3. PRODUSUL DE CONVOLUŢIE PE GRUPOIZI

Există două tipuri de bază de convoluție pe grupoizi, o convoluție a funcțiilor care poate fi definită în prezența unui sistem Haar sau a unei măsuri Haar, şi o convoluție a nucleelor care nu depinde de un astfel de sistem sau o astfel de măsură. Prin nucleu ([26]) înțelegem o aplicație ν care asociază fiecărei unități u a unui grupoid analitic G o măsură σ-finită pozitivă ν^u astfel încâtsă fie verificate următoarele două condiții:

(a) $\nu^u(G - G^u) = 0$ (i.e. ν^u este concentrată pe G^u).

(b) Pentru orice funcție $f \geq 0$ boreliană mărginită pe G, aplicația

$$\nu(f) : U_G \to [0, \infty], \quad \nu(f) = \nu^u(f) = \int f\, d\nu^u$$

este boreliană.

Fiind dat un element $x \in G$, aplicația $y \mapsto xy$ este un izomorfism borelian de la $G^{d(x)}$ la $G^{r(x)}$ care transportă măsura $\nu^{d(x)}$ într-o măsură notată $x\nu^{d(x)}$, pentru orice nucleu ν. Un nucleu ν se numeşte invariant la stânga dacă $\nu^{r(x)} = x\nu^{d(x)}$ pentru orice $x \in G$. Dacă pentru orice $x \in G$ măsurile $\nu^{r(x)}$ şi $x\nu^{d(x)}$ sunt echivalente atunci ν se numeşte cvasi invariant.

Un nucleul invariant la stânga este numit sistem Haar borelian. Se observă că dacă ν este un sistem Haar borelian pe un grupoid local compact G cu proprietatea că pentru orice funcție continuă cu suport compact f definită pe G, $\nu(f)$ este continuă cu suport compact pe U_G, atunci $\{ \nu^u, u \in U_G \}$ este un sistem Haar continuu în sensul definiției 2.2.

Vom defini doar convoluția funcțiilor pe un grupoid, în consecință algebrele de convoluție a căror construcție o vom prezenta vor fi *-algebre de funcții. Pentru aceste algebre multiplicarea este dată bineînțeles de convoluție, iar definiția involuției depinde de prezența unei măsuri Haar sau a unui sistem Haar borelian (eventual continuu). Dacă (ν, μ) este o măsură Haar pe un grupoid cu măsură (G,C), şi $\Delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ este funcția modulară asociată, atunci involuția este dată prin $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x)^{-1}$. Dacă pe grupoidul analitic G se consideră fixat un sistem Haar borelian, atunci pentru definirea unei funcții modulare ar fi necesară fixarea unei măsuri cvasi invariante pe spațiul unităților. Pentru a evita acest lucru involuția va fi definită prin $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

3.1. ALGEBRE DE CONVOLUȚIE

a. Cazul unui grupoid cu măsură

Fie (G,C) un grupoid cu măsură. Conform definiției 2.1.9 o măsură Haar (ν,μ) pentru (G,C) constă într-o probabilitate $\mu \in \widetilde{C}$ pe U_G şi o măsură $\nu \in C$ pe G astfel încâtpe o reducere neesențială $G|_{U_0}$ a lui G ν să admită o r-dezintegrare relativ la μ, $\nu = \int \nu^u \, d\mu(u)$, care să satisfacă

$$\left(E \mapsto \int 1_E(xy) d\nu^{d(x)}(y)\right) = \nu^{r(x)} \quad (\forall)\, x \in G|_{U_0}.$$

Dacă $\Delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ este funcția modulară asociată măsurii Haar (ν,μ), atunci există o reducere neesențială $G|_U$ a lui $G|_{U_0}$ astfel încâtΔ să fie morfism strict de pe $G|_U$ pe grupul multiplicativ $\mathbf{R}_+^*$. Vom înlocui grupoidul G prin $G|_U$.

Pentru o funcție f absolut ν-integrabilă pe G definim $f^* = \left(x \mapsto \overline{f(x^{-1})}\Delta(x)^{-1}\right)$. Dacă f = g ν-a.p.t., atunci şi $f^* = g^*$ ν-a.p.t., şi

$$\int |f^*(x)| d\nu(x) = \int |f(x^{-1})| \Delta(x)^{-1} d\nu(x) = \int |f(x)| d\nu(x),$$

deci $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$. Aceasta înseamnă că involuția este corect definită pe $L^1(G,\nu)$.

Pentru $f \in L^1(G,\nu)$ şi j, k $\in L^2(U_G,\mu)$, $\int |f(x)||j(d(x))k(r(x))| d\nu(x) \in \overline{\mathbf{R}}$ depinde doar de clasele funcțiilor f, j şi k. De aceea putem defini

$$\|f\|_{II} = \sup\left\{\int |f(x) j(d(x)) k(r(x))| d\nu(x) : \int |j|^2 d\mu = \int |k|^2 d\mu = 1,\ j,k \in L^2(U_G,\mu)\right\}$$

Dacă f este o funcție absolut ν-integrabilă pe G şi g = f ν-a.p.t., atunci $\int f\, d\nu^u = \int g\, d\nu^u$ μ-a.p.t.. Faptul că $u \mapsto \int f\, d\nu^u$ aparține sau nu lui $L^\infty(U_G,\mu)$ este o proprietate a clasei lui f din $L^1(G,\nu)$. Definim

$$\|f\|_I = \max\left\{\left\|u \mapsto \int |f| d\nu^u\right\|_\infty,\quad \left\|u \mapsto \int |f^*| d\nu^u\right\|_\infty\right\}$$

Notăm cu

$$II(G,\nu,\mu) = \{f \in L^1(G,\nu) : \|f\|_{II} < \infty\}$$
$$I(G,\nu,\mu) = \{f \in L^1(G,\nu) : \|f\|_I < \infty\}$$

Lema 3.1.1. Dacă $f \in L^1(G,\nu)$ atunci $\|f^*\|_I = \|f\|_I$, $\|f^*\|_{II} = \|f\|_{II}$ şi $\|f\|_1 \le \|f\|_{II} \le \|f\|_I$. $\|\cdot\|_I$ şi $\|\cdot\|_{II}$ sunt norme complete pe I(G, ν, μ) , respectiv pe II(G, ν, μ). (Lemma 1.1/pg. 38 [42]).

În [42] (1.4-1.6/pg. 39) P. Hahn defineşte pentru f, g ∈ II(G, ν, μ), *convoluția* f∗g ∈ $L^1(G,\nu)$ prin

$$f * g(x) = \int f(xy) g(y^{-1}) d\nu^{d(x)}(y),\ x \in G$$

şi demonstrează că

$$\|f*g\|_{II} \le \|f\|_{II}\|g\|_{II}$$
$$\|f*g\|_{I} \le \|f\|_{I}\|g\|_{I}$$
$$(f*g)*h = f*(g*h)$$
$$(f*g)^* = g^* * f^*$$

Teorema 3.1.2. I(G, ν, μ) şi II(G, ν, μ) sunt *-algebre Banach (cu multiplicarea dată de convoluție).(Theorem 1.8/pg. 42 [42])

Observații 3.1.3. 1. Dacă grupoidul G este grup, atunci ν este o măsură Haar la stânga pe G, iar $\mu = \delta_e$, unde e este elementul unitate al grupului. În acest caz I(G, ν, μ) = II(G, ν, μ) = $L^1(G,\nu)$ (egalitate de algebre Banach cu involuție, $L^1(G,\nu)$= algebra grupală a lui G). Astfel, în cazul general, I(G, ν, μ) şi II(G, ν, μ) pot fi privite ca nişte analoage ale algebrei grupale.

2. Există grupoizi G pentru care incluziunea I(G, ν, μ) ⊂ II(G, ν, μ) este strictă şi există funcții f pe G cu $\|f\|_{II} < \|f\|_{I}$. Fie G grupoidul principal [0, 1] × [0, 1] ⊂ $\mathbf{R}^2$ cu operațiile definite prin (q,s)(s,t) = (q,t) şi $(q,s)^{-1}$ = (s,q). Fie m măsura Lebesgue pe [0, 1]. Atunci (m × m, m) este o măsură Haar unimodulară ($\Delta \equiv 1$) pe G. Dacă luăm f(s,t) = $1_{[0,1/2]}(s)$, atunci

$$\int f\, d\delta_s \times m = 1_{[0,1/2]}(s) \text{ şi } \int f^*\, d\delta_s \times m = 1/2.$$

Pentru j, k $\in L^2(U_G, m)$ avem

$$\int |f(s,t) j(d(s,t)) k(r(s,t))|\, dm \times m(s,t) \le$$

$$\le \left(\int |f(s,t)| |j(d(s,t))|^2\, dm \times m(s,t)\right)^{1/2} \left(\int |f(s,t)| |k(r(s,t))|^2\, dm \times m(s,t)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int |f^*(s,t)| |j(r(s,t))|^2\, dm \times m(s,t)\right)^{1/2} \left(\int |f(s,t)| |k(r(s,t))|^2\, dm \times m(s,t)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int \int |f^*(s,t)| dm(t) |j(s)|^2\, m(s)\right)^{1/2} \left(\int \int |f(s,t)| dm(t) |k(s)|^2\, m(s)\right)^{1/2}$$

$$\leq \left\| s \mapsto \int \left|f^*\right| d\delta_s \times m \right\|_\infty \|j\|_2 \quad \left\| s \mapsto \int |f| d\delta_s \times m \right\|_\infty \|k\|_2$$

$$= \frac{1}{2}\|j\|_2 \; \|k\|_2 .$$

Deci $\|f\|_{II} < \|f\|_I$.

Dacă luăm g(s,t) = $s^{-1/4}$, atunci g $\in$ II(G, m×m, m) şi g $\notin$ I(G,m×m,m).

3. Elementele şi operaţiile algebrelor I(G, ν, μ) şi II(G, ν, μ) sunt invariante la modificări pe mulţimi de măsură nulă, de aceea I(G, ν, μ) şi II(G, ν, μ) pot fi privite ca algebre asociate cu orice contracţie neesenţială a grupoidului G sau cu orice grupoid a cărui reducere neesenţială este G.

<u>*Lema 3.1.4.*</u> Aplicaţia $L : II(G,\nu) \to L\left(L^2(G,\nu)\right)$ definită prin

$$L_f(j) = \left(x \mapsto \int f(xy) j(y^{-1}) d\nu^{d(x)}(y) \right)$$

este o *-reprezentare a lui II(G,ν, μ) în L^2(G,ν), numită *reprezentarea regulată la stânga*. Mai mult, deoarece $< L_f(j), k > \leq \|f\|_{II}\|j\|_2\|k\|_2$ pentru orice f $\in$ II(G,ν) şi orice j, k $\in$ L^2(G,ν), restricţia lui L la I(G,ν, μ) este de asemenea o *-reprezentare. (Lemma 2.1/ pg.43 [42]).

Legătura dintre reprezentările grupoidului (G,C) şi cele ale algebrei II(G,ν, μ) este dată de următoarea teoremă. Printr-o reprezentare a grupoidului (G, C) în spaţiul Hilbert H se înţelege un morfism al lui G în grupul operatorilor unitari L(H) înzestrat cu structura boreliană slabă.

<u>*Teorema 3.1.5.*</u> Orice reprezentare a unui grupoid (G, C) cu o măsură Haar (ν, μ) într-un spaţiu Hilbert separabil H induce o *-reprezentare $f \mapsto X_f$ a algebrei $II(G,\nu)$ în $L^2(U_G, \mu, H)$ cu următoarele proprietăţi:

(1) Pentru $l, m \in H \Rightarrow \left|< X_f(u \mapsto l), (u \mapsto m) >\right| \leq \|f_1\|\|l\|\|m\|$

(2) $M_r(\alpha)X_f = X_{f\alpha\circ r}$ unde $M_r : L^\infty(U_G, \mu) \to L\left(L^2(U_G, \mu, H)\right)$

$$M_r(\alpha)j = \alpha \cdot j.$$

Reciproc orice *-reprezentare cu proprietățile (1) şi (2), provine dintr-o reprezentare pe grupoid, X prin:

$$< X_f j, k >= \int f(x)\big(X(x)j(d(x)), k(r(x))\big)d\nu(x)$$

(Theorem 3.4 /50[42]).

b. Cazul unui grupoid cu un sistem Haar fixat

Fie G un grupoid analitic şi $\nu = \{ \nu^u, u \in U_G \}$ un sistem Haar borelian pe G. Dacă f, g sunt două funcții boreliene nenegative pe G, atunci $x \mapsto \int f(x)g(y)d\nu^{d(x)}(y)$ este o funcție boreliană. Dacă F este o funcție boreliană nenegativă pe G×G atunci $x \mapsto \int F(x,y)d\nu^{d(x)}(y)$ este o funcție boreliană (deoarece mulțimea funcțiilor F cu această proprietate este închisă la combinații liniare şi limite monotone, şi conține funcțiile de forma $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$). Pentru f, g boreliene nenegative mărginite pe G, luăm $F(x,y) = f(xy)g(y^{-1})$ dacă $d(x) = r(y)$ şi $F(x,y) = 0$ în rest, şi observăm că $x \mapsto \int f(xy)g(y^{-1})d\nu^{d(x)}(y)$ este o funcție boreliană. Dacă această funcție ia numai valori finite, atunci se notează cu f∗g. Convoluția poate fi extinsă la funcții mai generale prin liniaritate.

Considerăm spațiul

$$I_r(G,\nu) = \{f : G \to \mathbf{C} \text{ boreliană mărginită} : u \mapsto \nu^u(|f|) \text{ mărginită}\}$$

înzestrat cu norma $\|\cdot\|_{I,r}$ definită prin $\|f\|_{I,r} = \sup_{u\in U_G} \nu^u(|f|)$. $I_r(G,\nu)$ este închis la convoluție şi norma $\|\cdot\|_{I,r}$ este o normă de algebră (pg. 51 [68]). Pe mulțimea funcțiilor boreliene mărginite pe G, involuția se defineşte prin $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Notăm $I(G,\nu) = I_r(G,\nu) \cap (I_r(G,\nu))^*$ şi înzestrăm acest spațiu cu norma $\|\cdot\|_I$ definită prin $\|f\|_I = \max(\|f\|_{I,r}, \|f^*\|_{I,r})$. $I(G,\nu)$ este o algebră normată pe care involuția este o izometrie.

Dacă G este un grupoid topologic local compact cu bază numărabilă şi $\nu = \{ \nu^u,\ u \in U_G \}$ un sistem Haar continuu pe G, atunci $C_c(G)$ (mulțimea funcțiilor continue cu suport compact pe G) este o *-subalgebră a $I(G,\nu)$. Cu topologia inductivă $C_c(G)$ este o algebră topologică (pg. 48 [68]).

În [78] (pg. 116) Seda arată echivalența dintre continuitatea sistemului Haar şi continuitatea produsului de convoluție $f*g$ pentru orice pereche de funcții continue cu suport compact. Rezultă că $C_c(G)$ este închisă la convoluție dacă şi numai sistemul Haar fixat este continuu.

Exemple 3.1.6. 1. Fie grupoidul $S \times g$, unde S este un spațiu local compact şi g este un grup local compact care acționează la dreapta pe S. Dacă h este o măsură Haar pe g, atunci familia de măsuri $\{\delta_s \times h,\ s \in S\}$este un sistem Haar continuu pe $S \times g$. Dacă $f, g \in C_c(S \times g)$ şi $(s,x) \in S \times g$, atunci

$$f*g(s,x) = \int f((s,x)(t,y))g((t,y)^{-1})d(\delta_{d(s,x)} \times h)(t,y)$$

$$= \int f(s,xy)g(ty,y^{-1})d(\delta_{sx} \times h)(t,y)$$

$$= \int f(s,xy)g(s(xy),y^{-1})dh(y)$$

$$= \int f(s,y)g(sy,y^{-1}x)dh(y),$$

iar $f^*(s,x) = \overline{f(sx,x^{-1})}$.

2. Fie G grupoidul trivial pe un spațiu local compact S, şi fie λ o măsură pe S. Atunci $\{\delta_s \times \lambda,\ s \in S\}$este un sistem Haar continuu pe $G = S \times S$. Dacă $f, g \in C_c(G)$ şi $(s,t) \in G$, atunci

$$f*g(s,t) = \int f((s,t)(u,v))g((u,v)^{-1})d(\delta_{d(s,t)} \times \lambda)(u,v)$$

$$= \int f(s,v)g(v,u)d(\delta_t \times h)(u,v)$$

$$= \int f(s,v)g(v,t)d\lambda(v),$$

iar $f^*(s,t) = \overline{f(t,s)}$.

3. Dacă G grupoidul cotrivial pe un spaţiu local compact S, atunci G poate fi identificat cu S. $\{\delta_s, s \in S\}$ este un sistem Haar continuu pe S. Dacă f, g $\in C_c(S)$ şi s $\in$ S, atunci

$$f*g(s) = \int f(st)g(t^{-1})d\delta_{d(s)}(t)$$

$$= \int f(s)g(t)d\delta_s(t)$$

$$= f(s)g(s),$$

iar $f^*(s) = \overline{f(s)}$.

3.2. ALGEBRE GRUPOIDALE PENTRU GRUPOIZI TRANZITIVI

Fie G un grupoid tranzitiv, local compact, cu bază numărabilă înzestrat cu un sistem Haar (continuu) $\{\nu^u,\ u \in U_G\}$. Fie λ o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\tilde{\lambda} = r_*(\lambda) = d_*(\lambda)$ să fie o probabilitate cvasi invariantă pentru $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Atunci (G,[λ]) este un grupoid cu măsură, şi $(\nu, \tilde{\lambda})$ este o măsură Haar pentru acest grupoid, unde $\nu = \int \nu^u d\tilde{\lambda}(u)$.

Vom construi două *- algebre Banach, $L_{1,\infty}\left(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda}\right)$ şi $L^{1,\infty}\left(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda}\right)$ constând în clase de funcţii pe grupoidul G . Pentru aceste *-algebre Banach înmulţirea este produsul de convoluţie şi involuţia este dată prin $f^*(y) = \overline{f(y^{-1})}\Delta(y^{-1})$, unde Δ este o anumită funcţie modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi probabilităţii cvasi invariante $\tilde{\lambda}$.

Vom demonstra că dacă avem două sisteme Haar pe G, $\{\nu_1^u, u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u, u \in U_G\}$, cu probabilităţile cvasi invariante $\tilde{\lambda}_1$ şi $\tilde{\lambda}_2$ corespunzătoare, atunci $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\}, \tilde{\lambda}_1\right)$ şi $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\}, \tilde{\lambda}_2\right)$ sunt *-izomorfe ca spaţii Banach cu involuţie (dar nu neapărat ca algebre!). Dacă $\{\nu_1^u, u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u, u \in U_G\}$ admit aceeaşi probabilitate cvasi invariantă $\tilde{\lambda}$ (<=> $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ a.p.t.), atunci $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\}, \tilde{\lambda}\right)$, $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\}, \tilde{\lambda}\right)$, şi de asemenea $L^{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\}, \tilde{\lambda}\right)$, $L^{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\}, \tilde{\lambda}\right)$ sunt *-algebre Banach izomorfe. Mai mult, vom vedea că un anumit izomorfism de spaţii Banach cu involuţie de la $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\}, \tilde{\lambda}_1\right)$ la $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\}, \tilde{\lambda}_2\right)$ este un izomorfism de algebre dacă şi numai dacă $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ (aceasta înseamnă că $\{\nu_1^u, u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u, u \in U_G\}$ admit aceeaşi probabilitate cvasi invariantă $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$, deci $\int \nu_1^u d\tilde{\lambda}(u) \sim \int \nu_2^u d\tilde{\lambda}(u)$).

Vom arăta că $L^{1,\infty}\left(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda}\right)$ este a *-subalgebră Banach a *-algebrelor I(G, ν, $\tilde{\lambda}$) şi II(G,ν,$\tilde{\lambda}$). De asemenea vom arăta că există o contracţie neesenţială $G|_{U_0}$ a grupoidului G cu proprietatea că mulţimea $\{[f] : f|_{C\,G/U_0} \equiv 0, [f] \in L_{1,\infty}(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda})\}$ poate fi privită ca o *-subalgebră a $L^{1,\infty}\left(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda}\right) \subset$ I(G, ν, $\tilde{\lambda}$).

Din teorema 2.4.8, rezultă că pentru fiecare $e \in U_G$, $\sigma : U_G \to G^e$ secţiune boreliană regulată a aplicaţiei $d : G^e \to U_G$ şi μ măsură Haar pe grupul local compact G_e^e există o funcţie pozitivă boreliană $h_0 : U_G \to R$ astfel încât pentru orice $f \ge 0$ boreliană avem

$$\int f(y)d\nu^u(y) = \int_{U_G} h_0(v)\left(\int f\left(\sigma(u)^{-1} y \sigma(v)\right) d\mu(y)\right)\tilde{\lambda}(v) \quad \tilde{\lambda}\text{ - a.p.t.}$$

Atunci

$$L_{1,\infty}(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda}) \approx L_{1,\infty}(\{V^u\}, \tilde{\lambda}),$$

$$L^{1,\infty}(\{\nu^u\}_u, \tilde{\lambda}) \approx L^{1,\infty}(\{V^u\}_u, \tilde{\lambda}),$$

$$I(G,\nu, \tilde{\lambda}) \approx I(G,V, \tilde{\lambda}),$$

unde

$$\int f dV^u := \int_{U_G}\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1} y \sigma(v)\right) d\mu(y) d\tilde{\lambda}(v).$$

Dacă $h_0 : U_G \to R_+^*$ este mărginită pe mulţimile compacte (de exemplu, dacă funcţia modulară a sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi a probabilităţii $\tilde{\lambda}$ este mărginită pe mulţimile compacte), atunci $L_{1,\infty}(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda})$ şi $L^{1,\infty}(\{\nu^u\}, \tilde{\lambda})$ conţin funcţiile continue cu suport compact.

Lema 3.2.1 (Lemma 1 [17]). Fie G un grupoid tranzitiv, local compact, cu bază numărabilă înzestrat cu un sistem Haar continuu $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie λ o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\tilde{\lambda} = r_*(\lambda) = d_*(\lambda)$ să fie o probabilitate cvasi invariantă pentru $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi fie

$$\nu = \int \nu^u d\tilde{\lambda}(u),\ \lambda' = (r,d)_*(\lambda),\ P = \frac{d\nu}{d\lambda} \text{ şi } q = \frac{d(\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda})}{d\lambda'}.$$

Fie $\lambda = \int \lambda^u d\tilde{\lambda}(u)$ r-dezintegrarea lui λ relativ la $\tilde{\lambda}$, şi $\lambda = \int \lambda_{u,v} d\lambda'(u,v)$ r-dezintegrarea lui λ relativ la λ'. Atunci există un sistem de măsuri $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$ cu proprietăţile (1)-(8) din lema 2.4.5, şi putem alege probabilităţile $\lambda^u, \lambda_{u,v}$ $(u, v \in U_G)$ şi funcţiile P,q astfel încât.:

$$q(u,v) = q(v,u)\ (\forall) u, v \in U_G;\ \Delta(y) = \frac{P(y)}{P(y^{-1})}\ (\forall) y \in G,$$

unde Δ este o anumită funcţie modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi probabilităţii cvasi invariante $\tilde{\lambda}$.

În plus, sistemul de măsuri $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$ are următoarele proprietăţi

(9) $(\forall)\ u, v \in U_G \Rightarrow \nu_{u,v} = \dfrac{P}{q(r,d)} \lambda_{u,v}$

(10) Există o mulţime boreliană $U_0 \subset U_G$ cu $\tilde{\lambda}(U_0) = 1$ astfel încât dacă f,g:G$\to$ **C** sunt două funcţii boreliene cu $f = g$ a.p.t., atunci

$$\int |f|d\nu = \int |g|d\nu < \infty =>$$

$$=> \int |f-g|d\nu_{u,v} = 0\ \forall u,v \in U_0 \left(=> \int |f|d\nu_{u,v} = \int |g|d\nu_{u,v}\right)$$

Demonstrație. Avem $P \cdot \lambda^u = \nu^u$ a.p.t.. Din lema 2.4.5, rezultă că

$$\int g(u,v)\int f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}(u,v)$$

$$=\int\int g(r(y),d(y))f(y)d\nu_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}(u,v)$$

$$=\int g(r(y),d(y))f(y)d\nu(y)$$

$$=\int g(r(y),d(y))f(y)P(y)d\lambda(y)$$

$$=\int\int g(r(y),d(y))f(y)P(y)\lambda_{u,v}(y)d\lambda'(u,v)$$

$$=\int\int g(r(y),d(y))f(y)P(y)d\lambda_{u,v}(y)\frac{1}{q(u,v)}d\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}(u,v)$$

$$=\int g(u,v)\int f(y)\frac{P(y)}{q(r(y),d(y))}d\lambda_{u,v}(y)d\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}(u,v).$$

Astfel $\nu_{u,v} = \frac{P}{q(r,d)}\lambda_{u,v}$ $\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}$ -a.p.t., pentru că $B(G)$ (σ-algebra submulțimilor boreliane ale lui G) este numărabil generată. În consecință, există o submulțime boreliană $U_0' \subset U_G$ cu $\tilde{\lambda}(U_0') = 1$ astfel încât

$$u,v \in U_0' => \lambda_{u,v} \neq 0 \text{ şi } \nu_{u,v} = \frac{P}{q(r,d)}\lambda_{u,v}.$$

Luând $\theta : U_G \to r^{-1}(U_0')$ cu $\theta(u) = u\ (\forall)u \in U_0'$ şi $d\circ\theta(u) = u\ (\forall)u \in U_G$, ca în lema 2.4.1 , şi schimbând:

$$\nu_{u,v} \to V_{u,v} := \theta(u)^{-1}\nu_{r\circ\theta(u),r\circ\theta(v)}\theta(v)$$

$$\lambda_{u,v} \to \lambda^1{}_{u,v} := \theta(u)^{-1}\lambda_{r\circ\theta(u),r\circ\theta(v)}\theta(v)$$

$$P \to P^1\quad P^1 := P(\theta(r(y))y\theta(d(y)^{-1})$$

$$\Delta \to \Delta^1\quad \Delta^1(y) := \Delta(\theta(r(y))y\theta(d(y)^{-1})$$

$$q \to q^1\quad q^1(u,v) := q^1(r\circ\theta(u), r\circ\theta(v))$$

avem

$$V_{u,v} = \frac{P^1}{q^1(r,d)}\lambda'_{u,v} \quad (\forall)u,v \in U_G.$$ Într-adevăr,

$$\int fdV_{u,v} = \int f\left(\theta(u)^{-1}y\theta(u)\right)d\nu_{r\circ\theta(u),r\circ\theta(v)}$$

$$= \int f\left(\theta(u)^{-1}y\theta(u)\right)\frac{P(y)}{q\left(r(y),d(y)\right)}d\lambda_{r\circ\theta(u),r\circ\theta(v)}(y)$$

$$= \int f\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right)\frac{P^1\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right)}{q^1\left(r\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right),d\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right)\right)}d\lambda_{r\circ\theta(u),r\circ\theta(v)}(y)$$

$$\uparrow$$

$$\begin{cases} P^1\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right) = P\left(\theta(u)\theta(u)^{-1}y\theta(v)\theta(v)^{-1}\right) = P(y) \\ q^1\left(r\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right),d\left(\theta(u)^{-1}y\theta(v)\right)\right) = q^1(u,v) = q\left(r\circ\theta(u),r\circ\theta(v)\right) \end{cases}$$

$$= \int f(y)\frac{P^1(y)}{q^1\left(r(y),d(y)\right)}d\lambda'_{u,v}(y) \quad u,v \in U_G$$

(10) Dacă f,g : G → C sunt boreliene, $\int |f|d\nu < \infty, \int |g|d\nu < \infty$ şi f = g a.p.t., atunci

$$\int |f-g|d\nu = 0 \Rightarrow \int\int |f-g|d\nu_{u,v}d\tilde{\lambda}\times\tilde{\lambda}(u,v) = 0 \Rightarrow \int |f-g|d\nu_{u,v} = 0 \text{ a.p.t.}$$

Deoarece B(G) este numărabil generată există o mulţime boreliană $U_0 \subset U_G$ cu $\tilde{\lambda}(U_0) = 1$ astfel încât

$$u,v \in U_0 \Rightarrow \int |f-g|d\nu_{u,v} = 0 \quad \text{dacă} \begin{cases} f,g : G \to \mathbf{C} \text{ boreliene} \\ f = g \ \nu-\text{a.p.t.} \\ \int |f|d\nu = \int |g|d\nu < \infty \end{cases}$$

Din şirul de inegalităţi

$$\left|\int |f|d\nu_{u,v} - \int |g|d\nu_{u,v}\right| \leq \int \left||f|-|g|\right|d\nu_{u,v} \leq \int |f-g|d\nu_{u,v},$$

rezultă $\int |f|d\nu_{u,v} = \int |g|d\nu_{u,v}$ pentru orice $u,v \in U_0$. ■

Observație 3.2.2. Cu notațiile din lema precedentă, dacă f,g : G → **C** sunt boreliene, f = g a.p.t. şi $\int |f|d\nu = \int |g|d\nu < \infty$, atunci

$$\int |f|1_{G|_{U_0}}d\nu_{u,v} = \int |g|1_{G|_{U_0}}d\nu_{u,v}\ (\forall)u,v \in U_G .$$

Într-adevăr, dacă $u,v \in U_0$, atunci

$$\int |f|1_{G|_{U_0}}d\nu_{u,v} = \int\int |g|1_{G|_{U_0}}d\nu_{u,v}$$

pentru că $f1_{G|_{U_0}} = g1_{G|_{U_0}}$ a.p.t., şi dacă $u \notin U_0$ sau $v \notin U_0$ avem

$$\int |f|1_{G|_{U_0}}d\nu_{u,v} = 0 = \int |g|1_{G|_{U_0}}d\nu_{u,v} .$$

Observație 3.2.3. Cu notațiile din lema 3.2.1, există a funcție pozitivă boreliană, $f_0 : G \to \mathbf{R}_+^*$ astfel încât

$$\int f_0(y)d\nu_{u,v}(y) = 1 \text{ pentru orice } (u,v) \in U_G \times U_G.$$

Într-adevăr, dacă luăm $f_0(y) = \dfrac{q(r(y),d(y))}{P(y)}$ atunci $\int f_0(y)d\nu_{u,v}(y) =$

$$\int \frac{q(r(y),d(y))}{P(y)}d\nu_{u,v}(y) \overset{(9)}{=} \int 1\, d\lambda_{u,v}(y) = 1 \text{ pentru orice } (u,v) \in U_G \times U_G.$$

Introducem următoarea relație de echivalență pe mulțimea funcțiilor boreliene absolut ν-integrabile pe G:

$$g \sim f \overset{\text{def}}{<=>} \int |f-g|d\nu_{u,v} = 0\ \forall u,v \in U_G$$

pentru f,g : G → **C** funcții boreliene ν-integrabile.

Notăm $\mathsf{F}_1 = \left\{[f]\ /\ f : G \to C \text{ Borel}, \int |f|d\nu < \infty\right\}$, unde $[f] = \{g / g \sim f\}$.

Observăm că $g \sim f => \int |g|d\nu_{u,v} = \int |f|d\nu_{u,v}$ $(\forall)$ u,v ∈ U_G şi

$$g \sim f\ => \int\int |f-g|d\nu_{u,v}d\widetilde{\lambda}\times\widetilde{\lambda}(u,v) = 0\ => \int |f-g|d\nu = 0 => f = g \text{ a.p.t.}$$

Astfel $[f] \subset [f]_{L^1(G,\nu)}$ $\left([f]_{L^1(G,\nu)} = \{g : g = f \;\; \nu - \text{a.p.t.}\}\right)$.

Pentru simplitate, convenim, să scriem f pentru [f]. Definim o normă pe F_1 prin

$$\|f\|_{1,\infty} = \sup_{(u,v)\in U_G\times U_G} \int |f| d\nu_{u,v} \;, f \in F_1$$

Fie f,g două funcții boreliane pe G astfel încât $\int |f| d\nu < \infty$, $\int |g| d\nu < \infty$ şi f ~ g. Avem

$$\int |g^*(y)| d\nu(y) = \int \left|\overline{g(y^{-1})}\right| \Delta(y^{-1}) d\nu(y) = \int |g(y)| d\nu(y) < \infty \text{ şi}$$

$$\int |g^*(y) - f^*(y)| d\nu_{u,v}(y) = \int \left|\overline{g(y^{-1})} - \overline{f(y^{-1})}\right| \Delta(y^{-1}) d\nu_{u,v}(y)$$

$$= \int |g(y) - f(y)| d\nu_{v,u}(y) = 0$$

De aceea $g^* \sim f^*$. Aceasta înseamnă că involuția este corect definită pe F_1. Mai mult,

$$\|f^*\|_{1,\infty} = \sup_{(u,v)\in U_G\times U_G} \int |f^*(y)| d\nu_{u,v} = \sup_{(u,v)\in U_G\times U_G} \int \left|\overline{f(y^{-1})}\right| \Delta(y^{-1}) d\nu_{u,v}(y) =$$

$$= \sup_{(u,v)\in U_G\times U_G} \int |f(y)| d\nu_{v,u}(y) = \|f\|_{1,\infty}$$

Notăm $\mathsf{L}_{1,\infty} = \{f \in \mathsf{F}_1 : \|f\|_{1,\infty} < \infty\}$.

Din $\int |f| d\nu^u \overset{\text{a.p.t.}}{=} \int |f| d\nu_{u,v} d\widetilde{\lambda}(v) \le \|f\|_{1,\infty}$, obținem $\|f\|_I \le \|f\|_{1,\infty}$.

În subcapitolul precedent am prezentat definiția lui P. Hahn [42] pentru produsul de convoluție. Pentru $f, g \in II\left(G, \nu, \widetilde{\lambda}\right) \subset L^1(G,\nu)$, convoluția $f*g \in II(G;\nu, \widetilde{\lambda})$ $\subset L^1(G,\nu)$ este definită prin

$$f * g(x) = \int f(xy) g(y^{-1}) d\nu^{d(x)}(y) \overset{\text{egalitate in } L^1(G,\nu)}{=} \int f(xy) g(y^{-1}) d\nu_{d(x),v}(y) d\widetilde{\lambda}(v),$$

pentru orice $x \in G$.

Pentru $f, g : G \to \mathbf{C}$ boreliene , astfel încât $\|f\|_{1,\infty} < \infty$ şi $\|g\|_{1,\infty} < \infty$, definim convoluția la fel

$$f * g(x) = \int f(xy)g(y^{-1})d\nu_{d(x),v}d\widetilde{\lambda}(v),\ x \in G.$$

Avem $f * g : G \to \mathbf{C}$ boreliană şi $\int |f * g| d\nu < \infty$ ([42] 1.5/pg.40).

Dacă $f_1 \sim f,\ g_1 \sim g$, atunci

$$\int |f_1 * g_1 - f * g| d\nu_{u,v}$$

$$= \int \left| \int \int f_1(xy)g_1(y^{-1}) - f(xy)g(y^{-1})d\nu_{d(x),w}(y)d\widetilde{\lambda}(w) \right| d\nu_{u,v}(x)$$

$$\leq \int \int \int \left| f_1(xy)g_1(y^{-1}) - f(xy)g(y^{-1}) \right| d\nu_{d(x),w}(y)d\widetilde{\lambda}(w)d\nu_{u,v}(x)$$

$$= \int \int \int \left| f_1(xy)g_1(y^{-1}) - f(xy)g(y^{-1}) \right| d\nu_{u,w}(x)d\nu_{u,v}(y)d\widetilde{\lambda}(w)$$

$$= \int \int \int \Delta(y^{-1}) \left| f_1(xy)g_1(y^{-1}) - f(xy)g(y^{-1}) \right| d\nu_{u,d(y)}(x)d\nu_{v,w}(y)d\widetilde{\lambda}(w)$$

$$\leq \int \int \int (\Delta(y^{-1}) |f_1(x) - f(x)| \left|g_1(y^{-1})\right| +$$

$$+ |f(x)| \left| g_1(y^{-1}) - g(y^{-1}) \right|) d\nu_{u,w}(x)d\nu_{v,w}(y)d\widetilde{\lambda}(w)$$

$$= \int \left(\int |f_1(x) - f(x)| d\nu_{u,w}(x) \int \Delta(y^{-1}) \left| g_1(y^{-1}) \right| d\nu_{v,w}(y) \right) d\widetilde{\lambda}(v) +$$

$$+ \int \left(\int |f(x)| d\nu_{u,w}(x) \int \left| g_1(y^{-1}) - g(y^{-1}) \right| \Delta(y^{-1}) d\nu_{v,w}(y) \right) d\widetilde{\lambda}(v)$$

$$= \int \left(\underbrace{\int |f_1(x) - f(x)| d\nu_{u,w}(x)}_{0} \int |g(y)| d\nu_{v,w}(x)d\widetilde{\lambda}(v) \right) d\widetilde{\lambda}(v) +$$

$$+ \int \left(\int |f(x)| d\nu_{u,w}(x) \underbrace{\int |g_1(y) - g(y)| d\nu_{w,v}(y)}_{0} \right) d\widetilde{\lambda}(v)$$

deoarece $f_1 \sim f$ şi $g_1 \sim g$. Astfel $f_1 * g_1 \sim f * g$.

Dacă $f, g \in \mathsf{L}_{1,\infty}$, atunci

$$\nu_{u,v}(|f * g|) = \int \left| \int \int f(xy)g(y^{-1})d\nu_{d(x),w}(y)d\widetilde{\lambda}(w) \right| d\nu_{u,v}(x) \leq$$

$$\leq \int \int \int \left| f(xy)g(y^{-1}) \right| d\nu_{d(x),w}(y)d\widetilde{\lambda}(w)d\nu_{u,v}(x) =$$

$$= \int \int \int \left|f(xy)g(y^{-1})\right| d\nu_{u,v}(x) d\nu_{v,w}(y) d\widetilde{\lambda}(w) =$$

$$= \int \int \int \left|f(x)g(y^{-1})\right| \Delta(y^{-1}) d\nu_{u,d(y)}(x) d\nu_{v,w}(y) d\widetilde{\lambda}(w) =$$

$$= \int \int \left|f(x)\right| d\nu_{u,w}(x) \int \left|g(y^{-1})\right| \Delta(y^{-1}) d\nu_{v,w}(y) d\widetilde{\lambda}(w) =$$

$$= \int \int \left|f(x)\right| d\nu_{u,w}(x) \int \left|g(y)\right| d\nu_{w,v}(y) d\widetilde{\lambda}(w) \le$$

$$\le \int \|f\|_{1,\infty} \|g\|_{1,\infty} d\widetilde{\lambda}(w) = \|f\|_{1,\infty} \|g\|_{1,\infty} .$$

Din inegalitatea $\|f * g\|_{1,\infty} \le \|f\|_{1,\infty} \|g\|_{1,\infty}$, rezultă corectitudinea definiției convoluției pe $\mathsf{L}_{1,\infty}$.

Ca şi în Lemma 1.6 şi Lemma 1.7 /pg. 41 [42] , rezultă că

$$g^* * f^*(x) = (f * g)^*(x),\ x \in G$$

$$f \mapsto f * g,\ g \mapsto f * g \text{ sunt lineare}$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

pentru orice $f, g, h \in \mathsf{L}_{1,\infty}$.

Fie $L_{1,\infty}$ algebra obținută prin completarea algebrei $\mathsf{L}_{1,\infty}$ în $\| \ \|_{1,\infty}$. Atunci $L_{1,\infty}$ este o *- algebra Banach.

Vom construi o *- algebra Banach notată prin $L^{1,\infty}(\{\nu^u\}, \widetilde{\lambda})$. Definim norma:

$$\|f\|_{1,\infty}^{1} := \left\|(u, v) \mapsto \nu_{u,v}(|f|)\right\|_{\infty} \text{ (relativ la } \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda})$$

Norma $\| \ \|_{1\infty}^{1}$ este corect definită pe $L^1(G, \nu)$. Într-adevăr, $f \underset{\uparrow L^1(G,\nu)}{=} g$ implică

$$f = g \ \nu\text{-a.p.t},$$

şi $\int \int f d\nu_{u,v} d\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}(u, v) = \int \int g d\nu_{u,v} d\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}$ implică

$$\int |f| d\nu_{u,v} = \int |g| d\nu_{u,v} \ (\forall) u, v \in U_0 .$$

De aceea, din $\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}(U_0 \times U_0) = 1$, rezultă că $\|f\|_{1\infty}^{1} = \|g\|_{1\infty}^{1}$.

Pentru orice f boreliană pe G cu $\int |f| d\nu < \infty$ avem $\|f\|_I \leq \|f\|_{1\infty}^1$ pentru că

$$\int f d\nu^u \underset{\uparrow \text{a.p.t.}}{=} \int |f| d\nu_{u,v} d\widetilde{\lambda}(v).$$

Notăm $L^{1,\infty} = \left\{ f \in L^1 : \|f\|_{1\infty}^1 < \infty \right\}$.

Din inegalitățile $\| \ \|_1 \leq \| \ \|_{II} \leq \| \ \|_I \leq \| \ \|_{1\infty}^1$, rezultă că $L^{1\infty} \subset I(G,\nu) \subset II(G,\nu) \subset L^1(G,\nu)$.

Argumentând ca în demonstrația faptului că $L_{1,\infty}$ este o *- algebră, putem arăta că $L^{1,\infty}$ este o *-algebră.

Arătăm că $L^{1,\infty}$ este un spațiu Banach. Presupunem că $(f_n)_n$ este un şir Cauchy în norma $\| \ \|_{1\infty}^1$. Atunci $(f_n)_n$ este şir Cauchy în $\| \ \|_1$, deci există $f \in L^1(G,\nu)$ astfel încât $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Avem $\int |f_n - f| d\nu \to 0$, şi deci

$$\int \int |f_n - f| d\nu_{u,v} d\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}(u,v) \to 0.$$

Din $\int \int |f_n - f| d\nu_{u,v} d\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}(u,v) \to 0$, deducem că există un subşir $(f_{n_i})_i$ astfel încât $\int |f_{n_i} - f| d\nu_{u,v} \to 0$ $\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}$-a.p.t., deci

$$\left| \int |f_{n_i}| d\nu_{u,v} - \int |f| d\nu_{u,v} \right| \leq \int |f_{ni} - f| d\nu_{u,v} \to 0 \ \ \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda} \text{ -a.p.t.}$$

Deoarece $(f_n)_n$ este un şir Cauchy în norma $\| \ \|_{1\infty}^1$, şirul $\left(\|f_n\|_{1\infty}^1 \right)_n$ este un şir mărginit.

Astfel $\left\| (u,v) \mapsto \int |f| d\nu_{u,v} \right\|_\infty < \infty$. Aceasta demonstrează că $f \in L^{1\infty}$.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Alegem $n_0 \in N$ a.î.. $\|f_n - f_m\|_{1\infty}^1 < \varepsilon$ $(\forall) m,n \geq n_0$. Există o mulțime boreliană de măsură nulă $N \subset U_G$ a.î.

$$\int |f_n - f_m| d\nu_{u,v} < \varepsilon \ \ (\forall) m,n \geq n_0 \text{ şi } u,v \in (U_G \setminus N) \times (U_G \setminus N).$$

Pentru o pereche $(u,v) \in (U_G \setminus N) \times (U_G \setminus N)$ şi pentru $n \geq n_0$ avem:

$$\int |f_n - f| d\nu_{u,v} \leq \int |f_n - f_{n_i}| d\nu_{u,v} + \int |f_{n_i} - f| d\nu_{u,v} \leq \varepsilon + \int |f_{n_i} - f| d\nu_{u,v}$$

pentru i suficient de mare.

Din $\int |f_{n_i} - f| d\nu_{u,v} \to 0$ $\widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}$ a.p.t., rezultă că pentru $n \geq n_0$ avem

$$\int |f_n - f| d\nu_{u,v} < 2\varepsilon \quad \widetilde{\lambda} \times \widetilde{\lambda}\text{-a.p.t.}$$

Am obținut $\|f_n - f\|_{1\infty}^1 \to 0$, şi deci $L^{1,\infty}$ este o *-algebră Banach.

Combinând rezultatele de mai sus obținem următoarea teoremă.

<u>*Teorema 3.2.4 (Theorem 4 [17]).*</u> $L_{1,\infty}$ şi $L^{1,\infty}$ sunt $*$-algebre Banach.

<u>*Observație 3.2.5.*</u> Dacă $f : G \to \mathbf{C}$ este o funcție boreliană mărginită, atunci

$$\begin{cases} \left[y \mapsto f(y) \dfrac{q(r(y)d(y))}{P(y)} \right] \in L_{1,\infty} \\ y \mapsto f(y) \dfrac{q(r(y)d(y))}{P(y)} \in L^{1,\infty} \end{cases}$$

Într-adevăr,

$$\int \left| f(y) \frac{q(r(y)d(y))}{P(y)} \right| d\nu_{u,v} = \int |f(y)| \frac{q(r(y)d(y))}{P(y)} \frac{P(y)}{q(r(y)d(y))} d\lambda_{u,v}(y)$$

$$= \int |f(y)| d\lambda_{u,v}(y) \underset{\substack{\uparrow \text{ f marginita} \\ \lambda_{u,v} \text{ probabilitate}}}{\leq} \sup |f(y)| < \infty$$

De aici rezultă $\left\| \dfrac{fq(r,d)}{P} \right\|_{1\infty} < \sup f < \infty$.

Analog, $\left\| \dfrac{fq(r,d)}{P} \right\|_{1,\infty}^1 < \sup f < \infty$.

<u>*Observație 3.2.6.*</u> Fie U_0 ca în lema 3.2.1. Atunci

$$\{ [f] \in L_{1,\infty} : f \mid C_{G|U_0} \equiv 0 \}$$

este o *- subalgebra a *- algebrelor Banach $I(G, \nu, \widetilde{\lambda}) \subset II(G, \nu, \widetilde{\lambda})$.

Pentru a demonstra aceasta, fie f,g $\in L_{1,\infty}$ a.î. $f \mid C_{G|U_0} \equiv 0$, $g \mid C_{G|U_0} \equiv 0$, şi $x \in C_{G|U_0}$. Atunci $r(x) \notin U_0$ sau $d(x) \notin U_0$. Dacă $r(x) \notin U_0$ atunci fie y astfel încâtr(y) = d(x) . Rezultă că $r(xy) = r(x) \notin U_0$ deci $xy \notin G|_{U_0}$, $f(xy) = 0$ .De aceea,

$$\int f(xy)g(y^{-1})d\nu_{d(x),v}(y) = 0 \ (\forall)\ v \in U_G$$

Dacă $d(x) \notin U_0$ atunci fie y astfel încâtr(y) = d(x) $\notin U_0$. Din $y \notin G \mid U_0$, rezultă $y^{-1} \notin G|_{U_0}$ deci g(y^{-1}) = 0. De aceea $\int f(xy)g(y^{-1})d\nu_{d(x),v} = 0$ $(\forall)$ v $\in U_G$. În ambele cazuri $f * g(x) = 0$ $(\forall)$ $x \notin G|_{U_0}$.

Deci $\{[f] \in L_{1,\infty} : f \mid C_{G|_{U_0}} \equiv 0\}$ este închisă la convoluţie. Este uşor de observat că $\{[f] \in L_{1,\infty} : f \mid C_{G|_{U_0}} \equiv 0\}$ este închisă şi la involuţie. Astfel aceasta este o $*$-subalgebra a algebrei $L_{1,\infty}(G)$. $f \mid C_{G|_{U_0}} = 0$ implică $f1_{G|U_0} = f$ şi $[f] = [f]_{L^1(G,\nu)}$. Astfel $\{[f] \in L_{1,\infty} : f \mid C_{G|_{U_0}} \equiv 0\}$ poate fi privită ca o *-subalgebra a $L^{1,\infty} \subset$ I(G, $\nu, \widetilde{\lambda}$).

<u>Observaţie 3.2.7.</u> Restricţia reprezentării regulate la stânga a algebrei II(G, $\nu, \widetilde{\lambda}$)

$$L : II(G, \nu, \widetilde{\lambda}) \to L\left(L^2(G,\nu)\right)$$

$$L_f(j) = \left(x \mapsto \int f(xy)j(y^{-1})d\nu^{d(x)}y\right)$$

la algebrele $L_{1,\infty}$ şi $L^{1,\infty}$ este o reprezentare de normă ≤ 1.

Într-adevăr, pentru orice $f \in L_{1,\infty}(G)$ şi j $\in$ L^2(G,ν), avem

$$< L_f(j), k > \leq \|f\|_{II}\|j\|_2\|k\|_2 \leq \|f\|_{1,\infty}\|j\|_2\|k\|_2$$

deci $\|L_f\| \leq \|f\|_{1,\infty}$.

Analog, pentru $f \in L^{1,\infty}(G)$ avem $\|L_f\| \leq \|f\|_{1,\infty}^1$.

<u>Observaţie 3.2.8.</u> Din teorema 2.4.8 şi lema 3.2.1, rezultă că pentru fiecare e $\in$ U$_G$, σ:U$_G$→G^e secţiune boreliană regulată a aplicaţiei d : G^e → U$_G$ şi μ măsură Haar

pe grupul local compact G_e^e există o funcție boreliană pozitivă $h_0 : U_G \to R$ astfel încâtpentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G avem

$$\int f(y)d\nu_{u,v}(y) = h_0(v)\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(v)\right)d\mu(y)$$

Dacă h_0 este mărginită pe mulțimile compacte, atunci pentru orice compact $K \subset G$ avem:

$$\nu_{u,v}(K) \leq \sup_{d(K)} h_0 \ \mu\Big(\underbrace{\overline{\sigma(r(K))}K\left(\overline{\sigma(d(K))}\right)}_{\text{compactă în } G_e^e}\Big) < \infty \ (\forall)u, v \in U_G$$

Astfel $[1_k] \in L_{1,\infty}$ şi $1_K \in L^{1,\infty}$.

Pentru orice $f : G \to C$ continuă cu suport compact, avem

$$\|f\|_{1\infty} = \sup \nu_{u,v}(|f|) \leq \|f\|_\infty \sup_{u,v} \nu_{u,v}\left(1_{\operatorname{supp} f}\right) \leq \|f\|_\infty \left\|1_{\operatorname{supp} f}\right\|_{1\infty}$$

Astfel $[f] \in L_{1\infty}$.

Analog, $\|f\|^1{}_{1\infty} \leq \|f\|_\infty \left\|1_{\operatorname{supp} f}\right\|^1{}_{1\infty}$ deci $f \in L^{1\infty}$.

<u>*Observație 3.2. 9.*</u> Din teorema 3.1.5 rezultă că orice reprezentare a grupoidului cu măsură $\left(G, \left[\int \nu^u d\widetilde{\lambda}(u)\right] = [\lambda]\right)$ pe un spațiu Hilbert separabil H induce o *-reprezentare nedegenerată $f \mapsto X_f$ a algebrei $II(G, \nu, \widetilde{\lambda})$ (deci şi a $\{[f] \in L_{1,\infty} : f / C_{G|U_0} \equiv 0\}$ sau $L^{1,\infty}$) în $L^2\left(U_G, \widetilde{\lambda}, H\right)$ cu următoarele proprietăți:

(3) Pentru $l, m \in H \Rightarrow |< X_f(u \mapsto l), (u \mapsto m) >| \leq \|f_1\|\|l\|\|m\|$

(4) $M_r(\alpha)X_f = X_{f\alpha\circ r}$ unde $M_r : L^\infty\left(U_G, \widetilde{\lambda}\right) \to L\left(L^2\left(U_G, \widetilde{\lambda}, H\right)\right)$, $M_r(\alpha)j = \alpha \cdot j$

De asemenea P. Hahn [42] (pg. 50) a arătat că orice *-reprezentare cu proprietățile (1) şi (2), definită pe o *- subalgebră a algebrei $I\left(G, \nu, \widetilde{\lambda}\right)$, care conține funcțiile caracteristice ale elementelor dintr-o algebră (de mulțimi) care generează

$\mathcal{B}\left(E(n)\right)$ $n = 1,2...$ $\left(\text{unde}\, E(n) = \{y \in G : (1/n) \leq P(y) \leq n \text{ şi } (1/n) \leq P(y^{-1}) \leq n\}\right)$

şi care este închisă pentru $f \mapsto f1_F \circ r$, cu F într-o algebră care generează $\mathcal{B}(G)$, este indusă de o reprezentare X a grupoidului prin

$$< X_f j, k >= \int f(x)\big(X(x) j(d(x)), k(r(x))\big) d\nu(x)$$

Dacă h_0, din observația precedentă, este mărginită pe mulțimile compacte U_G, atunci $\{[f] \in L_{1,\infty} : f / C_{G|U_0} \equiv 0\}$conține funcțiile caracteristice ale tuturor elementelor de forma $(K \cap G|_{U_0}) \cap E(n)$ cu K submulțime compactă a lui G şi n $\in$ N. Astfel $\{[f] \in L_{1,\infty} : f \mid C_{G|_{U_0}} \equiv 0\}$ îndeplineşte prima condiție (pentru grupoidul $G|_{U_0}$). Deoarece

$$\int |f 1_F \circ r| d\nu_{u,v} = \int |f| 1_F(u) d\nu_{u,v} \le \int |f| d\nu_{u,v} \le \|f\|_{1\infty}$$

rezultă că a doua condiție este întotdeauna îndeplinită. Deci dacă h_0 este mărginită pe mulțimile compacte, atunci orice reprezentare a algebrei $\{[f] \in L_{1,\infty} : f \mid C_{G|_{U_0}} \equiv 0\}$ este indusă.

De asemenea, aceste observații rămân adevărate dacă înlocuim $\{[f] \in L_{1,\infty} : f / C_{G|U_0} \equiv 0\}$ prin $L^{1,\infty}$.

<u>*Teorema 3.2.10 (Theorem 10 [17]).*</u> Fie $\{\nu_i^u, u \in U_G\}$ un sistem Haar şi λ_i o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\widetilde{\lambda}_i = r_*(\lambda_i) = d_*(\lambda_i)$ să fie probabilitate cvasi invariantă, pentru i = $\overline{1,2}$. Fie $\{\nu_{u,v}^i, u, v \in U_G\}$ sistemele de măsuri construite în lema 3.2.1 corespunzătoare la $\{\nu_i^u, u \in U_G\}$ şi $\widetilde{\lambda}_i$, şi fie Δ_i o funcție modulară a probabilității $\widetilde{\lambda}_i$, i = $\overline{1,2}$. Fie h : $U_G \to R_+^*$ o funcție boreliană pozitivă cu proprietățile

$\nu_{u.v}^1 = h(v) \nu_{u.v}^2$ $(\forall)$ u,v $\in U_G$

$h(r(x))\Delta_1(x) = \Delta_2(x)h(d(x))$ $(\forall)$ x $\in$ G

(existența funcției h rezultă din observația 2.4.7). Atunci

1) $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\}, \tilde{\lambda}_1\right)$ şi $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\}, \tilde{\lambda}_2\right)$ sunt *-izomorfe ca spații Banach cu involuție.

2) Dacă $\{\nu_1^u,\ u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u,\ u \in U_G\}$ admit aceeaşi probabilitate cvasi invariantă $\widetilde{\lambda}$ (<=> $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ $\widetilde{\lambda}$-a.p.t.), atunci $L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\},\widetilde{\lambda})$ şi $L_{2,\infty}(\{\nu_2^u\},\widetilde{\lambda})$ sunt izomorfe ca *-algebre Banach, şi de asemenea $L^{1,\infty}(\{\nu_1^u\},\widetilde{\lambda})$ şi $L^{1,\infty}(\{\nu_2^u\},\widetilde{\lambda})$ sunt izomorfe ca *-algebre Banach.

3) Prelungirea funcţiei

$$f \mapsto f\cdot h\circ d : [\ L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\},\widetilde{\lambda}_1) \to L_{2,\infty}(\{\nu_2^u\},\widetilde{\lambda}_2)\ ]$$

la $L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\},\widetilde{\lambda}_1)$ este un izomorfism de *-algebre Banach dacă şi numai dacă $\widetilde{\lambda}_1$ = $\widetilde{\lambda}_2$ (<=> $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ a.p.t. <=> $\{\nu_1^u,\ u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u,\ u \in U_G\}$ sunt sisteme Haar echivalente).

Demonstraţie. Notăm $\nu_i = \int \nu_i^u\, d\widetilde{\lambda}_i$, $i = \overline{1,2}$.

1) Definim φ : $L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\},\widetilde{\lambda}_1) \to L_{2,\infty}(\{\nu_2^u\},\widetilde{\lambda}_2)$ prin

$$\varphi(f) = f\cdot h\circ d$$

Demonstrăm că φ este corect definită. Fie f,g două funcţii boreliene absolut ν_1-integrabile astfel încât $f \sim g$. Atunci $f\cdot h\circ d$ şi $g\cdot h\circ d$ sunt funcţii boreliane şi

$$\int |fh\circ d|\, d\nu_2 = \int\int |f|\, h\circ d\; d\nu_{u,v}^2 d\widetilde{\lambda}_2 \times \widetilde{\lambda}_2(u,v)$$

$$= \int\int |f|\, d\nu_{u,v}^1 d\widetilde{\lambda}_2 \times \widetilde{\lambda}_2(u,v)$$

$$\le \int \|f\|_{1\infty}\, d\widetilde{\lambda}_2 \times \widetilde{\lambda}_2(u,v) = \|f\|_{1\infty} < \infty\ .$$

Analog, $\int |gh\circ d|\, d\nu_2 \le \|g\|_{1\infty}$. În consecinţă, $f\cdot h\circ d$ şi $g\cdot h\circ d$ sunt funcţii absolut ν_2-integrabile. De asemenea avem

$$\int |fh\circ d - gh\circ d|\, d\nu_{u,v}^2 = h(v)\int |f-g|\, d\nu_{u,v}^2 = \int |f-g|\, d\nu_{u,v}^1 = 0$$

pentru orice $(u,v) \in U_G\times U_G$. Astfel $\varphi(f) \sim \varphi(g)$, şi din

$$\|fh\circ d\|_{1\infty} = \sup_{(u,v)\in U_G\times U_G} \int |fh\circ d|\, d\nu_{u,v}^2 = \sup_{(u,v)\in U_G\times U_G} \int |f|\, d\nu_{u,v}^1 = \|f\|_{1\infty},$$

rezultă că φ este corect definită şi $\| \varphi(f) \|_{1\infty} = \| f \|_{\infty}$. Este uşor de observat că φ este o funcţie liniară bijectivă de la $L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\}, \widetilde{\lambda}_1)$ la $L_{2,\infty}(\{\nu_2^u\}, \widetilde{\lambda}_2)$. Din

$$\varphi(f^*)(y) = \overline{f(y^{-1})}\Delta_1(y^{-1})h \circ d(y) = \overline{f(y^{-1})}\Delta_2(y^{-1})h \circ d(y^{-1})$$

$$\varphi(f)^*(y) = \overline{f(y^{-1})h \circ d(y^{-1})}\Delta_2(y^{-1}) \Rightarrow \varphi(f^*) = \varphi(f)^*,$$

avem $\varphi(f^*) = \varphi(f)^*$. De aceea prelungirea lui φ la $L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\}, \widetilde{\lambda}_1)$ este un *-izomorfism de spaţii Banach.

2) Dacă $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2 = \widetilde{\lambda}$ atunci prelungirea lui φ la $L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\}, \widetilde{\lambda}_1)$ este un izomorfism de *-algebre Banach. Într-adevăr,

$$\varphi(f) * \varphi(g)(x) = \int\int \varphi(f)(xy)\varphi(g)(y^{-1})d\nu^2_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}(v)$$

$$= \int\int f(xy)g(y^{-1})h\left(\underbrace{d(y)}_{=v}\right)h\left(\underbrace{r(y)}_{=d(x)}\right)d\nu^2_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}(v)$$

$$= h(d(x))\int\int f(xy)g(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}(v)$$

$$= h \circ d(x)(f * g)(x)$$

$$= \varphi(f * g)(x).$$

Analog, funcţia $f \mapsto f \cdot h \circ d$: $[L^{1\infty}(\{\nu_1^u\}, \widetilde{\lambda}) \to L^{1\infty}(\{\nu_2^u\}, \widetilde{\lambda})]$ este un izomorfism de *-algebre Banach.

3) Notăm $f \cdot h \circ d$ prin $\varphi(f)$. Dacă $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2 = \widetilde{\lambda}$ atunci din ii) rezultă că φ este un izomorfism de *-algebre. Reciproc, presupunem că φ este un izomorfism de *-algebre. Fie A o submulţime boreliană a lui U_G astfel încât $\widetilde{\lambda}_2(A) = 0$. Aplicând observaţia 3.2.3, rezultă că există o funcţie pozitivă boreliană $f_0 : G \to R_+^*$ astfel încât

$$\int f_0(y)d\nu^1_{u,v}(y) = 1 \text{ pentru orice } (u,v) \in U_G \times U_G.$$

dacă luăm $f(y) = f_0(y)1_A(d(y))$ şi $g(y) = f_0(y)$ atunci $f,g \in L_{1,\infty}(\{\nu_1^u\}, \widetilde{\lambda}_1)$. Din $\varphi(f) * \varphi(g)(x) = \varphi(f * g)(x)$ pentru ν_2-a.p.t. $x \in G$, rezultă că

$$\int\int f(xy)g(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}_2(v) = \int\int f(xy)g(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}_1(v)$$

pentru ν_2-a.p.t. $x \in G$. Astfel

$$0 = \int 1_A(v) \int f_0(xy)g(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}_2(v)$$

$$= \int 1_A(v) \int f_0(xy)g(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}_1(v)$$

pentru ν_2-a.p.t. $x \in G$, pentru că $\widetilde{\lambda}_2(A) = 0$. Deci, pentru ν_2-a.p.t. $x \in G$, avem

$$1_A(v) \int f_0(xy)g(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y) = 0 \ \widetilde{\lambda}_1\text{-a.p.t. } v \in U_G.$$

Aceasta implică $\widetilde{\lambda}_1(A) = 0$, pentru că f_0, $g > 0$. Analog, putem demonstra că $\widetilde{\lambda}_1(A) = 0$ implică $\widetilde{\lambda}_2(A) = 0$. De aceea $\widetilde{\lambda}_1 \sim \widetilde{\lambda}_2$ şi $\nu_1 \sim \nu_2$. Fie $s = \dfrac{d\widetilde{\lambda}_2}{d\widetilde{\lambda}_1}$, $s > 0$ şi fie B o submulţime boreliană a lui U_G. Din $\varphi(f_0(1_B \circ d)) * \varphi(f_0)(x) = \varphi(f_0(1_B \circ d) * f_0)(x)$ pentru ν_2-a.p.t. $x \in G$, rezultă că

$$\int 1_B(v) \int f_0(xy)f_0(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)s(v)d\widetilde{\lambda}_1(v)$$

$$= \int 1_B(v) \int f_0(xy)f_0(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y)d\widetilde{\lambda}_1(v)$$

pentru ν_2-a.p.t. $x \in G$. Astfel,

$$(1 - s(v)) \int f_0(xy)f_0(y^{-1})d\nu^1_{d(x),v}(y) = 0 \ \widetilde{\lambda}_1\text{- a.p.t. } v \in U_G.$$

Am obţinut $s(v) = 1$ $\widetilde{\lambda}_1$- a.p.t. $v \in U_G$, pentru că $f_0 > 0$. Deci $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2$.

<u>Observaţie 3.2.11.</u> Fie $h_0 : U_G \to R_+^*$ o funcţie ca în observaţia 3.2.8.

1) Atunci avem următoarele perechi de *-algebre Banach izomorfe.

$$L_{1,\infty}\left(\{\nu^u\},\widetilde{\lambda}\right) \approx L_{1,\infty}\left(\{V^u\},\widetilde{\lambda}\right),\ L^{1,\infty}\left(\{\nu^u\},\widetilde{\lambda}\right) \approx L^{1,\infty}\left(\{V^u\},\widetilde{\lambda}\right)$$

unde $\int f dV^u := \int_{U_G}\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1}g\sigma(v)\right)d\mu(y)d\widetilde{\lambda}(v)$.

Într-adevăr, avem $\nu_{u,v} = h_0(v)V_{u,v}$ şi aplicând teorema precedentă rezultă că aplicaţia $f \mapsto fh_0 \circ d$ poate fi extinsă la un izomorfism de *-algebre Banach.

2) Dacă h_0 este mărginită pe mulțimile compacte, atunci $L_{1,\infty}\left(\{\nu^u\},\tilde{\lambda}\right)$ şi $L^{1,\infty}\left(\{\nu^u\},\tilde{\lambda}\right)$ conțin funcțiile continue cu suport compact.

Observație 3.2.12. Dacă (ν_1,μ) şi (ν_2,μ) sunt două măsuri Haar pe grupoidul cu măsură (G, C) atunci $I(G,\nu_1,\mu)$ şi $I(G,\nu_2,\mu)$ sunt izomorfe ca *-algebre Banach. Într-adevăr, din teorema 2.1.8 rezultă că există o funcție boreliană pozitivă φ pe U_G astfel încât $\varphi \circ d = \dfrac{d\nu_1}{d\nu_2}$. $f \mapsto f(\varphi \circ d)$ este un izomorfism de la $I(G,\nu_1,\mu)$ la $I(G,\nu_2,\mu)$. În cazul în care G este tranzitiv funcția φ coincide cu funcția h utilizată în teorema 3.2.10.

Dacă (ν_1,μ_1) şi (ν_2,μ_2) sunt măsuri Haar pe grupoidul tranzitiv G astfel încât $\nu_1 \in C_1$ şi $\nu_2 \in C_2$, unde C_1 şi C_2 sunt două clase distincte invariante pe G, atunci algebrele $I(G,\nu_1,\mu_1)$ şi $I(G,\nu_2,\mu_2)$ admit subalgebre izomorfe ca spații Banach cu involuție. Izomorfismul dintre aceste subalgebre respectă convoluția exact când $\nu_1 \sim \nu_2$ şi $\mu_1 = \mu_2$, şi în acest caz poate fi extins la un izomorfizm între $I(G,\nu_1,\mu_1)$ şi $I(G,\nu_2,\mu_2)$.