_{e(u)}(y) \geq (1/2)\mu_{e(u)}(U),$$

deci $\mu_{e(u)}(U) \leq 2$.

Fie K o submulțime compactă a lui G. Arătăm că $\sup_{u \in U_G} \mu_{e(u)}(K) < \infty$. Pentru aceasta ținem seama că se poate acoperi K cu un număr finit de mulțimi deschise V_1, V_2, …, V_n cu proprietatea că $V_i^{-1}V_i \subset U$ pentru orice i. Pentru o astfel de mulțime V_i avem

$$\mu_{e(u)}(V_i) = \mu_{e(u)}(xx^{-1}V_i) \leq \mu_{e(u)}(x V_i^{-1}V_i) \leq \mu_{e(u)}(xU) \leq \mu_{e(u)}(U) \leq 2,$$

unde x este un element din $G_{e(u)}^{e(u)} \cap V_i$ (dacă $G_{e(u)}^{e(u)} \cap V_i = \emptyset$, $\mu_{e(u)}(V_i) = 0$). Deci, $\mu_{e(u)}(K) \le 2n$.

Aplicând Lemma 4.12/pg. 99 [56] (care este o reformulare bazată pe un rezultat al lui Federer şi lui Morse [36] a lemei a lui Mackey -Lemma 1.1/pg.102 [47]) spaţiilor G şi $U_G \times U_G$, şi aplicaţiei continue $(r,d) : G \to U_G \times U_G$, rezultă că există o funcţie boreliană $\sigma : (r,d)(G) \to G$ astfel încât $r(\sigma(u,v))=u$ şi $d(\sigma(u,v))=v$ pentru orice $(u,v) \in (r,d)(G)$, care în plus are proprietatea că $\sigma((r,d)(K_n)) \subset K_n$ pentru orice n.

Pentru fiecare $u \in U_G$ definim ν^u prin

$$\int f(y)d\nu^u(y) = \int_{U_G}\left(\int_{G_e^e} f(\sigma(u,e(u))y\sigma(w,e(w))^{-1})d\mu_{e(u)}(y)\right)d\eta_{[u]}(w) \quad ,$$

pentru orice $f \ge 0$ boreliană.

Pentru orice $x \in G$, avem

$$\int f(xy)d\nu^{d(x)} = \iint f\left(x\sigma(d(x),e(d(x)))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right)d\mu_{e(d(x))}(y)d\eta_{[d(x)]}(w)$$

$$= \iint f\left(\sigma(r(x),e(r(x)))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right)d\mu_{e(d(x))}(y)d\eta_{[d(x)]}(w)$$

$$= \iint f\left(\sigma(r(x),e(r(x)))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right)d\mu_{e(r(x))}(y)d\eta_{[r(x)]}(w)$$

$$= \int f(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

Fie K o submulţime compactă a lui G şi fie K_n cu proprietatea că $K \subset K_n$. Atunci $e(r(K)) \subset e(r(K_n)) \subset d(K_n)$, $e(d(K)) \subset e(d(K_n)) = e(r(K_n)) \subset d(K_n)$, şi deci $\sigma(r(K), e(r(K))) \subset K_n$ şi $\sigma(d(K), e(d(K))) \subset K_n$. Arătăm că $\sup_{u \in U_G} \nu^u(K) < \infty$. Dacă u,w sunt două unităţi din U_G şi dacă $\sigma(u,e(u))y\sigma(w,e(w))^{-1} \in K$ atunci

$$d\left(\sigma(u,e(u))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right) \in d(K) \text{ şi } r\left(\sigma(u,e(u))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right) \in r(K).$$

Deci $w \in d(K)$, $u \in r(K)$ şi

$$1_K\left(\sigma(u,e(u))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right) = 1_K\left(\sigma(u,e(u))y\sigma(w,e(w))^{-1}\right)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(w)$$

$$= 1_{\sigma(u,e(u))^{-1}K\sigma(w,e(w))}(y)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(w) \le 1_{\sigma(r(K),e(r(K)))^{-1}K\sigma(d(K),e(d(K)))}(y)$$

$$\le 1_{K_n^{-1}KK_n}(y)$$

În consecinţă,

$$\nu^u(K) = \iint 1_K(\sigma(u, e(u)) y \sigma(w, e(w))^{-1}) d\mu_{e(u)}(y) d\eta_{[u]}(w)$$
$$\le \iint 1_{K_n^{-1}KK_n}(y) d\mu_{e(u)}(y) d\eta_{[u]}(w)$$
$$\le \sup_{u \in U_G} \mu_{e(u)}\left(K_n^{-1}KK_n\right)$$

pentru orice $u \in U_G$.

Putem considera $\nu^u : K(G) \to \mathbf{R}$ ($K(G)$ = spațiul funcțiilor reale continue pe G, cu suport compact). Deoarece ν^u este liniară şi pozitivă, ν^u este o măsură Radon. Evident, ν^u este concentrată pe G^u.

Dacă pentru fiecare orbită [u], alegem o probabilitate η_1 pe $G^{e(u)}$ astfel încât supp $\eta_1 = G^{e(u)}$, şi luăm $\eta_{[u]} = d_*(\eta_1)$, atunci supp $\nu^u = G^u$ pentru orice $u \in U_G$. Într-adevăr, dacă D_1 este o submulțime deschisă nevidă a lui $G^{e(u)}$, atunci există o submulțime deschisă nevidă D a lui G astfel încât $D_1 = D \cap G^{e(u)}$. Avem

$$\eta_{[u]}(d(D \cap G^{e(u)})) = \eta_1(d^{-1}(d(D \cap G^{e(u)}))) \ge \eta_1(D \cap G^{e(u)}) > 0.$$

Pentru orice $w \in V = d(D \cap G^{e(u)})$, există $x \in D$ astfel încât $r(x) = e(u)$ şi $d(x) = w$. Astfel, dacă $w \in V$ atunci mulțimea $D \cap G_w^{e(u)}$ este nevidă. Funcția

$$h' : G_w^{e(u)} \to G_{e(u)}^{e(u)}, \quad y \overset{h'}{\mapsto} \sigma(e(u), e(u)) y \sigma(w, e(w))^{-1}$$

este un homeomorfism care transportă mulțimea $D \cap G_w^{e(u)}$ în

$$\sigma(e(u), e(u))\,(D \cap G_w^{e(u)})\sigma(w, e(w))^{-1}.$$

În consecință, $\sigma(e(u), e(u))\,(D \cap G_w^{e(u)})\sigma(w, e(w))^{-1}$ este de asemenea o mulțime nevidă şi deschisă în $G_{e(u)}^{e(u)}$, iar faptul că $\mu_{e(u)}$ este măsură Haar pe $G_{e(u)}^{e(u)}$ implică

$$\mu_{e(u)}(\sigma(e(u), e(u))\,(D \cap G_w^{e(u)})\sigma(w, e(w))^{-1}) > 0.$$

În consecință,

$$\nu^{e(u)}(D_1) = \nu^{e(u)}(D \cap G^{e(u)})$$
$$= \iint 1_{D \cap G^{e(u)}}\left(\sigma(e(u), e(u)) y \sigma(w, e(w))^{-1}\right) d\mu_{e(u)}(y) d\eta_{[u]}(w)$$
$$= \int \int_{G_{e(u)}^{e(u)}} 1_{\sigma(e(u), e(u))^{-1} D \cap G^{e(u)} \sigma(w, e(w))}(y) d\mu_{e(u)}(y) d\eta_{[u]}(w) \ge$$

$$\geq \int_V \mu_{e(u)}\left(\sigma(e(u), e(u))^{-1} D \cap G^u \sigma(w, e(w))\right) d\eta_{[u]}(w) \underset{\eta_{[u]}(V)>0}{\underset{\uparrow}{>}} 0,$$

ceea ce implică supp $\nu^{e(u)} = G^{e(u)}$ şi deci supp $\nu^v = G^v$ pentru orice $v \in [u]$.

Considerăm funcția $h : G \to [0,1]$, definită prin

$$h(y) = h_0(\sigma(r(y), e(r(y)))^{-1} y \sigma(d(y), e(d(y))))).$$

Atunci

$$\int h(y) d\nu^u(y) = \int \int h_0(y) d\mu_{e(u)}(y) d\eta_{[u]}(w) = 1$$

şi

$$h(u) = h_0(\sigma(u, e(u))^{-1} \sigma(u, e(u))) = h_0(e(u)) = 1,$$

pentru orice $u \in U_G$. ■

<u>*Corolar 2.3.17.*</u> Dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă, pentru care orbitele [u] sunt mulțimi deschise în U_G pentru orice $u \in U_G$, atunci există un sistem Haar (continuu) $\{\nu^u, u \in U_G\}$ pe G. Sistemul de măsuri $\{\nu^u, u \in U_G\}$ poate fi ales astfel încât supp $\nu^u = G^u$ pentru orice u din U_G.

Demonstrație. Aplicând teorema precedentă , rezultă că există un sistem pre-Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ pe G. Din teorema 2.3.9, rezultă continuitatea sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$. ■

<u>*Propoziție 2.3.18 (Corollary 4.5 [15]).*</u> Dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă cu proprietatea că toate orbitele $[u]$ $(u \in U_G)$ sunt mulțimi deschise în U_G, atunci aplicațiile r şi d sunt deschise. În particular, dacă G este un grupoid tranzitiv local compact şi cu bază numărabilă, atunci aplicațiile r şi d sunt deschise.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că r este deschisă. Conform corolarului 2.3.17, un grupoid local compact cu bază numărabilă şi cu orbite deschise admite un sistem Haar (continuu). Aplicând propoziția 2.2.14, se obține că r este o aplicație deschisă. ■

d. Sisteme Haar şi morfisme continue pe spațiul unităților unui grupoid local compact

Vom stabilii o proprietate de continuitate a unui sistem invariant de măsuri pe un grupoid local compact cu bază numărabilă. Utilizând această proprietate vom arăta că pentru fiecare $u \in U_G$ aplicația $r_u : G_u \to [u]$, $r_u(x) = r(x)$ este deschisă. În consecință, va rezulta că orice grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă este "principal" (Definition 1.18/pg. 27[46]). Pentru astfel de grupoizi K. Mackenzie a arătat că: Dacă G este un grupoid "principal", H este un grupoid topologic şi $F : G \to H$ este un morfism algebric care este continuu în fiecare unitate u din U_G, atunci F este continuu pe întreg grupoidul G (Proposition 1.21/pg. 30 [46]).

În partea a doua a acestei secțiuni vom arăta că orice grupoid, G, local compact cu bază numărabilă cu aplicația $r : G \to U_G$ deschisă şi care are proprietatea că din continuitatea unui morfism mărginit, $F : G \to (\mathbf{R}, +)$, în fiecare $u \in U_G$ rezultă continuitatea lui F pe G, admite un sistem Haar (continuu). De fapt, vom demonstra că pentru grupoizii G cu aplicația $r : G \to U_G$ deschisă, continuitatea unui sistem Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este echivalentă cu continuitatea morfismelor de tipul

$$x \overset{F_f}{\mapsto} \int f(y) d\nu^{d(x)} - \int f(y) d\nu^{r(x)}(y) \; [:G \to \mathbf{R}],$$

unde $f : G \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă cu suport compact. Aceste morfisme însă, conform propoziției 2.3.8, sunt continue în fiecare u din U_G.

<u>Definiție 2.3.19.</u> Un sistem invariant la stânga pe G este o familie de măsuri Radon (pozitive) $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ cu următoarele proprietăți:

1. $\nu_{u,v}$ este concentrată pe G_v^u $(\forall)$ $u,v \in U_G$, $u \sim v$.
2. Pentru orice $v \in U_G$, orice $x \in G|_{[v]}$ şi orice funcție continuă cu suport compact $f:G\to \mathbf{C}$,

$$\int f(xy) d\nu_{d(x),v}(y) = \int f(y) d\nu_{r(x),v}(y)$$

3. Dacă $u \notin [v]$, atunci $\nu_{u,v} = 0$.

Lemă 2.3.20 (Lemma 5.2 [15]). Dacă G este un grupoid local compact al cărui spaţiu al unităţilor U_G are o vecinătate simetrică d-relativ compactă U, iar $f : G \to \mathbf{C}$ este o funcţie continuă cu suport compact şi $v \in U_G$, atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există W_ε, o vecinătate d-relativ compactă a lui U_G, a.î:

$$x \in W_\varepsilon \Rightarrow \left| \int f(y) d\nu_{d(x),v}(y) - \int f(y) d\nu_{r(x),v}(y) \right| < \varepsilon \nu_{d(x),v}(U \operatorname{supp} f)$$

Demonstraţie. Demonstraţia este analoagă lemei 2.3.7. ■

Propoziţie 2.3.21. (Proposition 5.3 [15]). Fie G un grupoid local compact al cărui spaţiu al unităţilor U_G are un sistem fundamental de vecinătăţi d-relativ compacte. Pentru fiecare funcţie continuă cu suport compact $f : G \to R$ şi fiecare $v \in U_G$ definim $F_{f,v} : G \to R$ prin

$$F_{f,v}(x) = \int f(y) d\nu_{d(x),v} - \int f(y) d\nu_{r(x),v}(y) \quad (\forall)\ x \in G$$

şi $\varphi_{f,v} : U_G \to R$ prin

$$\varphi_{f,v}(u) = \int f(y) d\nu_{u,v}(y) \quad (\forall)\ u \in U_G$$

Atunci

(i) $F_{f,v}$ este un morfism algebric de grupoizi.

(ii) $F_{f,v}|_{G^u}$ şi $F_{f,v}|_{G_u}$ sunt aplicaţii continue pentru orice $u \in [v]$.

(iii) Dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă, şi cu orbite local compacte, atunci restricţia lui $\varphi_{f,v}$ la [v] este continuă.

Demonstraţie. Demonstraţia este asemănătoare cu demonstraţia propoziţiei 2.3.8. ■

Teoremă 2.3.22 (Theorem 5.4 [15]). Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă şi cu proprietatea că orbitele [u] ($u \in U_G$) sunt submulţimi deschise ale lui U_G, şi fie $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ un sistem invariant la stânga. Atunci pentru orice funcție continuă cu suport compact, $f: G \to C$, şi orice v din U_G aplicația $u \mapsto \int f(y) d\nu_{u,v}(y) [: U_G \to \mathbf{C}]$ este continuă.

Demonstrație. Se aplică propoziția precedentă. ■

<u>*Propoziție 2.3.23 (Proposition 5.5 15]).*</u> Dacă G este un grupoid tranzitiv, local compact cu bază numărabilă atunci există un sistem invariant la stânga, $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$, cu proprietatea că $\mathrm{supp}(\nu_{u,v}) = G_v^u$ pentru orice $u,v \in U_G$.

Demonstrație. Fie $e \in U_G$ o unitate fixată şi μ o măsură Haar la stânga pe grupul local compact G_e^e. G^e şi U_G fiind mulțimi închise ale unui spațiu local compact cu bază numărabilă G, sunt la rândul lor spații local compacte cu bază numărabilă. Deoarece G este grupoid topologic tranzitiv, $d : G^e \to U_G$ este o aplicație continuă şi surjectivă. Aplicând Lemma 1.1/pg. 102 [47] spațiilor local compacte cu bază numărabilă G^e şi U_G, rezultă că aplicația continuă şi surjectivă $d : G^e \to U_G$ are o secțiune boreliană regulată $\sigma : U_G \to G^e$.

Pentru u şi v din U_G definim $\nu_{u,v}$ prin

$$\int f(y) d\nu_{u,v}(y) = \int_{G_e^e} f(\sigma(u)^{-1} y \sigma(v)) d\mu(y), \ (\forall)\ f \geq 0 \text{ boreliană}$$

Este uşor de verificat că sistemul de măsuri obținut are proprietățile cerute. ■

<u>*Propoziție 2.3.24 (Proposition 5.6 [15]).*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă şi $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ un sistem invariant la stânga pe G cu proprietatea că $\mathrm{supp}\nu_{u,v} = G_v^u$ pentru orice $u,v \in U_G$, atunci următoarele condiții sunt echivalente:

(1) Pentru fiecare $v \in U_G$ aplicația $r_v : G_v \to U_G$, $r_v(x) = r(x)$ este deschisă (sau echivalent, aplicația $d_v : G^v \to U_G$ este deschisă).

(2) Pentru orice funcție continuă cu suport compact $f: G \to C$ şi orice $v \in U_G$ aplicația $u \mapsto \int f(y) d\nu_{u,v}(y) [: U_G \to C]$ este continuă.

Demonstrație. (1) => (2) rezultă din propoziția 2.3.21.

(2) => (1). Fie $x \in G$ şi fie U o vecinătate compactă a lui x în G_v. Considerăm o funcție continuă nenegativă, f, cu $f(x) > 0$ şi $\mathrm{supp}\, f \subset U$. Fie V interiorul lui supp f.

Arătăm că $W = r(V)$ este o vecinătate deschisă a lui $u_0 = r(x)$. Aceasta rezultă imediat dacă ținem seama că $\mathrm{supp}\nu_{u,v} = G_v^u$ pentru orice u şi v şi deci, $\nu_{u,v}(f) > 0$ dacă şi numai dacă $u \in W$. ■

<u>*Teoremă 2.3.25 (Corollary 5.7 [15]).*</u> Dacă G este grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă şi $v \in U_G$ atunci aplicația $r_v : G_v \to U_G$, $r_v(x) = r(x)$ este deschisă.

În consecință, dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă şi cu orbite local compacte, iar $v \in U_G$, atunci aplicația $r_v : G_v \to [v]$ este deschisă.

Demonstrație. Să presupunem că G este tranzitiv. Din propoziția 2.3.23 rezultă că există un sistem invariant la stânga, $\{\nu_{u,v},\ u,v \in U_G\}$, cu proprietatea că $\mathrm{supp}\nu_{u,v} = G_v^u$ pentru orice $u,v \in U_G$, iar din propoziția 2.3.21 rezultă că este îndeplinită condiția (2) din propoziția 2.3.24. Deci, pentru orice $v \in U_G$ aplicația $r_v : G_v \to U_G$ este deschisă.

Dacă G nu este tranzitiv, pentru fiecare $v \in U_G$ considerând grupoizii $G|_{[v]}$ obținem că aplicația $r_v : G_v \to [v]$ este deschisă. ■

Un rezultat similar teoremei de mai sus este stabilit de Arlan Ramsay în [65] utilizând o variantă de caracterizare a mulțimilor de prima categorie Baire. Ramsay a arătat că pentru un grupoid tranzitiv topologic polonez aplicațiile r_u sunt deschise pentru orice unitate u.(Theorem 3.2/pg. 365 [65]). În [57] (Theorem 2.2 B/pg. 8) s-a demonstrat acelaşi rezultat pentru grupoizii tranzitivi local compacți cu bază numărabilă, în ipoteza că aplicația r este deschisă (dar am văzut în propoziția 2.3.18 că în cazul tranzitiv r este deschisă). Demonstrația din [57] utilizează în mod esențial faptul că grupoidul este cu bază numărabilă şi că spațiul unităților este de categoria a II-a Baire. În cazul demonstrației din această lucrare faptul că topologia este bază numărabilă este utilizat doar pentru a asigura existența unei secțiuni regulate.

<u>*Lemă 2.3.26 (Lemma 5.9 [15]).*</u> Fie G un grupoid local compact şi fie u o unitate din U_G. Următoarele condiții sunt echivalente:

(1) Aplicația $r_u : G_u \to [u]$ este deschisă (sau echivalent $d_u : G^u \to [u]$ este deschisă).

(2) Aplicațiile $\delta_u : G^u \times G^u \to G|_{[u]}$, $\delta_u(x,y) = x^{-1}y$, şi $d|_{G|_{[u]}} : G|_{[u]} \to [u]$ sunt deschise.

Demonstrație. (1) => (2). Observăm că $r_v : G_v \to [u] = [v]$ este deschisă pentru orice $v \sim u$. Dacă V este deschisă în $G|_{[u]}$ atunci $r|_{G|_{[u]}}(V) = \bigcup_{v\in[u]} r_v\left(G^v \cap V\right)$ este deschisă în [u]. Rezultă că $r|_{G|_{[u]}}$ şi $d|_{G|_{[u]}}$ sunt aplicații deschise.

Pentru a demonstra că aplicația δ_u este deschisă vom folosi un raționament asemănător celui din [57] (Theorem 2.2.A/pg. 7). Aplicația δ_u se obține prin compunerea

$$(x,y) \to (x, x^{-1}y) \to x^{-1}y$$

care duce $G^u \times G^u$ în $G^u * G|_{[u]}$ şi apoi în $G|_{[u]}$, unde $G^u * G|_{[u]} = \{(x,y) \in G^u \times G|_{[u]} \mid d(x) = r(y)\}$. Este uşor de observat că prima aplicație este un homeomorfism. Pentru a demonstra că a doua aplicație este deschisă utilizăm următorul rezultat: Dacă X,Y şi Z sunt spații topologice şi f,g sunt funcții de la X respectiv Y la Z, atunci notăm $X * Y := \{(x,y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ şi înzestrăm $X*Y$ cu topologia indusă de pe $X \times Y$. Următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} X * Y & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

este comutativă, unde π_X şi π_Y sunt proiecțiile lui $X * Y$ pe X şi Y, respectiv. Dacă f este deschisă şi g este continuă, atunci π_Y este deschisă. Într-adevăr dacă U, V sunt deschise în X respectiv Y, atunci

$$\pi_Y\left((U \times V) \cap (X * Y)\right) = g^{-1}\left(f(U)\right) \cap V$$

este o mulțime deschisă.

Deoarece $\{(U \times V) \cap (X * Y) \mid$ U, V deschise în X respectiv Y $\}$ este o bază pentru topologia lui $X*Y$, rezultă că π_Y este deschisă. În cazul nostru avem,

$$\begin{array}{ccc} G^u * G|_{[u]} & \longrightarrow & G^u \\ \downarrow & & \downarrow d_u \\ G|_{[u]} & \xrightarrow{r} & [u] \end{array}$$

şi din faptul că d_u este deschisă rezultă că proiecţia lui $G^u * G$ pe G este deschisă.

(2) => (1). Dacă V este o submulţime deschisă a lui G^u, atunci $d_u(V) = d|_{G|_{[u]}}(\delta_u(V,V))$ este deschisă în [u]. Deci d_u este o aplicaţie deschisă. ■

Observaţie 2.3.27 (Corollary 5.10 [15]). Orice grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă este "principal" în sensul utilizat de K. Mackenzie în [46] (i.e are proprietatea că aplicaţiile $r_u : G_u \to U_G$ şi $\delta_u : G^u \times G^u \to G$ sunt deschise pentru orice $u \in U_G$).

Utilizăm în continuare notaţiile din propoziţia 2.3.8.

Propoziţie 2.3.28 (Theorem 6.1 [15]). Fie G un grupoid local compact cu U_G paracompact şi cu aplicaţiile r şi d deschise. Considerăm un sistem pre-Haar pe G şi presupunem că F_f este un morfism continuu pe G pentru orice funcţie continuă cu suport compact f. Atunci sistemul pre-Haar este continuu în fiecare unitate $u \in U_G$ pentru care $[u]\setminus\{u\}$este nevidă. Dacă sistemul pre-Haar, $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, are în plus, proprietatea că există o funcţie h : G → [0, 1], universal măsurabilă pe fiecare componentă de tranzitivitate $G|_{[u]}$, cu proprietatea că $\nu^u(h) = 1$ pentru orice $u \in U_G$, atunci $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este continuu în orice $u \in U_G$.

Demonstraţie. Deoarece U_G este paracompact, U_G are un sistem fundamental de vecinătăţi d-relativ compacte. Fie u o unitate astfel încât $[u]\setminus\{u\}$ este nevidă şi fie $v \in [u]\setminus\{u\}$. Deoarece $u \neq v$, există două submulţimi deschise ale lui U_G, $U_0 \ni u$ şi $V_0 \ni v$ a.î $U_0 \cap V_0 = \phi$. Deoarece U_G este paracompact, şi în consecinţă normal, există U şi V, două mulţimi deschise în U_G, astfel încât $u \in U \subset \overline{U} \subset U_0$ şi $v \in V \subset \overline{V} \subset V_0$. Fie

$\{g_U, g_V\}$ o partiție a unității asociate acoperirii deschise a lui U_G, $\{U_G\setminus \overline{U}, U_G\setminus \overline{V}\}$. Aceasta înseamnă că: $g_U(w) \geq 0$ şi $g_V(w) \geq 0$ pentru orice $w \in U_G$, supp $g_U \subset U_G\setminus \overline{U}$ şi supp $g_V \subset U_G\setminus \overline{V}$, şi $g_U(w)+g_V(w) = 1$ pentru orice $w \in U_G$. Pentru fiecare funcție cu suport compact, $f: G \to \mathbf{C}$, notăm $f_U = f\, g_U \circ r$ şi $f_V = f\, g_V \circ r$. Din $f = f_U + f_V$, rezultă $\varphi_f = \varphi_{f_U} + \varphi_{f_V}$. Pe de altă parte,

$$\varphi_{f_U}(w) = \int f_U(y)d\nu^w(y) = \int f(y)g_U(r(y))d\nu^w(y) = g_U(w)\int f(y)d\nu^w(y) = 0$$

pentru orice $w \in U$. De aici rezultă $\varphi_f(w) = \varphi_{f_V}(w)$ pentru orice $w \in U$. Analog, $\varphi_{f_V}(w) = 0$ pentru orice $w \in V$.

Fie $(u_i)_{i\in I}$ un şir care converge la u. Putem presupune $u_i \in U$ pentru orice i, şi deci, $\varphi_f(u_i) = \varphi_{f_V}(u_i)$ pentru orice i. Astfel pentru a demonstra că φ_f este continuă în u este suficient să arătăm că $\lim_i \varphi_{f_V}(u_i) = \varphi_{f_V}(u)$. Luăm x astfel încât $r(x) = u$ şi $d(x) = v$. Pentru că aplicația $r: G \to U_G$ este deschisă, există un şir $(x_i)_{i\in I}$ în G astfel încât $(x_i)_{i\in I}$ converge la x şi $r(x_i) = u_i$ pentru orice i. Deoarece F_{f_V} este continuă pe G,

$$\lim_i F_{f_V}(x_i) = F_{f_V}(x) = \varphi_{f_V}(v) - \varphi_{f_V}(u) = -\varphi_{f_V}(u) \quad (1)$$

Pe de altă parte, $\lim_i d(x_i) = d(x) = v$ şi pentru i suficient de mare putem presupune $d(x_i) \in V$. Deci, $\varphi_{f_V}(d(x_i)) = 0$ iar din $F_{f_V}(x_i) = \varphi_{f_V}(d(x_i)) - \varphi_{f_V}(r(x_i))$, rezultă că

$$\lim_i F_{f_V}(x_i) = -\lim_i \varphi_f(r(x_i)) \quad (2)$$

Din (1) şi (2), rezultă că $\lim_i \varphi_{f_V}(u_i) = \varphi_{f_V}(u)$.

În cazul în care $u = [u]$ şi sistemul Haar are proprietatea suplimentară din ipoteză, continuitatea în u se va obține printr-o demonstrație asemănătoare cu cea a lemei 1.3 /pg. 6 [70]. Fie B spațiul vectorial al şirurilor de numere reale mărginite şi fie $s \mapsto \mathrm{Lim}\, s$ [: $B \to \mathbf{R}$] o aplicație liniară cu următoarele proprietăți:

(1) Dacă toți termenii şirului s sunt nenegativi, atunci $\mathrm{Lim}\, s \geq 0$;

(2) $\mathrm{Lim}(1, 1, \ldots, 1, \ldots) = 1$;

(3) $\mathrm{Lim}(s_1, s_2, s_3, \ldots) = \mathrm{Lim}(s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3, \ldots)$;

(4) Dacă $s, t \in B$ şi $\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0$, atunci $\mathrm{Lim}\, s = \mathrm{Lim}\, t$.

Se observă că Lim(a, a, …, a, …) = a şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$, atunci Lim($s_1$, s_2, s_3, …) = a. De asemenea dacă Lim s' = a pentru orice subşir s' al şirului s atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Fie $(u_i)_{i\in I}$ un şir care converge la u. Pentru fiecare funcţie, f : G → R, continuă cu suport compact notăm

$$\mu(f) = \mathrm{Lim}\left(i \mapsto \int f(y)d\nu^{u_i}(y)\right).$$

μ este o funcţională liniară şi pozitivă pe mulţimea funcţiilor continue cu suport compact, definite pe G. Arătăm că μ(f) depinde doar de restricţia lui f la $G^u = G^u_u$. Fie f şi g două funcţii care coincid pe G^u_u, şi fie K mulţimea compactă egală cu (supp f ∪ supp g) ∩ r^{-1}({u_i, i ∈ I}∪{u}). Atunci avem

$$\left|\int f(y)d\nu^{u_i} - \int g(y)d\nu^{u_i}\right| \le \int \left|f(y)-g(y)\right|d\nu^{u_i} \le \sup_{y\in G^{u_i}}\left|f(y)-g(y)\right|\nu^{u_i}(K)$$

Din faptul că $\sup\limits_{y\in G^{u_i}}\left|f(y)-g(y)\right|$ converge la zero, rezultă că μ(f) = μ(g). Arătăm în continuare că μ este invariantă la stânga, deci că este o măsură Haar pe G^u_u. Fie x ∈ G^u_u. Deoarece r : G → U_G este o aplicaţie deschisă, există un şir $(x_i)_i$ în G care converge la x astfel încât $r(x_i) = u_i$. Fie f : G → R o funcţie continuă cu suport compact şi fie g prelungirea continuă la G a funcţiei (y ↦ f(x^{-1}y) [: G^u → **R**]). Atunci avem

$$\left|\int f(y)d\nu^{u_i}(y) - \int g(y)d\nu^{u_i}(y)\right|$$

$$= \left|\int f(y)d\nu^{r(x_i)}(y) - \int f(y)d\nu^{d(x_i)}(y) + \int f(y)d\nu^{d(x_i)}(y) - \int g(y)d\nu^{r(x_i)}(y)\right|$$

$$\le \left|\int f(y)d\nu^{r(x_i)}(y) - \int f(y)d\nu^{d(x_i)}(y)\right| + \left|\int f(y)d\nu^{d(x_i)}(y) - \int g(x_i y)d\nu^{d(x_i)}(y)\right|$$

$$\le \left|F_f(x_i)\right| + \sup_{y\in G^{d(x_i)}}\left|f(y)-g(x_i y)\right|\nu^{d(x_i)}(K),$$

unde

$$K = (\mathrm{supp}\, f \cup \{x, x_i, i \in I\}^{-1}\mathrm{supp}\, g) \cap r^{-1}(\{d(x_i), i \in I\}\cup\{u\}).$$

Dar $\lim_i F_f(x_i) = F_f(x) = 0$ şi de asemenea şirul $\sup_{y \in G^{d(x_i)}} \left| f(y) - g(x_i y) \right| \nu^{d(x_i)}(K)$ converge la zero, de unde rezultă că $\mu(f) = \mu(g)$. Deci μ ca şi ν^u sunt măsuri Haar pe G_u^u şi în plus, $\mu(h) = 1 = \nu^u(h)$. Din unicitatea măsurii Haar rezultă că $\mu = \nu^u$, şi în consecinţă $\int f(y) d\nu^{u_i}$ converge la $\int f(y) d\nu^u$ pentru orice funcţie, f: $G \to \mathbf{R}$, continuă cu suport compact. ■

Propoziţie 2.3.29. Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă, cu aplicaţia $r : G \to U_G$ deschisă, şi care are proprietatea că din continuitatea unui morfism mărginit, $F : G \to (\mathbf{R},+)$, în fiecare $u \in U_G$ rezultă continuitatea lui F pe G. Atunci G admite un sistem Haar (continuu).

Demonstraţie. Se utilizează propoziţia 2.3.8, teorema 2.3.16 şi propoziţia 2.3.28. ■

Observaţie 2.3.30. În [46] (pg.31) K. Mackenzie pune următoarea întrebare: Dacă G şi H sunt doi grupoizi topologici şi $F : G \to H$ este un morfism algebric continuu în fiecare punct $u \in U_G$, este F continuu pe întreg grupoidul G ? Se ştie că un grupoid local compact r-discret admite un sistem Haar (continuu) dacă şi numai dacă aplicaţia r este homeomorfism local (Proposition 2.8/pg. 19 [68]). Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă, r-discret. Dacă aplicaţia $r : G \to U_G$ este deschisă, dar nu este un homeomorfism local, atunci există un morfism de tipul $F_f : G \to \mathbf{R}$ care nu e continuu pe întreg grupoidul G (altfel conform propoziţiilor 2.3.16 şi 2.3.28 G ar admite un sistem Haar continuu). Pe de altă parte F_f este continuu în fiecare u din U_G. Deci dacă ar exista un grupoid G cu proprietăţile de mai sus, răspunsul la întrebarea lui Mackenzie ar fi negativ.

e. Topologii în raport cu care sistemele pre-Haar devin continue

A. K. Seda în [49] a demonstrat că în construcția C^*-algebrei asociate unui grupoid înzestrat cu un sistem Haar, condiția de continuitate impusă sistemului de măsuri este esențială. În această secțiune vom demonstra că pentru orice grupoid G local compact cu bază numărabilă înzestrat cu un sistem pre-Haar, există o contracție (reducere) $G|_L$ cu proprietatea că se poate înlocui topologia indusă de G pe $G|_L$ cu o topologie local compactă în raport cu care sistemul pre-Haar devine continuu. Această contracție $G|_L$ este o reducere neesențială în raport cu orice măsură tranzitivă pe spațiul unităților. Dacă toate orbitele grupoidului sunt local închise, atunci contracția $G|_L$ poate fi aleasă să coincidă cu G.

În consecință, dându-se un sistem pre-Haar pe un grupoid G, putem înlocui topologia de pe G (trecând eventual la o contracție a grupoidului) astfel încât sistemul pre-Haar să poată fi văzut ca un sistem Haar, şi ca urmare putem construi C^*-algebra asociată acestui sistem. Vom folosi următoarea lemă:

Lema 2.3.31. Fie X şi Y două spații metrice şi fie $f : X \to Y$ o aplicație. Dacă A este o submulțime σ-compactă a lui X, K_1, K_2, …, K_n,… un şir de submulțimi compacte a cărui reuniune este X, şi dacă $f|_{K_n}$ este continuă pentru orice n, atunci există o funcție boreliană g: $f(A) \to A$ astfel încât $g(f(K_n)) \subset K_n$ pentru orice n şi $f(g(y))=y$ pentru orice $y \in A$.

Această lemă este o reformulare bazată pe un rezultat al lui Federer şi lui Morse [36] (vezi to [64] p. 317 sau Lemma 4.12/ p. 99 [56]) a următoarei lemei a lui Mackey (Lemma 1.1/p.102 [47]):

Lema 2.3.32. Dacă X şi Y sunt are două spații local compacte cu bază numărabilă, şi dacă f: $X \to Y$ este o aplicație continuă şi surjectivă, atunci f are o secțiune boreliană regulată. Aceasta înseamnă că există o funcție boreliană $g:Y\to X$ astfel încât $f(g(y))=y$ pentru orice $y \in Y$, şi $g(K)$ este relativ compactă în X pentru orice submulțime compactă K a lui Y.

Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem pre-Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Să notăm cu τ_0 topologia de pe G. Să presupunem că toate orbitele sunt local închise relativ la topologia τ_0. Pentru fiecare orbită [u], notăm cu $\tau_{[u]}$ topologia indusă pe componenta de tranzitivitate $G|_{[u]}$ de (G, τ_0). Fie τ topologia reuniune disjunctă de pe $\coprod_{[u]} G|_{[u]}$. Atunci G înzestrat cu τ este un grupoid (topologic) local compact.

Topologiile induse de τ_0 şi τ pe $G|_{[u]}$ coincid, în cazul fiecărei orbite [u]. În consecinţă, topologiile induse de τ_0 şi τ pe fiecare fibră G^u coincid. De aceea fiecare măsură ν^u poate fi interpretată ca o măsură boreliană pe G^u relativ la ambele topologii. Să presupunem acum că înzestrăm G cu topologia reuniune disjunctă τ. Orbitele [u] sunt submulţimi deschise ale spaţiului unităţilor grupoidului (G, τ). Aplicând teorema 3.2.9 , rezultă că sistemul pre-Haar este continuu, şi în consecinţă este un sistem Haar pe G înzestrat cu topologia reuniune disjunctă τ. De aceea, putem enunţa următorul rezultat

Propoziţie 2.3.33 (Proposition 10 [24]). Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă cu proprietatea că toate orbitele sunt local închise în spaţiul unităţilor U_G. Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar pe G. Dacă supp(ν^u)= G^u pentru orice u $\in$ $U_{G.}$, atunci putem înzestra G cu o topologie local compactă, mai fină decât topologia iniţială, astfel încât în raport cu noua topologie G rămâne grupoid topologic iar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ devine sistem Haar.

Dacă o orbită [u] nu este local închisă, atunci topologia de pe $G|_{[u]}$ nu este local compactă. Dacă un sistem pre-Haar are în plus o proprietate de măsurabilitate, atunci ($G|_{[u]}$, $\{\nu^w, w \in [u]\}$) poate fi privit ca un grupoid cu măsură (Definition 3.11/p. 39 [#] ce apare în această lucrare ca definiţia 2.1.2). Aplicând un rezultat al lui Ramsay (Lemma 4.5/p. 277 [62]) , rezultă că toate clasele de măsuri determinate de $d_*(\nu^w)$ cu w $\in$ [u] sunt echivalente. În cele ce urmează vom numi măsură tranzitivă o măsură ce aparține clasei determinate de $d_*(\nu^w)$. Aşa cum am observat mai înainte, în general, $G|_{[u]}$ nu este local compact. Totuşi ținând seama că $\{\nu^w, w \in [u]\}$ este un sistem pre-Haar pe $G|_{[u]}$, presupunând că are şi o proprietate de măsurabilitate, şi utilizând un rezultat din [64] (Theorem 4.1/p. 330), putem înlocui $G|_{[u]}$ cu o reducere neesențială $G|_L$ (relativ la $d_*(\nu^w)$) având proprietatea că poate fi înzestrată cu o topologie local compactă relativ la care este grupoid topologic.

Vom aborda puțin diferit (fată de [64]) construcția unei tolopogii local compacte pentru $G|_{[u]}$, ținând cont că nu am presupus că $\{\nu^w, w \in [u]\}$ are vreo proprietate de măsurabilitate . Fie μ o probabilitate din clasa determinată de $d_*(\nu^w)$. Deoarece topologia lui G este local compactă cu bază numărabilă, rezultă că G este un spațiu metric şi aşa este şi [u]. Fibrele G^u sunt σ-compacte, şi în consecință putem aplica lema 2.3.31 aplicației continue şi surjective $d_{[u]} : G^u \to [u]$ definită prin $d_{[u]}(x) = d(x)$ pentru orice x în G^u. Astfel, dacă luăm un şir $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ de mulțimi compacte a căror reuniune este G^u, atunci există o funcție boreliană $\sigma : [u] \to G^u$ astfel încât $d(\sigma(u))=u$ pentru orice u în $[u_0]$ şi $\sigma(d(K_n)) \subset K_n$. Deoarece σ este o funcție boreliană pe [u], există un şir $L_1, L_2, \ldots, L_m, \ldots$ de submulțimi compacte ale lui [u], disjuncte două câte două a căror reuniune L are complementara nulă relativ la μ, şi cu proprietatea că pentru orice m, $\sigma|_{L_m}$ este continuă. Fie

$$G_{n,m} = \{x \in G|_L : d(x) \in L_n \text{ şi } r(x) \in L_m\}$$

şi fie $\varphi_{n,m} : G_{n,m} \to L_m \times G_u^u \times L_n$ definită prin

$$\varphi_{n,m}(x) = (r(x), \sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}, d(x)).$$

Este uşor de observat că $\varphi_{n,m}$ este o aplicație bijectivă a cărei inversă este

$$(u, z, v) \to \sigma(u)^{-1}z\sigma(v).$$

Continuitatea aplicației $\sigma|_{L_m}$ pentru orice m, implică faptul că $\varphi_{n,m}$ este homeomorfism pentru orice m şi n. Deoarece G_u^u este închis în G, G_u^u este un spațiu local compact cu topologia indusă de G. De aceea şi din faptul că L_m este o mulțime compactă pentru orice m, rezultă că $L_m \times G_u^u \times L_n$ este un spațiu local compact pentru orice m şi n. Deci şi $G_{n,m}$ este un spațiu local compact pentru orice m şi n. Grupoidul

$G|_L$ este egal cu reuniunea disjunctă $\coprod_{(n,m)} G_{n,m}$ din punct de vedere algebric. Înzestrând $G|_L$ cu topologia reuniune disjunctă, obținem o topologie local compactă pe $G|_L$. Se demonstrează uşor că $G|_L$ (înzestrat cu topologia reuniune disjunctă) este un grupoid topologic.

Se observă că orice mulțime compactă relativ la topologia reuniune disjunctă pe $G|_L$ intersectează doar un număr finit de mulțimi $G_{n,m}$. Intersecția ei cu orice mulțime $G_{n,m}$ este de asemenea o mulțime compactă. Topologia indusă pe fiecare mulțime $G_{n,m}$ de pe G şi topologia indusă de pe $G|_L$ (înzestrat cu topologia reuniune disjunctă) coincid. De aceea orice submulțime compactă a lui $G_{n,m}$ este compactă şi ca submulțime a lui $G|_L$. Ca urmare, orice mulțime compactă în topologia reuniune disjunctă pe $G|_L$ este compactă relativ la topologia de pe G. Măsurile din sistemul pre-Haar pot fi văzute ca măsuri boreliene şi relativ la topologia reuniune disjunctă. Aplicând teorema 2.3.9, grupoidului tranzitiv $G|_L$ şi sistemului pre-Haar $\{\nu^w, w \in L\}$, rezultă că $\{\nu^w, w \in L\}$ este continuu.

Rezumând, rezultă că putem înlocui fiecare componentă de tranzitivitate $G|_{[u]}$ printr-o reducere neesențială de forma $G|_{L_{[u]}}$ descrisă mai sus. Înzestrând $\coprod_{[u]} G|_{L_{[u]}}$ cu topologia reuniune disjunctă se obține un grupoid topologic local compact. Sistemul pre-Haar inițial poate fi privit ca un sistem continuu pe acest grupoid. În consecință putem enunța următorul rezultat :

<u>*Teorema 2.3.34 (Theorem 11 [24]).*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă. Fie Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ un sistem pre-Haar pe G, cu proprietatea că $supp(\nu^u) = G^u$ pentru orice $u \in U_G$. Pentru fiecare orbită [u], fie $\mu_{[u]}$ o probabilitate tranzitivă pe [u] (o probabilitate echivalentă cu $d_*(\nu^u)$). Atunci pentru orice orbită [u] există o submulțime local compactă $L|_{[u]}$ a lui [u], a cărei complementară $[u] - L|_{[u]}$ este $\mu_{[u]}$ - nulă. Înzestrând $\coprod_{[u]} G|_{L_{[u]}}$ cu topologia reuniune disjunctă se obține un

grupoid topologic local compact pentru care sistemul de măsuri $\{\nu^u, u \in L\}$ este un sistem Haar, unde $L = \bigcup\limits_{[u]} L_{[u]}$.

f. Topologii pe grupoidul principal asociat unui grupoid local compact

Orice grupoid G defineşte o relație de echivalență pe spațiul unităților U_G:

$$u \sim v \iff \text{există } x \in G \text{ astfel încât } r(x) = u \text{ şi } d(x) = v.$$

În această secțiune notăm cu R graficul acestei relații de echivalență. Înzestrat cu produsul şi aplicația de inversare asociate în mod obişnuit unei relații de echivalență, R devine un grupoid denumit grupoidul principal asociat lui G. Dacă G este un grupoid topologic, atunci putem înzestra R cu topologia produs indusă de pe $U_G \times U_G$. Dacă topologia lui G este local compactă, atunci Topologia produs pe R este local compactă dacă şi numai dacă R este o submulțime local închisă în $U_G \times U_G$. Pe de altă parte, dacă înzestrăm R cu topologia produs, existența unui sistem Haar pe G nu implică neapărat existența uni sistem Haar pe R. Vom înzestra R cu topologia cât indusă de aplicația

$$\theta : G \to U_G \times U_G$$

definită prin

$$\theta(x) = (r(x), d(x)), \text{ pentru orice } x \in G.$$

Această topologie conține mulțimile a căror imagine inversă prin θ este deschisă ca submulțime a lui G. Vom demonstra că dacă restricția aplicației r la fibratul grupurilor de izotropie:

$$G' = \{x : r(x) = d(x)\}$$

este o aplicație deschisă, atunci R înzestrat cu topologia cât este un grupoid local compact şi existența unui sistem Haar pe G este echivalentă cu existența unui sistem Haar pe R. Vom folosi legătura dintre sistemele Haar boreliene Pe G şi sistemele Haar boreliene pe R stabilită de Jean Renault în [70].

În cele ce urmează presupunem că G este un grupoid local compact cu bază numărabilă. În prima secțiune din [70] Renault construieşte un sistem Haar borelian pentru fibratul grupurilor de izotropie G'. Pentru acesta se consideră o funcție

$$F_0 : G \to [0, 1]$$

continuă cu suport condițional compact astfel încât F_0 este identic egală cu 1 pe U_G. Apoi pentru fiecare unitate $u \in U_G$ se alege măsura Haar β_u^u pe grupul local compact G_u^u în aşa fel încât

$$\int F_0(y) d\beta_u^u(y) = 1.$$

Renault defineşte $\beta_v^u = x\beta_v^v$ cu x este un element din G_v^u - unde ca de obicei

$$x\beta_v^v(f) = \int f(xy) d\beta_v^v(y)$$

Dacă z este un alt element din , atunci $x^{-1}z \in G_v^v$, şi folosind faptul că β_v^v este măsură pe Haar pe G_v^v, obținem că măsura β_v^u este independentă de alegerea lui x. Pentru orice submulțime compactă $K \subset G$, $\sup\limits_{u,v} \beta_v^u(K) < \infty$. Renault defineşte de asemenea un 1-cociclu δ pe G astfel încât $\delta|_{G_u^u}$ să fie funcția modulară a grupului local compact G_u^u. Funcția δ are proprietatea că este mărginită pe compacte. De asemenea $\delta^{-1}=1/\delta$ este mărginită pe compacte. Folosind sistemul de măsuri β, Renault demonstrează că există o corespondență biunivocă între sistemele boreliene pe G şi R. Astfel dacă

$$\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$$

este un sistem borelian pe G, atunci există un sistem borelian

$$\alpha = \{\alpha^u, u \in U_G\}$$

pe R astfel încât

$$\nu^u = \int \beta_t^s d\alpha^u(s,t), \text{ pentru orice } u \in U_G.$$

Reciproc, dacă α este un sistem Haar borelian pe R, atunci sistem de măsuri ν definit mai sus este un sistem Haar borelian pe G. În a doua secțiune din [67] A. Ramsay şi M.E. Walter arată că

$$\sup_u \alpha^u(\theta(K)) < \infty \text{ pentru orice submulțime compactă } K \subset G.$$

Dacă μ este o măsură cvasi-invariantă pentru $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, atunci μ este cvasi-invariantă şi pentru $\alpha = \{\alpha^u, u \in U_G\}$. Dacă Δ_R este funcţia modulară asociată sistemului $\alpha = \{\alpha^u, u \in U_G\}$ şi măsurii μ, atunci $\Delta = \delta\Delta_R \circ \theta$ este funcţia modulară asociată sistemului $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ şi măsurii μ.

Pentru orice $u \in U_G$, măsura α^u este concentrată pe $\{u\} \times [u]$. De aceea există o măsură η_u concentrată pe $[u]$ astfel încât $\alpha^u = \varepsilon_u \times \eta_u$, unde ε_u este măsura lui Dirac în u. Deoarece $\alpha = \{\alpha^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar borelian rezultă că

$$\eta_u = \eta_v \text{ pentru orice } (u,v) \in R$$

şi funcţia

$$u \to \int f(s)d\eta_u(s)$$

este boreliană pentru orice funcţie boreliană nenegativă f definită pe U_G. Următoarea lemă se obţine dintr-un rezultat al lui Renault din [70] (Lemma 1.7/p. 9):

Lema 2.3.35. Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât. Atunci există un sistem de măsuri $\beta = \{\beta_v^u, (u,v) \in R\}$ şi o aplicaţie $\delta: G \to \mathbf{R}_+^*(0, \infty)$ cu următoarele proprietăţi

1. Aplicaţia
$$(u,v) \to \int f(x)d\beta_v^u(x)$$
este boreliană, pentru orice funcţie boreliană nenegativă f definită pe G.
2. Suportul măsurii β_v^u este G_v^u pentru orice $(u,v) \in R$
3. $\sup_{u,v} \beta_v^u(K) < \infty$, pentru orice submulţime compactă $K \subset G$.
4. $\delta: G \to \mathbf{R}_+^*$ este morfism strict de grupoizi.
5. δ şi $\delta^{-1} = 1/\delta$ sunt mărginite pe mulţimile compacte din G
6. Pentru orice funcţie boreliană nenegativă f definită pe G
$$\int f(xy)d\beta_v^{d(x)}(y) = \int f(y)d\beta_v^{r(x)}(y), \text{ pentru orice } x \in G, v \in U_G \text{ cu } x \in [v].$$
7. Pentru orice funcţie boreliană nenegativă f definită pe G

$$\delta(x)\int f(yx)d\beta^{u}_{r(x)}(y)=\int f(y)d\beta^{u}_{d(x)}(y), \text{ pentru orice } x\in G,\ u\in U_G \text{ cu } x\in[u].$$

8. Pentru orice funcție boreliană nenegativă f definită pe G

$$\int f(y)d\beta^{u}_{v}(y)=\int f(y^{-1})\delta(y^{-1})d\beta^{v}_{u}(y), \text{ pentru orice } (u,v)\in R$$

9. Dacă $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G, atunci există $\alpha = \{\alpha^u, u \in U_G\}$ un sistem Haar borelian pe R, astfel încât

$$\int f(x)d\nu^u(x) = \int\int f(x)d\beta^{s}_{t}(x)d\alpha^u(s,t), \text{ pentru orice } u \in U_G.$$

$$\text{şi } \sup_u \alpha^u(\theta(K)) < \infty \text{ pentru orice submulțime compactă } K \subset G.$$

10. Fiecare măsură α^u de la punctul 9. este de forma $\alpha^u = \varepsilon_u \times \eta_u$, unde ε_u este măsura lui Dirac în u, iar $\eta_u = \eta_v$ pentru orice $u \sim v$.

O descompunere similară a sistemului Haar va fi obținută în secțiunea 2.4. În acea secțiune se va considera structura boreliană produs pe R (indusă de pe $U_G \times U_G$) şi se va pleca de la un sistem borelian fixat pentru R.

Notație 2.3.36. În cele ce urmează vom presupune că G este un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât. Vom fixa un sistem de măsuri $\beta = \{\beta^u_v, (u,v)\in R\}$ pe G ce îndeplineşte următoarele condiții

1. Suportul măsurii β^u_v este G^u_v pentru orice $(u,v) \in R$.
2. $\sup_{u,v}\beta^u_v(K) < \infty$, pentru orice submulțime compactă $K \subset G$.
3. Pentru orice funcție boreliană nenegativă f definită pe G

$$\int f(xy)d\beta^{d(x)}_{v}(y)=\int f(y)d\beta^{r(x)}_{v}(y), \text{ pentru orice } x\in G,\ v\in U_G \text{ cu } x\in[v].$$

Propoziție 2.3.37 (Proposition 1 [25]). Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicația

$\theta : G \to R$, definită prin $\theta(x) = (r(x), d(x))$ pentru orice $x \in G$.

Presupunem că aplicația

$r' : G' \to U_G$, definită prin $r'(x) = r(x)$ pentru orice $x \in G$,

este deschisă. Dacă $\beta = \{\beta_v^u, (u,v) \in R\}$ este un sistem de măsuri cu proprietățile din 2.3.36, atunci aplicația

$$x \to \int f(y)\beta_{d(x)}^{r(x)}(y)$$

este continuă pentru orice funcție f continuă pe G cu suport compact.

Demonstrație. Aplicând un raționament celui folosit de Renault în [70] (Lemma1.3/pg. 6) obținem continuitatea aplicației

$$u \to \int f(y)\beta_u^u(y)$$

pentru orice funcție f continuă pe G cu suport compact. Fie $x \in G$ şi $(x_i)_i$ un şir din G ce converge la x. Fie f o funcție continuă pe G cu suport compact şi g o prelungire la G continuă cu suport compact a funcție $y \to f(xy)$ definită pe $G^{d(x)}$. Notăm cu K mulțimea compactă:

$$(\mathrm{supp}(f)\{x, x_i, i=1,2,\dots\}^{-1} \cup \mathrm{supp}(g)) \cap r^{-1}(\{d(x), d(x_i), i = 1,2,\dots\}).$$

Avem

$$\left|\int f(y)d\beta_{d(x)}^{r(x)}(y) - \int f(y)d\beta_{d(x_i)}^{r(x_i)}(y)\right| =$$

$$= \left|\int f(xy)d\beta_{d(x)}^{d(x)}(y) - \int f(x_i y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y)\right|$$

$$= \left|\int g(y)d\beta_{d(x)}^{d(x)}(y) - \int f(x_i y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y)\right|$$

$$\le \left|\int g(y)d\beta_{d(x)}^{d(x)}(y) - \int g(y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y)\right| +$$

$$+ \left|\int g(y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y) - \int f(x_i y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y)\right|$$

$$\le \left|\int g(y)d\beta_{d(x)}^{d(x)}(y) - \int g(y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y)\right| +$$

$$+ \sup_{y \in G_{d(x_i)}^{d(x_i)}} |g(y) - f(x_i y)| \beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(K)$$

Deoarece $\sup\limits_{y \in G_{d(x_i)}^{d(x_i)}} \left|g(y)-f(x_i y)\right|$ converge la 0, $\left(\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(K)\right)_i$ este mărginit, şi deoarece $\left|\int g(y)d\beta_{d(x)}^{d(x)}(y)-\int g(y)d\beta_{d(x_i)}^{d(x_i)}(y)\right|$ converge la 0 (aplicaţiile u $\to \int g(y)d\beta_u^u(y)$ şi d fiind continue) , rezultă că

$$\left|\int f(y)d\beta_{d(x)}^{r(x)}(y)-\int f(y)d\beta_{d(x_i)}^{r(x_i)}(y)\right|$$

converge la zero. ■

<u>*Observaţie 2.3.38 (Remark 2 [25]).*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât. Dacă aplicaţia

r' : G' → U_G, definită prin r'(x) = r(x) pentru orice x ∈ G,

este deschisă şi dacă $\beta = \{\beta_v^u, (u,v) \in R\}$ este un sistem de măsuri cu proprietăţile din 2.3.36, atunci aplicaţia

$$(u,v) \to \int f(y)\beta_v^u(y)$$

este continuă pe R, pentru orice funcţie f continuă pe G cu suport compact. Într-adevăr, compunerea acestei aplicaţii cu aplicaţia θ este continuă pe G conform propoziţiei precedente. În consecinţă aplicaţia (u,v) $\to \int f(y)\beta_v^u(y)$ este continuă în raport cu topologia cât.

<u>*Propoziţie 2.3.39 (Proposition 3 [25]).*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicaţia

θ : G → R, definită prin θ(x) = (r(x), d(x)), pentru orice x ∈ G.

Dacă aplicaţia

r' : G' → U_G, definită prin r'(x) = r(x) pentru orice x ∈ G,

este deschisă, atunci aplicaţia θ : G → R este deschisă.

Demonstraţie. Fie $\beta = \{\beta_v^u, (u,v) \in R\}$ este un sistem de măsuri cu proprietăţile din 2.3.36. Am observat mai înainte că aplicaţia

$$(u,v) \to \int f(y)\beta_v^u(y)$$

este continuă pe R, pentru orice funcţie f continuă pe G cu suport compact. Fie D o submulţime deschisă a lui G, fie $x_0 \in D$ şi $(u_0, v_0) = \theta(x_0)$. Considerăm o funcţie $f:G\to[0,1]$ care este egală cu 1 pe o vecinătate compactă a lui x_0 şi care se anulează în afara lui D. Continuitatea aplicaţiei

$$(u,v) \to \int f(y)\beta_v^u(y)$$

implică faptul că mulţimea

$$W = \{(u,v) \in R : \int f(y)\beta_v^u(y) \neq 0\}$$

este deschisă în R. Pe de altă parte W este inclusă în $\theta(D)$ şi conţine pe (u_0, v_0). Deci W este o vecinătate a lui $\theta(x_0)$ conţinută în $\theta(D)$, şi ca urmare $\theta(x_0)$ este în interiorul lui $\theta(D)$. ■

Observaţie 2.3.40 (Remark 4 [25]). Dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R este grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicaţia

$$\theta : G \to R, \text{ definită prin } \theta(x) = (r(x), d(x)) \text{ pentru orice } x \in G.$$

şi dacă aplicaţia

$$r' : G' \to U_G, \text{ definită prin } r'(x) = r(x) \text{ pentru orice } x \in G,$$

este deschisă, atunci R este un grupoid topologic local compact (separat). Într-adevăr, deoarece θ este o aplicaţie deschisă şi surjectivă rezultă că topologia lui R este local compactă. Din faptul că

$$\{(x,y) : \theta(x) = \theta(y)\}$$

este închisă în $G \times G$ (cu topologia produs), rezultă că topologia cât indusă de θ pe R este separată. Continuitatea aplicaţie produs şi a aplicaţie de inversare pentru grupoidul R e verifică imediat.

Am demonstrat că din faptul că r' este deschisă rezultă că θ este deschisă. Vom arăta în continuare că cele două condiţii sunt echivalente.

Propoziție 2.3.41. Fie G este un grupoid local compact şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicația

$$\theta : G \to R, \theta(x) = (r(x), d(x)), \text{ pentru orice } x \in G,$$

Dacă aplicația θ este deschisă, atunci aplicația

$$\delta' : G *_r G' \to G, \text{ definită prin } \delta'(x,y) = x^{-1}y \text{ pentru orice } (x,y) \in G *_r G'$$

este deschisă.

Demonstrație. Deoarece aplicația $x \to x^{-1}$ este un homeomorfism de la G la G şi θ este o aplicație deschisă, rezultă că aplicația $y \to \theta(y^{-1})$ este o aplicație deschisă şi continuă de la G la R. Fie

$$G*G = \{(x,y) \in G\times G \mid \theta(x) = \theta(y^{-1})\}.$$

Aplicația δ' se obține prin compunerea

$$(x,y) \to (x, x^{-1}y) \to x^{-1}y$$

care duce $G*_r G'$ în $G*G$ şi apoi $G*G$ în G. Este uşor de observat că prima aplicație este un homeomorfism. Pentru a demonstra că a doua aplicație este deschisă vom folosi ca şi în demonstrația propoziției 2.3.26 următorul rezultat din [57], p.7 : Dacă X,Y şi Z sunt spații topologice şi f,g sunt funcții de la X respectiv Y la Z, atunci notăm $X * Y := \{(x,y) \in X \times Y : \ f(x) = g(y)\}$ şi înzestrăm $X*Y$ cu topologia indusă de pe $X \times Y$. Următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} X * Y & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

este comutativă, unde π_X şi π_Y sunt proiecțiile lui $X * Y$ pe X şi Y, respectiv. Dacă f este deschisă şi g este continuă, atunci π_Y este deschisă. Într-adevăr dacă U, V sunt deschise în X respectiv Y, atunci

$$\pi_Y((U \times V) \cap (X * Y)) = g^{-1}(f(U)) \cap V$$

este o mulțime deschisă.

Deoarece $\{(U\times V)\cap(X*Y) \mid U, V$ deschise în X respectiv $Y\}$ este o bază pentru topologia lui $X*Y$, rezultă că π_Y este deschisă. În cazul nostru avem,

$$\begin{array}{ccc} G*G & \xrightarrow{\pi_1} & G \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \theta \\ G & \xrightarrow{y \to \theta(y^{-1})} & R \end{array}$$

şi din faptul că θ este deschisă rezultă că proiecţia lui $G*G$ pe G este deschisă. ■

<u>*Corolar 2.3.42.*</u> Fie G este un grupoid local compact şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicaţia

$\theta : G \to R$, definită prin $\theta(x) = (r(x), d(x))$, pentru orice $x \in G$.

Dacă aplicaţia θ este deschisă, atunci UG' este deschisă în G pentru orice submulţime deschisă U a lui G.

Demonstraţie. Conform propoziţiei anterioare δ' este o aplicaţie deschisă, iar $UG' = \delta'((U \times G') \cap G *_r G')$. ■

<u>*Propoziţie 2.3.42 (Proposition 9 [25]).*</u> Fie G este un grupoid local compact şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicaţia

$\theta : G \to R$, definită prin $\theta(x) = (r(x), d(x))$ pentru orice $x \in G$.

Dacă aplicaţia θ este deschisă, atunci aplicaţia

$r' : G' \to U_G$, definită prin $r'(x) = r(x)$ pentru orice $x \in G$,

este deschisă.

Demonstraţie. Aplicând corolarul precedent rezultă că UG' este deschisă în G pentru orice submulţime deschisă U a lui G. Ca urmare, $G'U = (U^{-1}G')^{-1}$ este deschisă în G. Pentru a demonstra că r' este deschisă, observăm că

$r'(U \cap G') = G'U \cap U_G$ pentru orice $U \subset G$. ■

<u>*Corolar 2.3.43.*</u> Fie G este un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicaţia

$\theta : G \to R$, definită prin $\theta(x) = (r(x), d(x))$ pentru orice $x \in G$.

Atunci aplicaţia θ este deschisă dacă şi numai dacă aplicaţia

$$r' : G' \to U_G, \text{ definită prin } r'(x) = r(x) \text{ pentru orice } x \in G,$$

este deschisă.

Demonstraţie. Rezultă din propoziţiile 2.3.42 şi 2.3.39. ■

Teorema 2.3.44 (Proposition 12, 13 [25]). Fie G este un grupoid local compact cu bază numărabilă şi R grupoidul principal asociat înzestrat cu topologia cât indusă de aplicaţia

$$\theta : G \to R, \text{ definită prin } \theta(x) = (r(x), d(x)) \text{ pentru orice } x \in G.$$

Presupunem că aplicaţia

$$r' : G' \to U_G, \text{ definită prin } r'(x) = r(x) \text{ pentru orice } x \in G,$$

este deschisă. Atunci G admite un sistem Haar dacă şi numai dacă R admite un sistem Haar.

Demonstraţie. Fie $\beta = \{\beta_v^u, (u,v) \in R\}$ un sistem de măsuri cu proprietăţile din 2.3.36. Atunci aplicaţia

$$(u,v) \to \int f(y)\beta_v^u(y)$$

este continuă pe R, pentru orice funcţie f continuă pe G cu suport compact.

Presupunem că G admite un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Folosind rezultatul lui Renault din [70] (Lemma 1.7/p. 9), rezultă că există un unic sistem Haar borelian $\alpha = \{\alpha^u, u \in U_G\}$ pe R, astfel încât pentru orice funcţie boreliană nenegativă f definită pe G

$$\int f(x)d\nu^u(x) = \int\int f(x)d\beta_t^s(x)d\alpha^u(s,t), \text{ pentru orice } u \in U_G.$$

Demonstrăm că sistemul α este continuu. Fie g o aplicaţie continuă cu suport compact relativ la topologia cât pe R. Deoarece G este local compact şi θ este deschisă de la G la R, există o mulţime compactă K în G astfel încât $\theta(K)$ conţine suportul lui g. Fie F_1:G$\to$[0, 1] o funcţie continuă cu suport compact care este egală cu 1 pe o vecinătate compactă a lui K. Fie F_2 o funcţie continuă cu suport compact ce extinde la G funcţia

$$x \to F_1(x) \Big/ \int F_1(y)\beta_{d(x)}^{r(x)}(y)$$

definită pe U. Avem

$$\int F_2(y)d\beta_v^u = 1 \text{ pentru orice } (u,v)\in\theta(K).$$

Deoarece

$$\int g(s,t)d\alpha^u(s,t) = \int g(s,t)\int F_2(y)d\beta_t^s(y)d\alpha^u(s,t)$$

$$= \int F_2(y)g(r(y),d(y))d\nu^u(y),$$

rezultă că

$$u \to \int g(s,t)d\alpha^u(s,t)$$

este continuă.

Presupunem că $\alpha = \{\alpha^u,\ u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe R. Definim următorul sistem de măsuri :

$$\int f(x)d\nu^u(x) = \int\int f(x)d\beta_t^s(x)d\alpha^u(s,t)$$

pentru orice funcție boreliană nenegativă f definită pe G şi pentru orice $u \in U_G$. Folosind continuitate sistemului β şi continuitatea sistemului α deducem continuitatea sistemului ν. ■

Exemple de grupoizi G pentru care aplicația $r' : G' \to U_G$ este deschisă.

1. Grupoizii tranzitivi local compacți cu bază numărabilă. Mai general, grupoizii local tranzitivi local compacți cu bază numărabilă (i.e. grupoizii ce au proprietatea că pentru orice u aplicația $r_u : G_u \to U_G$ definită prin $r_u(x) = r(x)$ este deschisă).
2. Grupoizii topologici principali (într-adevăr, este suficient să observăm că $r'(U \cap G') = U \cap U_G$ pentru orice submulțime U a lui G.

2.4. STRUCTURA SISTEMELOR HAAR

Din teoremele 2.1.8 şi 2.1.11 rezultă că dacă C este o clasă invariantă de măsuri pe un grupoid analitic G şi (ν_1,μ_1), (ν_2,μ_2) sunt măsuri Haar pe G, cu ν_1, ν_2 $\in$ C, atunci există funcţie boreliană pozitivă h pe U_G a.î. a.p.t.

$$h \circ d = \frac{d\nu_1}{d\nu_2}\,\frac{d\mu_2}{d\mu_1} \circ r$$

şi funcţiile modulare $\Delta_1 = \left(\frac{d\nu_1^{-1}}{d\nu_1}\right)^{-1}$, $\Delta_2 = \left(\frac{d\nu_2^{-1}}{d\nu_2}\right)^{-1}$ sunt morfisme similare.

Scopul acestui subcapitol este studiul relaţiei dintre două măsuri Haar pe un grupoid local compact, (ν_1,μ_1) şi (ν_2,μ_2), în cazul în care ν_1 şi ν_2 nu sunt în mod necesar măsuri echivalente. Vom utiliza teorema de structură pentru măsura Haar (teorema 2.1.15). Vom demonstra că dacă $\left\{\nu_{u,v}^1\right\}$ şi $\left\{\nu_{u,v}^2\right\}$sunt sistemele de măsuri rezultate prin (r,d)-dezintegrarea lui (ν_1,μ_1), respectiv (ν_2,μ_2) atunci există funcţie boreliană pozitivă h pe U_G a.î.

$$\nu_{u.v}^1 = h(v)\,\nu_{u.v}^2 \text{ pentru orice } u,v \in Z \text{ cu } u \sim v$$

pentru o anumită mulţime saturată σ-compactă $Z \subset U_G$. În cazul tranzitiv $Z = U_G$, şi funcţiile modulare $\Delta_1 = \left(\frac{d\nu_1^{-1}}{d\nu_1}\right)^{-1}$, $\Delta_2 = \left(\frac{d\nu_2^{-1}}{d\nu_2}\right)^{-1}$ sunt morfisme similare.

Vom arăta că dacă G este un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă, există o corespondenţă biunivocă între clasele de sisteme Haar [$\left\{\nu^u,\ u \in U_G\right\}$] cu supp ν^u = G^u ($\forall$) u $\in$ U_G şi clasele de măsuri pe U_G [μ_0] cu supp(μ_0) = U_G. ($\left\{\nu_1^u,\ u \in U_G\right\} \sim \left\{\nu_2^u,\ u \in U_G\right\}$ <=> $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ $\quad d_*\left(\nu_1^u\right)$ -a.p.t.).

a. Dezintegrarea invariantă a sistemelor Haar relativ la măsurile cvasi invariante

În prima etapă demonstrăm că putem modifica sistemul de măsuri rezultat prin aplicarea teoremei 2.1.15 astfel încât noul sistem să aibă proprietăţi de invarianţă pe o mulţime saturată. Raţionamentul este asemănător cu cel folosit de A. Ramsay în [64] (Theorem 3.4/pg. 329). Un element cheie este Lemma 3.1. [64] (pg. 328), pe care o prezentăm în continuare.

Lema 2.4.1. Fie (G, C) este un grupoid cu măsură şi cu proprietatea că structura boreliană a lui G provine dintr-o topologie σ-compactă şi fie $U_0 \subset U_G$ o mulţime boreliană cu complementara nulă. Atunci există o mulţime $Z \subset [U_0] \subset U_G$, σ-compactă saturată cu complementara nulă şi o funcţie boreliană $\theta : Z \to r^{-1}(U_0)$ a.î.

$$\theta(u) = u \ (\forall)\ u \in Z \cap U_0 \text{ şi } d \circ \theta(u) = u \ (\forall)\ u \in U_0.$$

Demonstraţie. Fie $U_1 \subset U_0$ o mulţime σ-compactă cu complementara de măsură nulă şi fie $Z = d(r^{-1}(U_1))$ saturata lui U_1. Evident Z este σ-compactă. Fie $\theta_1 : Z \to r^{-1}(U_1)$ o secţiune boreliană a aplicaţiei continue surjective $d|_{r^{-1}(U_1)} : r^{-1}(U_1) \to Z$ (i.e. o aplicaţie boreliană cu proprietatea că $d(\theta_1(u)) = u$ pentru orice $u \in Z$). Definim $\theta : Z \to r^{-1}(U_0)$ prin $\theta(u) = u$ pentru $u \in U_0 \cap Z$ şi $\theta(u) = \theta_1(u)$ pentru $u \in Z - U_0$. ■

Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă, pe care există un *sistem Haar borelian*, i.e. o familie $\{\nu^u,\ u \in U_G\}$ de măsuri Radon pozitive pe G a.î.

(1) Pentru orice $u \in U_G$, ν^u este concentrată pe G^u.

(2) Pentru orice $f \ge 0$ boreliană pe G, aplicaţia

$$u \mapsto \int f(y)\,d\nu^u(y) \ [: U_G \to \overline{R}\ ]$$

este boreliană.

(3) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G şi pentru orice $x \in G$,

$$\int f(xy)d\nu^{d(x)}(y)=\int f(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

(4) Pentru orice submulţime compactă $K \subset G$, $\sup_{u \in U_G} \nu^u(K) < \infty$.

Fie μ_0 o probabilitate cvasi invariantă (în sensul definiţiei 2.2.10) pentru sistemul Haar borelian şi fie $\nu_0 = \int \nu^u d\mu_0(u)$ măsura indusă pe G de μ_0. Fie $\lambda \in [\nu_0]$ o probabilitate simetrică ($\lambda = \lambda^{-1}$). Notăm $\widetilde{\lambda} = r_*(\lambda) = d_*(\lambda)$. Fie $\lambda = \int \lambda^u d\widetilde{\lambda}(u)$ r-dezintegrarea lui λ. Dacă luăm $\nu = \int \nu^u d\widetilde{\lambda}(u)$ atunci $\nu \sim \nu_0 \sim \lambda$. Dacă P este o funcţie pozitivă boreliană astfel încât $P = \frac{d\nu}{d\lambda}$ atunci $\nu^u = P\, \lambda^u$ pentru $\widetilde{\lambda}$-a.p.t. $u \in U_G$. În aceste condiţii $(G,[\lambda])$ este un grupoid cu măsură şi $(\nu, \widetilde{\lambda})$ este o măsură Haar pentru $(G, [\lambda])$. Fie $E = (r,d)(G) \subset U_G \times U_G$ grupoidul principal asociat grupoidului G (ca în exemplul 2.1.3.4), $\lambda' = (r,d)_*(\lambda)$ şi $\lambda = \int \lambda_{u,v} d\lambda'(u,v)$ (r,d)-dezintegrarea lui λ. Următoarele două rezultate reprezintă lema 2.1.14 şi teorema 2.1.15 aplicate grupoidului cu măsură $(G,[\lambda])$ şi sunt utilizate pentru fixarea notaţiilor.

Lema 2.4.2. Există o mulţime boreliană $U_0' \subset U_G$ cu complementara nulă şi o funcţie boreliană $q : G|U_0' \to R_+ - \{0\}$ astfel încât

(1) λ' are r-dezintegrarea $\lambda' = \int \lambda'^u d\widetilde{\lambda}(u)$ pe $E_0 = E|_{U_0'}$.

(2) Pentru orice funcţie boreliană $f : E_0 \to R_+$ şi orice $(u,v) \in E_0$,

$$\int f((u,v)(s,t))q(s,t)d\lambda'^v(s,t) = \int f(s,t)q(s,t)d\lambda'^u(s,t)$$

(3) $(u,v) \mapsto \frac{q(u,v)}{q(v,u)}$ este un morfism strict al lui E_0 în R_+^*.

Teorema 2.4.3. Există o mulţime boreliană $U_0 \subset U_G$ cu complementara nulă astfel încât

(i) $(u,v) \mapsto \frac{q(u,v)}{q(v,u)}$ este un morfism strict al lui $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}|_{U_0}$ în R_+^*.

(ii) $y \mapsto \frac{P(y)}{P(y^{-1})} = \Delta(y) = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ este un morfism strict a lui $G_0 = G|_{U_0}$ în R_+^*.

Dacă notăm $\delta = y \mapsto \frac{P(y)}{P(y^{-1})} \frac{q(d(y), r(y))}{q(r(y), d(y))} = \Delta(y) \frac{q(d(y), r(y))}{q(r(y), d(y))}$, atunci δ : $G_0 \to$ R_+^* este un morfism strict.

Pe G_0 integrala $f \mapsto \int f(y)P(y)d\lambda(y)$ admite o (r,d)- dezintegrare

$$\int_{\mathsf{E}_0} \int_{G_0} f(y) d\nu_{u,v}(y) q(u,v) d\lambda'(u,v)$$

relativ la λ’ pe E_0 astfel încât

(1) Pentru orice (u, v) ∈ E_0, $\nu_{u,v}$ este o măsură σ- finită concentrată pe G_v^u.

(2) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe G_0, $(u,v) \mapsto \int_{G_0} f\, d\nu_{u,v}$ este boreliană (cu valori în $\overline{R}$).

(3) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe G_0,

$$\int_{G_0} f(xy) d\nu_{d(x),v}(y) = \int_{G_0} f(y) d\nu_{r(x),v}(y)$$

dacă (u, r(x)) şi (u,d(x)) sunt în E_0.

(4) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe G_0,

$$\delta(x) \int_{G_0} f(yx) d\nu_{u,r(x)}(y) = \int_{G_0} f(y) d\nu_{u,d(x)}(y)$$

dacă (d(x),v) şi (r(x),v) sunt în E_0.

Astfel $\nu_{u,u}$ este o măsură Haar la stânga pe G_u^u pentru orice u ∈ U_0 iar $\delta \,|\, G_u^u$ este funcția modulară corespunzătoare.

<u>*Lema 2.4.4 (Lemma 3 [16]).*</u> Pe G_0 integrala $f \mapsto \int f(y)P(y)d\lambda(y)$ are (r,d)-dezintegrarea

$$\int_{\mathsf{E}_0} \int_{G_0} f(y) d\nu_{u,v}(y) q(u,v) d\lambda'(u,v)$$

relativ la λ' pe E_0 astfel încât pentru o anumită mulțime Z, σ-compactă, saturată, cu complementara nulă:

(1) $u,v \in Z$, $u \sim v \Rightarrow \nu_{u,v} \neq 0$

(2) $\int_{G_0} f(xy)d\nu_{d(x),v}(y)=\int_{G_0} f(y)d\nu_{r(x),v}(y)$ $\begin{cases}(\forall)\ x\in G|Z\\(\forall)v\in Z, v\sim r(x)\\(\forall)f \geq 0 \text{ boreliana}\end{cases}$

(3) $\delta(x)\int_{G_0} f(yx)d\nu_{u,r(x)}(y)=\int_{G_0} f(y)d\nu_{u,d(x)}(y)$ $\begin{cases}(\forall)\ x\in G|Z\\(\forall)u\in Z, u\sim r(x)\\(\forall)f \geq 0 \text{ boreliana}\end{cases}$

(4) $\delta, \Delta : G|_Z \to R_+^*$ sunt morfisme stricte.

(5) $\int f(y)d\nu_{u,v}(y)=\int f(y^{-1})\delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)$ $(\forall)$ $u,v \in Z$, $u \sim v$

Demonstrație. Din lema 2.4.1, rezultă există o mulțime $Z \subset [U_0]$, σ-compactă saturată cu complementara de măsură nulă şi o funcție boreliană $\theta : Z \to r^{-1}(U_0)$ astfel încât

$$\theta(u) = u\ (\forall)\ u \in Z \cap U_0 \ \text{ şi }\ d \circ \theta\ (u) = u\ (\forall)\ u \in U_0 .$$

Redefinim $\nu_{u,v}$, $\lambda_{u,v}$, λ^u, P, Δ, şi δ, utilizând θ (ca în Teorema 3.4/pg. 329 [64]): pentru orice $u,v \in Z$, cu $u \sim v$ înlocuim

$$\nu_{u,v} \to V_{u,v} := \theta(u)^{-1}\nu_{r(\theta(u)),r(\theta(v))}\theta(v)$$

$$\lambda_{u,v} \to \lambda^1_{u,v} := \theta(u)^{-1}\lambda_{r(\theta(u)),r(\theta(v))}\theta(v)$$

$$\lambda^u \to \lambda^{1u} := \theta(u)^{-1}\lambda^{r(\theta(u))}$$

$$P \to P^1,\ P^1(y) := P(\theta(r(y))y\theta(d(y))^{-1})$$

$$\Delta \to \Delta^1,\ \Delta^1(y) := \Delta(\theta(r(y))y\theta(d(y))^{-1})$$

$$\delta \to \delta^1,\ \delta^1(y) := \delta(\theta(r(y))y\theta(d(y))^{-1})$$

Dacă $u,v \in U_0 \cap Z$ şi $u \sim v$ atunci $V_{u,v} = \nu_{u,v}$, $\lambda^1_{u,v} = \lambda_{u,v}$ şi $\lambda^{1u} = \lambda^u$. De asemenea pentru orice $y \in G|_{U_0}$ avem $P(y) = P^1(y)$, $\Delta(y) = \Delta^1(y)$, $\delta(y) = \delta^1(y)$. Este uşor de demonstrat că pentru noile elemente condițiile (1), (2), (3) şi (4) sunt adevărate. Să verificăm, de exemplu, (2) şi (3). Pentru orice $f \geq 0$ boreliană, orice $x \in G|_Z$ şi $v \in Z$ cu $v \sim d(x)$ avem:

$$\int f(xy)dV_{d(x),v}(y) = \int f\left(x\theta(d(x))^{-1}y\theta(v)\right)d\nu_{r(\theta(d(x))),r(\theta(d(v)))}(y) =$$

$$= \int f\left(\theta(r(x))^{-1}\underbrace{\theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}}_{z}y\theta(v)\right)d\nu_{r(\theta(d(x))),r(\theta(d(v)))}(y)$$

$$\begin{aligned} d(z) &= d\left(\theta(d(x))^{-1}\right) = r(\theta(d(x))) \in U_0 \\ r(x) &= r(\theta(r(x))) \in U_0 \end{aligned}$$

$$\overset{\downarrow}{=} \int f\left(\theta(r(x))^{-1}y\theta(v)\right)d\nu_{r(\theta(r(x))),r(\theta(v))}(y) = \int f(y)dV_{r(x),v}(y).$$

$$\delta^1(y)\int f(yx)dV_{u,r(x)}(y) =$$

$$= \delta\left(\theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}\right)\int f\left(\theta(u)^{-1}y\theta(r(x))x\right)d\nu_{r(\theta(u)),r(\theta(r(x)))}(y)$$

$$= \delta\left(\underbrace{\theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}}_{z}\right)\int f\left(\theta(u)^{-1}y\underbrace{\theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}}_{z}\theta(d(x))\right)d\nu_{r(\theta(u)),r(\theta(r(x)))}(y)$$

$$\begin{aligned} d(z) &= d\left(\theta(d(x))^{-1}\right) = r(\theta(d(x))) \in U_0 \\ r(x) &= r(\theta(r(x))) \in U_0 \end{aligned}$$

$$\overset{\downarrow}{=} \int f\left(\theta(u)^{-1}y\theta(d(x))\right)d\nu_{r(\theta(u)),r(\theta(d(x)))}(y) = \int f(y)dV_{u,d(x)}(y).$$

Pentru orice $x,y \in G|_Z$ cu $(x,y) \in G^{(2)}$ avem

$$\begin{aligned} \Delta^1(xy) &= \Delta(\theta(r(xy))xy\theta(d(xy))^{-1}) \\ &= \Delta(\theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1}\theta(r(y))xy\theta(d(y))^{-1}) \\ &= \Delta(\theta(r(x))x\theta(d(x))^{-1})\,\Delta(\theta(r(y))xy\theta(d(y))^{-1}) = \Delta^1(x)\,\Delta^1(y)\,. \end{aligned}$$

Analog, δ^1 este un morfism strict pe $G|_Z$.

Să demonstrăm 5). Fie $g : E|_Z \to \mathbf{R}$ şi $f : G|_Z \to \mathbf{R}$ două funcții boreliene pozitive. Avem

$$\int g(u,v)\int f(y)d\nu_{u,v}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)$$

$$= \int g(r(y),d(y))f(y)d\nu(y)$$

$$=\int g(d(y),r(y))f(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\nu(y)$$

$$=\int g(v,u)\int f(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\nu_{u,v}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)$$

$$\overset{\lambda'=\lambda'^{-1}}{=}\int g(u,v)\int f(y^{-1})\Delta(y^{-1})\frac{q(r(y),d(y))}{q(d(y),r(y))}d\nu_{v,u}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)$$

$$=\int g(u,v)\int f(y^{-1})\delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)\,.$$

Rezultă că $\int f(y)d\nu_{u,v}(y)=\int f(y^{-1})\delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)$ λ'-a.p.t. (u,v). Eventual înlocuind U_0 printr-o submulțime boreliană cu complementara de măsură nulă, putem presupune că ultima egalitate are loc pentru orice $u,v \in U_0$ cu $u \sim v$. Atunci, pentru orice $u,v \in Z$ cu $u \sim v$ avem

$$\int f(y^{-1})\delta^1(y^{-1})dV_{v,u}(y)$$

$$=\int f\left(\theta(u)^{-1}y^{-1}\theta(v)\right)\delta^1\left(\theta(u)^{-1}y^{-1}\theta(v)\right)d\nu_{r(\theta(v)),r(\theta(u))}$$

$$=\int f\left(\theta(u)^{-1}y^{-1}\theta(v)\right)\delta\left(\theta(u)\theta(u)^{-1}y^{-1}\theta(v)\theta(v)^{-1}\right)d\nu_{r(\theta(v)),r(\theta(u))}$$

$$=\int f\left(\theta(u)^{-1}y^{-1}\theta(v)\right)\delta(y^{-1})d\nu_{r(\theta(v)),r(\theta(u))}$$

$$=\int f\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right)d\nu_{r(\theta(u)),r(\theta(v))}$$

$$=\int f(y)dV_{u,v}(y).$$

Fie $\{\nu_i^u,\ u\in U_G\}$, i = 1,2 două sisteme Haar pentru G. Fie $\widetilde{\lambda}_i=r_*(\lambda_i)=d_*(\lambda_i)$ $(\lambda_i=\lambda_i^{-1})$, o probabilitate cvasi invariantă şi $\nu_i=\int \nu_i^u\, d\widetilde{\lambda}_i(u)$, pentru fiecare i = 1,2. Dacă aplicăm lema 2.4.4 sistemului Haar $\{\nu_i^u,\ u\in U_G\}$ obținem o mulțime Z_i, σ-compactă, saturată, cu $\widetilde{\lambda}_i(Z_i)=1$ şi un sistem de măsuri $\{\nu_{u,v}^i,\ u,v\in Z_i, u\sim v\}$ pentru fiecare i =1,2. Atunci $Z=Z_1\cap Z_2$ este o mulțime saturată σ-compactă. · ■

Legătura dintre $\{\nu^1_{u,v}\ ,\ u,v\in Z, u\sim v\}$ *şi* $\{\nu^2_{u,v}\ ,\ u,v\in Z, u\sim v\}$ *pe* $G|_Z$

Stabilim legătura dintre $\{\nu^1_{u,v}\}$ şi $\{\nu^2_{u,v}\}$ utilizând invarianţa la stânga a acestor sisteme. Fie u,v $\in$ Z ,cu u ~ v, fixate. Atunci există x $\in$ $G|_Z$ astfel încât r(x)=u şi d(x)=v. Din unicitatea măsurii Haar pe grupul local compact G^v_v şi din condiţia 2) a lemei precedente, rezultă că

$$\int f(y)d\nu^1_{u,v}(y) =$$

$$= \int f(y)d\nu^1_{r(x),d(x)}(y) \overset{2)}{=} \int f(xy)d\nu^1_{d(x),d(x)}(y)$$

$$\overset{(\exists)\, h(d(x))>0}{=} h(d(x))\int f(xy)d\nu^2_{d(x),d(x)}(y) \overset{2)}{=} h(d(x))\int f(y)d\nu^2_{r(x),d(x)}$$

$$= h(v)\int f(y)d\nu^2_{u,v}(y) \quad \text{pentru orice } f \geq 0 \text{ boreliană pe } G|_Z.$$

Am demonstrat că există o funcţie pozitivă h : Z $\to$ **R** astfel încât

$$\text{(I)} \quad \nu^1_{u,v} = h(v)\,\nu^2_{u,v} \ \text{ pentru orice } u,v \in Z \text{ cu } u \sim v.$$

De fapt h este boreliană. Într-adevăr, fie U o vecinătate simetrică închisă d-compactă a spaţiului unităţilor U_G. Se observă că U $\cap$ G^u_u este compactă şi $\mathrm{Int}(U\cap G^u_u)\neq\phi$ pentru orice u $\in U_G$. Astfel

$$\nu^i_{u,u}(U) = \nu^i_{u,u}(U\cap G^u_u) \in (0,\infty) \ \ i = 1,2.$$

Deoarece h(u) = $\dfrac{\nu^1_{u,u}(U)}{\nu^2_{u,u}(U)}$ şi $(u,v)\mapsto\nu^i_{u,v}(U)$ este boreliană, i = 1,2, rezultă că h este boreliană.

Vom demonstra că morfismele δ_1 şi δ_2 corespunzătoare la $\{\nu^u_1,\ u\in U_G\}$, respectiv $\{\nu^u_2,\ u\in U_G\}$ sunt similare pe $G|_Z$ (în sensul definiţiei 2.1.16). Fie x $\in$ $G|_Z$ şi u $\in$ Z cu r(x) ~ u. Fie f $\geq$ 0 o funcţie boreliană pe G astfel încât

$$\int f(y)d\nu^2_{u,d(x)}(y) \neq 0 .$$

Avem

$$\delta_1(x)\int f(yx)d\nu^1_{u,r(x)}(y)=\int f(y)d\nu^1_{u,d(x)}(y)\overset{(I)}{=}h(d(x))\int f(y)d\nu^2_{u,d(x)}(y) .$$

şi pe de altă parte

$$\delta_1(x)\int f(yx)d\nu^1_{u,r(x)}(y)\overset{(I)}{=}\delta_1(x)h(r(x))\int f(yx)d\nu^2_{u,r(x)}(y)$$

$$=\delta_1(x)h(r(x))\delta_2\left(x^{-1}\right)\int f(y)d\nu^2_{u,d(x)}(y).$$

Deoarece $\int f(y)d\nu^2_{u,d(x)}(y)\neq 0$ rezultă

(II) $h(r(x))\delta_1(x) = \delta_2(x)h(d(x))$ pentru orice $x \in G|_Z$.

b. Cazul tranzitiv

Presupunem că G este un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă. În acest caz sistemul Haar borelian este continuu conform teoremei 2.3.9. (în consecință este un sistem Haar în sensul definiției 2.2.11).

Deoarece G este tranzitiv, rezultă că $\tilde{\lambda}\sim d_*\left(\lambda^u\right)$ $\tilde{\lambda}$ -a.p.t. $u \in U_G$ (Lemma 4.5/pg. 277 [62]). Astfel avem

$$\delta_u\times\tilde{\lambda}\sim\delta_u\times d_*\left(\lambda^u\right) \text{ a.p.t. şi } \int \delta_u\times\tilde{\lambda}\,d\tilde{\lambda}(u)\sim\int \delta_u\times d_*\left(\lambda^u\right)d\tilde{\lambda}(u).$$

Pe de altă parte pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe $E = (r,d)(G)$ avem

$$\int\int f(s,t)d\left(\delta_u\times d_*\left(\lambda^u\right)\right)(s,t)d\tilde{\lambda}(u)=\int\int f(u,d(x))d\lambda^u(x)d\tilde{\lambda}(u)$$

$$=\int f(r(x),d(x))d\lambda(x)=\int f(s,t)d\lambda'(s,t)$$

Deci $\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}\sim\lambda'$. Fie $q=\dfrac{d\left(\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}\right)}{d\lambda'}$ ($q > 0$, boreliană). Este uşor de verificat egalitatea

$$\int f((u,v)(s,t))q(s,t)d\lambda'^v(s,t)=\int f(s,t)q(s,t)d\lambda'^u(s,t)\quad \tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}\text{-a.p.t. } (u,v)$$

Aplicând teorema 2.1.8 şi teorema 2.1.11, rezultă că

$$\frac{q(v,u)}{q(u,v)}=\frac{d\left(\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}\right)^{-1}}{d\left(\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}\right)} \text{ a.p.t.}$$

$$(u,v) \mapsto \frac{q(v,u)}{q(u,v)} \text{ este morfism a.p.t..}$$

Dar $\tilde{\lambda} \times \tilde{\lambda} = \left(\tilde{\lambda} \times \tilde{\lambda}\right)^{-1}$, ceea ce implică $\frac{q(v,u)}{q(u,v)} = 1$ $\tilde{\lambda} \times \tilde{\lambda}$-a.p.t. (u,v), şi deci $\Delta(x) = \delta(x)$ a.p.t.. Astfel există o reducere neesențială $G|_{U_0}$ a lui G astfel încât $\Delta(x) = \delta(x)$, $x \in G|_{U_0}$.

Lema 2.4.5 (Lemma 5 [16]). Dacă G este un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă cu un sistem Haar la stânga, $\{\nu^u,\ u \in U_G\}$, atunci există un sistem de măsuri σ-finite, $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$, cu următoarele proprietăți

(1) $\nu_{u,v}$ este concentrată pe G_v^u şi $\nu_{u,v} \neq 0$ $(\forall)$ $u,v \in U_G$.

(2) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G.

$$\int f(y)d\nu(y) = \int f(y)P(y)d\lambda(y) = \int\int\int f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}(u)d\tilde{\lambda}(v)$$

(3) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G, aplicația

$$(u,v) \mapsto \int f\, d\nu_{u,v} \quad [: U_G \times U_G \to \overline{\mathbf{R}}]$$

este boreliană.

(4) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G

$$\int f(xy)d\nu_{d(x),v}(y) = \int f(y)d\nu_{r(x),v}(y) \quad (\forall)\ v \in U_G,\ x \in G$$

(5) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G

$$\Delta(x)\int f(yx)d\nu_{u,r(x)}(y) = \int f(y)d\nu_{u,d(x)}(y) \quad (\forall)\ u \in U_G,\ x \in G$$

(6) $\Delta : G \to R_+^*$ este un morfism strict.

(7) Pentru orice $f \geq 0$ Borel pe G

$$\int f(y)d\nu_{u,v}(y) = \int f\left(y^{-1}\right)\Delta\left(y^{-1}\right)d\nu_{v,u}(y) \quad (\forall)\ u,v \in U_G$$

(8) $\nu^u = \int \nu_{u,v}\, d\tilde{\lambda}(v)$ pentru $\tilde{\lambda}$-a.p.t. $u \in U_G$

Demonstrație. Aplicăm lema 2.4.4 grupoidului tranzitiv G, şi ținem seama de faptul că orice mulțime saturată Z este egală cu întreg spațiul U_G. Astfel este uşor de observat că sistemul de măsuri $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$ obținut verifică (1)-(7). Demonstrăm (8). Fie f,g ≥ 0 două funcții boreliene pe G. Deoarece avem

$$\int g(u)\int\int f(y)d\nu^u(y)d\tilde{\lambda}(u)=\int g(r(y))f(y)d\nu(y)$$

$$=\int\int\int g(r(y))f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}(u)d\tilde{\lambda}(v)$$

$$=\int g(u)\int\int f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}(u)d\tilde{\lambda}(v)$$

rezultă că $\int f(y)d\nu^u(y)=\int\int f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}(v)$ $\tilde{\lambda}$-a.p.t. u. ■

<u>*Observație 2.4.6 (Remark 6 [16]).*</u> Proprietatea (7) din lema precedentă poate fi obținută şi ca o consecință a proprietăților (4),(5) şi (6). Într-adevăr, dacă f ≥ 0 este o funcție boreliană pe G, u,v ∈ U_G şi x ∈ G astfel încât r(x) = u, d(x) = v, atunci

$$\int f(y)d\nu_{u,v}(y)=\int f(y)d\nu_{r(x),d(x)}(y)$$

$$=\int f(xy)d\nu_{d(x),d(x)}(y)$$

$$=\int f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})d\nu_{d(x),d(x)}(y)$$

$$=\Delta(x)\int f(y^{-1})\Delta(x^{-1}y^{-1})d\nu_{d(x),r(x)}(y)$$

$$=\int f(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y).$$

<u>*Observație 2.4.7 (Remark 7 [16]).*</u> Fie $\{\nu_i^u,\ u\in U_G\}$, i = 1,2 două sisteme Haar pentru grupoidul tranzitiv G. Fie $\tilde{\lambda}_i = r_*(\lambda_i) = d_*(\lambda_i)$ $(\lambda_i = \lambda_i^{-1})$, o probabilitate cvasi invariantă şi Δ_i funcția modulară corespunzătoare pentru fiecare i =1,2. Dacă aplicăm lema 2.4.5. sistemului Haar $\{\nu_i^u,\ u\in U_G\}$ obținem câte un sistem de măsuri

$\{\nu^i_{u,v}, u, v \in U_G\}$ pentru fiecare i =1,2. Din (I) şi (II), rezultă că există o funcţie boreliană pozitivă h : $U_G \to R^*_+$ astfel încât

(T.I) $\nu^1_{u.v} = h(v)\nu^2_{u.v}$ $(\forall)$ u,v $\in U_G$

(T.II) $h(r(x))\Delta_1(x) = \Delta_2(x)h(d(x))$ $(\forall)$ x $\in$ G

Aceasta înseamnă că în cazul tranzitiv orice două funcţii modulare sunt morfisme similare

<u>*Teorema 2.4.8 (Theorem 8 [16]).*</u> Dacă G este un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă cu un sistem Haar la stânga $\{\nu^u, u \in U_G\}$, şi λ este o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\tilde{\lambda} = r_*(\lambda) = d_*(\lambda)$ să fie probabilitate cvasi invariantă, atunci pentru fiecare e $\in U_G$ şi fiecare secţiune boreliană regulată σ : $U_G \to G^e$ a aplicaţiei d : $G^e \to U_G$ există o funcţie boreliană pozitivă $h_0 : U_G \to R^*_+$ astfel încât

$$\int f(y)d\nu^u(y) = \int_{U_G} h_0(v)\left(\int_{G^e_e} f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(v)\right)d\mu(y)\right)d\tilde{\lambda}(v) \quad \tilde{\lambda}\text{-a.p.t. } u \in U_G,$$

unde μ este o măsură Haar pe grupul local compact G^e_e .

Dacă Δ_1 este o funcţie modulară (bine aleasă) pentru sistemul Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi probabilitatea cvasi invariantă $\tilde{\lambda}$, atunci

$$\Delta_1(x) = \frac{h_0(d(x))}{h_0(r(x))}\Delta\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)$$

unde Δ este funcţia modulară a grupului local compact G^e_e.

Demonstraţie. Fie $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$ sistemul de măsuri rezultat prin aplicarea lemei 2.4.5. Existenţa secţiunii boreliene regulate, σ : $U_G \to G^e$, a aplicaţiei d : $G^e \to U_G$ este asigurată de Lemma 1.1/pg. 102 [47]

Pentru fiecare pereche (u,v) $\in U_G \times U_G$ definim $V_{u,v}$ prin

$$\int f(y)dV_{u.v}(y) := \int_{G^e_e} f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(v)\right)d\mu(y) \quad , f \geq 0 \text{ boreliană pe G}$$

Este uşor de arătat că sistemul de măsuri $\{V_{u,v}, u, v \in U_G\}$ are proprietățile (3)-(7) din lema 2.4.5 cu morfismul Δ înlocuit cu Δ_0, unde $\Delta_0 : G \to R_+^*$, $\Delta_0(x) = \Delta(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1})$. Verificăm ca exemplu proprietatea (5)

$$\int f(yx)dV_{u,r(x)}(y) = \int f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(r(x))x\right)d\mu(y)$$

$$= \int f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\sigma(d(x))\right)d\mu(y)$$

$$= \Delta\left(\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)^{-1}\right)\int f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(d(x))\right)d\mu(y)$$

$$= \Delta_0\left(x^{-1}\right)\int f(y)dV_{u,d(x)}(y).$$

Din (T.I) şi (T.II) rezultă că există o funcție boreliană pozitivă $h_0 : U_G \to R_+^*$ astfel încât

$$\nu_{u,v} = h_0(v)V_{u,v} \text{ pentru orice } u,v \in U_G, \text{ şi}$$

$$\Delta_1(x) = \frac{h_0(d(x))}{h_0(r(x))}\Delta_0(x) = \frac{h_0(d(x))}{h_0(r(x))}\Delta\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)$$

pentru orice $x \in G$.

Aplicând proprietatea (8) din lema 2.4.5, obținem

$$\int f(y)d\nu^u(y) = \int\int f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}(v)$$

$$= \int h_0(v)\left(\int f(y)dV_{u,v}(y)\right)d\tilde{\lambda}(v)$$

$$= \int h_0(v)\left(\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(v)\right)d\mu(y)\right)d\tilde{\lambda}(v)$$

pentru $\tilde{\lambda}$-a.p.t. u U_G. ■

Observație 2.4.9.

1. Dacă $\{V_{u,v}, u, v \in U_G\}$ este sistemul de măsuri utilizat în demonstrația teoremei 2.4.8 şi $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$ este un sistem de măsuri cu proprietățile (4)-(5) din lema 2.4.5, atunci există o funcție boreliană pozitivă $h_0 : U_G \to R_+^*$ astfel încât $\nu_{u,v} = h_0(v)V_{u,v}$ pentru orice $u,v \in U_G$.

2. Funcția h_0 construită în teorema precedentă are proprietatea că $h_0(v) = \Delta_1(\sigma(v))c$ pentru orice $v \in U_G$, cu c o constantă. Într-adevăr,

$$h_0(v)=h_0(d(\sigma(v)))=\frac{\Delta_1(\sigma(v))}{\Delta\left(\sigma(r(\sigma(v)))\sigma(v)\sigma(d(\sigma(v)))^{-1}\right)}h_0(r(\sigma(v)))$$

$$=\Delta_1(\sigma(v))\frac{h_0(e)}{\Delta(\sigma(e))}=\Delta_1(\sigma(v))c,$$

unde $c=\dfrac{h_0(e)}{\Delta(\sigma(e))}$.

Dacă $h_0 \equiv 1$, ceea ce este echivalent cu

$$\int f(y)d\nu^u(y)=\int_{U_G}\left(\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(v)\right)d\mu(y)\right)d\tilde{\lambda}(v) \quad \tilde{\lambda}\text{-a.p.t. } u \in U_G,$$

atunci $\Delta_1(\sigma(v)) = 1/c$ $(\forall)$ $v \in U_G$.

Observație 2.4.10.

1. Dacă în demonstrația teoremei 2.4.8, alegem o altă unitate $f \in U_G$ şi considerăm o anumită secțiune boreliană regulată, atunci sistemul de măsuri corespunzător lui f, $\left\{V^1_{u,v}, u, v \in U_G\right\}$, diferă de sistemul de măsuri corespunzător lui e, $\left\{V_{u,v}, u, v \in U_G\right\}$, printr-o constantă multiplicativă. Într-adevăr, dacă luăm

$$\sigma_1 : U_G \to G^f \text{ definită prin } \sigma_1(u) = x_0\sigma(u)\text{ , } u \in U_G,$$

unde $x_0 \in G$ este ales astfel încât $r(x_0)=f$ şi $d(x_0)=e$, atunci σ_1 este secțiune boreliană regulată pentru $d : G^f \to U_G$. Fie μ' o măsură Haar şi Δ' funcția modulară pe grupul local compact G^f_f. Atunci pentru orice $x \in G$

$$\begin{aligned}\Delta'_0(x) &= \Delta'(\sigma_1(r(x))x\sigma_1(d(x))^{-1})\\ &= \Delta'(x_0\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}x_0^{-1})\\ &= \Delta_1(x_0\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}x_0^{-1})\\ &= \Delta_1(x_0)\Delta_1(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1})\Delta_1(x_0^{-1})\\ &= \Delta_1(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}) = \Delta(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1})\\ &= \Delta_0(x)\end{aligned}$$

Am obținut $\Delta_0 = \Delta'_0$. Din (T.I) şi (T.II) rezultă că există funcție boreliană $h'_0 : U_G \to \mathbf{R}_+^*$ astfel încât

$$V^1_{u,v} = h'_0(v)V_{u,v} \text{ pentru orice } u,v \in U_G,$$

$$h'_0(r(x))\Delta'_0(x) = \Delta_0(x)\, h'_0(d(x)) \text{ pentru orice } x \in G.$$

Deci $h'_0(r(x)) = h'_0(d(x))$ $(\forall)$ $x \in G$. Deoarece pentru orice u, v $\in U_G$ există x $\in$ G astfel încât r(x)=u şi d(x)=v, rezultă că $h'_0(u) = h'_0(v)$ $(\forall)$u,v $\in U_G$. Aceasta înseamnă că

$$h'_0 \equiv c \text{ (= constantă) şi } V^1_{u,v} = cV_{u,v} \text{ pentru orice } u,v \in U_G.$$

2. Dacă definim funcția modulară a grupoidului G ca un morfism borelian Δ: $G \to R_+^*$ cu proprietatea că $\Delta|_{G_e^e}$ este funcția modulară a grupului local compact G_e^e $(\forall)$ e $\in U_G$ (definiția 2.2.7 cu condiția de continuitate înlocuită cu măsurabilitate) şi fixăm o unitate e $\in U_G$ şi o măsură Haar μ pe G_e^e, atunci există o corespondență bijectivă între funcțiile modulare pe grupoidul tranzitiv G şi sistemele de măsuri $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ cu proprietățile 3)-5) din lema 2.4.5 cu $\nu_{e,e} = \mu$ (la fel ca în cazul local trivial).

<u>*Observație 2.4.11 (Remark 11 [16]).*</u> Fie G un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă. Dacă $\{\nu^u,\ u \in U_G\}$este un sistem Haar la stânga şi μ_1, μ_2 sunt două probabilități cvasi invariante, atunci $\mu_1 \sim \mu_2$ (Lemma 4.5/pg. 277 [62]). Reciproc, dacă $\{\nu_1^u,\ u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u,\ u \in U_G\}$ sunt două sisteme Haar cu aceeaşi probabilitate cvasi invariantă μ_0, atunci $d_*(\nu_1^u) \sim d_*(\nu_2^u) \sim \mu_0$ μ_0- a.p.t. u $\in U_G$ (pentru că G este tranzitiv). Vom arăta că $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ μ_0- a.p.t. u $\in U_G$. Din teorema 2.4.8, rezultă că pentru fiecare e $\in U_G$ şi fiecare secțiune boreliană regulată $\sigma : U_G \to G^e$ a aplicației $d : G^e \to U_G$ există o funcție boreliană pozitivă $h_0^i : U_G \to R_+^*$ astfel încât

$$\int f(y)d\nu_i^u(y) = \int_{U_G} h_0^i(v)\left(\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(v)\right)d\mu(y)\right)d\widetilde{\lambda}_i(v) \quad \widetilde{\lambda}_i\text{-a.p.t. } u \in U_G,\ i = 1,2$$

unde μ este o măsură Haar pe grupul local compact G_e^e.

Din $\widetilde{\lambda}_1 \sim d_*(\nu_1^u) \sim d_*(\nu_2^u) \sim \widetilde{\lambda}_2$, rezultă că există funcție boreliană pozitivă g astfel încât $g = \frac{d\widetilde{\lambda}_1}{d\widetilde{\lambda}_2}$. În consecință μ_0- a.p.t. $u \in U_G$ avem $\frac{d\nu_1^u}{d\nu_2^u} = \frac{(h_0^1 g) \circ d}{h_0^2 \circ d} > 0$, ceea ce implică $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ μ_0- a.p.t. $u \in U_G$.

Pentru un grupoid tranzitiv G, există o corespondență bijectivă între clasele de sisteme Haar $[\{\nu^u,\ u \in U_G\}]$ cu supp $\nu^u = G^u$ $(\forall)$ $u \in U_G$ şi clasele de măsuri pe U_G $[\mu_0]$ cu supp $\mu_0 = U_G$. ($\{\nu_1^u,\ u \in U_G\} \sim \{\nu_2^u,\ u \in U_G\} \Leftrightarrow \nu_1^u \sim \nu_2^u$ $d_*(\nu_1^u)$ -a.p.t.).