4. AMENABILITATE PENTRU GRUPOIZI

Grupoizii amenabili au fost definiți de J. Renault în [68]. Ca şi în cazul grupurilor, o bună parte din teoria grupoizilor amenabili constă în demonstrarea echivalenței diverselor definiții ale amenabilității. În subcapitolul 4.2 vom prezenta noțiunile de propriu amenabilitate şi de amenabilitate aşa cum apar în [1]. În secțiunea **a** a subcapitolului 4.2 se definesc aceste noțiuni în contextul borelian, şi în secțiunea **b** în contextul topologic În subcapitolul 4.1 demonstrăm o proprietate de densitate care va fi utilizată în 4.2 pentru a arăta că se poate întării condiția de normalizare impusă unei medii aproximative slab invariante asociate grupoid amenabil. În 4.3 generalizăm la grupoizi următorul rezultat (21.2. [59]): dacă G este un grup local compact necompact şi m este o medie invariantă pe $L^\infty(G)$, atunci $m(\varphi) = 0$ pentru orice funcție φ continuă pe G care se anulează la infinit.

O mare parte a subcapitolului 4.2 constă în enunțarea unor rezultate care duc la formularea diverselor definiții echivalente ale amenabilității topologice sau măsurabile. Cele două noțiuni nu se suprapun în cazul unui grupoid topologic oarecare, totuşi există următoarea legătură între ele. Amenabilitatea topologică implică amenabilitatea măsurabilă. În [1] (Theorem 3.3.7/pg. 51) se demonstrează că pentru un grupoid local-compact, topologic echivalent cu un grupoid care admite un sistem Haar continuu şi care are orbite numărabile, amenabilitatea măsurabilă este echivalentă cu amenabilitatea topologică. Amenabilitatea topologică este conservată de echivalența de grupoizi topologici (Theorem 2.2.13/pg. 27 [1]) şi amenabilitatea măsurabilă de echivalența de grupoizi boreleni (Theorem 3.2.13/pg. 48 [1]). În acest context noțiunea de echivalență de grupoizi boreleni este similară noțiunii de echivalenţă topologică, singura diferenţă fiind că aplicaţiile continue se schimbă cu aplicaţii boreliene.

Pentru a defini grupoizii amenabili se introduc, mai întâi aplicaţiile propriu amenabile şi amenabile. Contextul în care se lucrează este următorul:

- G grupoid topologic (resp. borelian)
- X, Y G-spaţii topologice (resp. boreliene) la stânga
- $\pi : Y \to X$ aplicaţie surjectivă continuă (resp. boreliană) G-echivariantă.

Elementele grupoidului G vor fi notate, în acest capitol, cu γ, γ_1, … pentru a putea face distincţie mai uşor între ele şi elementele G-spaţiilor X şi Y, care vor fi notate cu x, x_1,.. respectiv y, y_1,…

4.1. SISTEME DE MĂSURI ŞI SPAŢII DE FUNCŢII

În acest subcapitol vom prezenta spaţiile de funcţii necesare pentru definirea aplicaţiilor amenabile. În afară de spaţiile de funcţii utilizate în [1] vom mai introduce încă un spaţiu şi vom demonstra o proprietate de densitate a acestui spaţiu. Această proprietate va fi utilizată în subcapitolul următor pentru a arăta că se poate întării condiţia de normalizare impusă unei medii aproximative slab invariantă.

<u>*Definiţie 4.1.1.*</u> Fie Y , X două spaţii boreliene şi $\pi : Y \to X$ o aplicaţie boreliană . *Un π-sistem borelian* (sau un *sistem borelian de măsuri pentru π*) este o familie $\alpha = \{\alpha^x : x \in X\}$ de măsuri α^x pe $\pi^{-1}(x)$ a.î .

(1) pentru orice funcţie boreliană nenegativă f pe Y, funcţia :

$$x \xrightarrow{\alpha(f)} \int f\, d\alpha^x \text{ este boreliană}$$

(2) există o funcţie boreliană pozitivă g pe Y astfel încât $\alpha(g) = 1$.

<u>*Observaţie 4.1.2.*</u> Condiţia (2) din definiţia 4.1.1 este echivalentă cu:

(∗) Y este reuniunea unui şir crescător de mulţimi boreliene cu proprietatea că $x \mapsto \alpha^x(A_n)$ este mărginită pentru orice n, şi $\alpha^x \neq 0$, $(\forall) x \in X$. (Lemme 3, pg 37 [26])

Notaţii 4.1.3. Fie α un π-sistem ca mai sus şi c o clasă de măsuri pe X . Pentru simplitate, vom fixa o măsură pozitivă μ aparţinând clasei c, şi vom identifica spaţiul $L^\infty(X, c)$ cu spaţiul $L^\infty(X, \mu)$, pe care îl vom nota cu $L^\infty(X)$. Introducem pe spaţiul Y măsura μ ∘ α, definită prin:

$$\int f \, d\mu \circ \alpha = \int \alpha(f) d\mu$$

pentru orice funcţie boreliană nenegativă $f : Y \to R$.

Pentru 1 ≤ p < ∞, definim $L^\infty(X, L^p(Y, \alpha))$ ca fiind spaţiul Banach al funcţiilor μ ∘ α -măsurabile $f : Y \to C$ cu proprietatea că aplicaţia $x \mapsto \int |f|^p d\alpha^x$ este μ-esenţial mărginită, înzestrat cu norma

$$\| f \|_{\pi,p} = \left(\left\| \alpha\left(|f|^p \right) \right\|_\infty \right)^{1/p} .$$

Definim $L^\infty(X, L^\infty(Y, \alpha))$ ca fiind spaţiul Banach $L^\infty(Y, \mu \circ \alpha) = L^\infty(Y)$.

Din proprietatea (2) (definiţia 4.1.1) a π-sistemului α rezultă că pentru fiecare $g \in L^\infty(X)^+$, există o funcţie nenegativă f în $L^\infty(X, L^1(Y, \alpha))$ cu α(f) = g şi $\| f \|_{\pi,1} = \| g \|_\infty$. $L^\infty(X)$ este izometric scufundat în $L^\infty(Y)$ (prin aplicaţia $\varphi \mapsto \varphi \circ \pi$), deci $L^\infty(Y)$ şi $L^1(X)$ pot fi considerate $L^\infty(X)$ -module. Notăm cu $L^\infty(Y) \otimes_{L^\infty(X)} L^1(X)$ spaţiul cât obţinut prin factorizarea produsului tensorial algebric al celor două spaţii $L^\infty(Y)$ şi $L^1(X)$ (înzestrat cu norma produs tensorial proiectiv

$$\| t \| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \| x_i \| \| y_i \| , \ t = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\} , \ t \in L^\infty(Y) \otimes L^1(X) \ )$$

la subspaţiul liniar V generat de elementele de forma $f\varphi \otimes \mu - \varphi \otimes f\mu$ cu $f \in L^\infty(X)$, $\varphi \in L^\infty(Y)$, $\mu \in L^1(X)$. Fiecare element $\varphi \otimes h$, cu $\varphi \in L^\infty(Y)^+$ şi $h \in L^1(X)^+$

poate fi văzut ca o măsură de densitate $\varphi(h\circ\pi)$ relativ la $\mu\circ\alpha$. Vom gândi spaţiul $L^\infty(Y)\otimes_{L^\infty(X)} L^1(X)$ ca un spaţiu de "măsuri complexe" pe Y.

Cu $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$ notăm spaţiul Banach al aplicaţiilor $L^\infty(X)$ –liniare mărginite de la $L^\infty(Y)$ la $L^\infty(X)$. Pentru m din $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$, definim $T_m \in \left(L^\infty(Y)\otimes_{L^\infty(X)} L^1(X)\right)^*$ prin:

$$\langle T_m, \varphi\otimes h\rangle = \langle m(\varphi), h\rangle$$

unde $\varphi \in L^\infty(Y)$, şi $h \in L^1(X)$. Atunci $m \mapsto T_m$ defineşte un izomorfism izometric de la $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$ la $\left(L^\infty(Y)\otimes_{L^\infty(X)} L^1(X)\right)^*$.

În plus, presupunem satisfăcute următoarele ipoteze **(*)**, care generalizează proprietăţile sistemului de măsuri obţinut prin dezintegrarea unui sistem Haar prin aplicarea teoremei de structură a măsurii Haar (Theorem 4.4/pg. 23 [41]):

1) μ este probabilitate.
2) Y este înzestrat cu o aplicaţie $Y \ni y \mapsto y^{-1} \in Y$ având proprietatea că $\left((y)^{-1}\right)^{-1} = y$, $(\forall) y\in Y$. Considerăm aplicaţia $\rho : Y\to Y$ definită prin $\rho(y) = \pi(y^{-1})$.
3) Măsura $\mu\circ\alpha$ admite (π,ρ)- dezintegrarea următoare:

$$\int f(y)d\mu\circ\alpha(y) = \int_{E_0}\int_{Y_0} f(y)d\alpha_{u,v}(y)q(u,v)d\mu'(u,v)$$

unde

- $X_0 \subset X$ este o mulţime a cărei complementară este de măsură (μ) nulă
- $E = \{(\pi(y), \rho(y)) :\ y\in Y\} = (\pi,\rho)(Y)$; presupunem că X= $\{u\ : (\exists) v\ (u,v)\in E\}$
- $E_0 = \{(\pi(y), \rho(y)) :\ y\in Y, \pi(y), \rho(y)\in X_0\}$
- q este o funcţie strict pozitivă pe E_0
- μ' este o probabilitate pe E aparţinând clasei de măsuri $[(\pi,\rho)_*(\mu\circ\alpha)]$

- măsurile $\alpha_{u.v}$ sunt σ- finite

4) Există o funcție boreliană f: $Y \to \mathbf{R}_+$ cu proprietatea că $q(u.v)\alpha_{u,v}(f)=1$ μ' - a.p.t..

Pentru $1 \le p < \infty$, definim $L^\infty(E, L^p(Y, \alpha))$ ca fiind spațiul Banach al funcțiilor $\mu \circ \alpha$ -măsurabile $f : Y \to \mathbf{C}$ cu proprietatea că aplicația $(u,v) \mapsto \int |f|^p d\alpha_{u,v}$ este μ'-esențial mărginită, înzestrat cu norma

$$\| f \|_{\pi,\rho,p} = \left(\left\| (u,v) \mapsto q(u,v)\alpha_{u,v}\left(|f|^p \right) \right\|_\infty \right)^{1/p}.$$

Pentru $f \in L^\infty(E, L^p(Y, \alpha))$ notăm cu $\alpha_0(f)$ funcția $\alpha_0(f) : E_0 \to \mathbf{C}$ funcția definită prin $\alpha_0(f)(u,v) = q(u,v)\alpha_{u,v}(f)$.

Notăm:

$L^\infty(E, L^p(Y, \alpha))_1^+$ = mulțimea elementelor nenegative $f \in L^\infty(E, L^p(Y, \alpha))$ cu $\alpha_0(f) = 1$

$L^\infty(X, L^1(Y, \alpha))_1^+$ = mulțimea elementelor nenegative f din $L^\infty(X, L^1(Y, \alpha))$ cu $\| f \|_{\pi,1} \le 1$

$B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))_1^+$ = mulțimea elementelor nenegative m din $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$ cu $\| m \| \le 1$.

M = mulțimea elementelor m din $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$ cu m(1) = 1.

Deoarece aplicația $f \mapsto m_f$, unde $m_f(\varphi) = \alpha(f\varphi)$, este o contracție injectivă de la $L^\infty(E, L^1(Y, \alpha))$ la $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$, rezultă că putem privi $L^\infty(E, L^1(Y, \alpha))$ ca o submulțime a spațiului $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$. În mod analog, spațiul $L^\infty(X, L^1(Y, \alpha))$ este considerat o submulțime al lui $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$.

Vom demonstra densitatea lui $L^{\infty}(E, L^1(Y,\alpha))_1^+$ în $B_{L^{\infty}(X)}(L^{\infty}(Y), L^{\infty}(X))_1^+ \cap$ M prin aceleaşi argumente ca cele utilizate în [1] pentru demonstrarea densităţii lui $L^{\infty}(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ în $B_{L^{\infty}(X)}(L^{\infty}(Y), L^{\infty}(X))_1^+$ (Lemma 1.2.6/pg. 26 [1]).

Propoziţie 4.1.4 (Proposition 4 [19]).

1) $L^{\infty}(E, L^1(Y,\alpha)) \subset L^{\infty}(X, L^1(Y,\alpha))$.

2) Pentru orice g $\in L^{\infty}(X)$ există $f \in L^{\infty}(E, L^1(Y,\alpha))$ cu $\alpha_0(f)(u,v)=g(u)$ a.p.t. şi $\| f \|_{\pi,1} = \| f \|_{\pi,\rho,1} = \| g \|_{\infty}$. Dacă $g \geq 0$ atunci f poate fi aleasă nenegativă.

Demonstraţie. 1) Fie $\mu' = \int \delta_u \times \beta^u \, d\mu$ o p-dezintegrare a măsurii μ', unde p:E$\to$ X, p(u,v) = u. Demonstrăm că $\alpha^u = \int \alpha_{u,v} q(u,v) d\beta^u(v)$. Într-adevăr, pentru orice funcţie boreliană nenegativă $f: Y \to R$ şi orice funcţie boreliană nenegativă g:X$\to$ R avem:

$$\int g(u) \int f(y) d\alpha^u(y) d\mu(u) = \int g(\pi(y)) f(y) d\mu \circ \alpha(y)$$

$$= \int \int g(\pi(y)) f(y) d\alpha_{u,v}(y) q(u,v) d\mu'(u,v)$$

$$= \int \int \int g(\pi(y)) f(y) d\alpha_{u,v}(y) q(u,v) d\beta^u(v) d\mu(u)$$

$$= \int g(u) \int \int f(y) d\alpha_{u,v}(y) q(u,v) d\beta^u(v) d\mu(u).$$

Deoarece β^u sunt probabilităţi μ- a.p.t. u, rezultă că $\| f \|_{\pi,1} \leq \| f \|_{\pi,\rho,1}$.

2) Luăm f(y) = g(π(y))h(y), unde h este o funcţie cu proprietatea $q(u,v)\alpha_{u,v}(h)=1$ μ'- a.p.t., şi ţinem seama de faptul că $\alpha^u = \int \alpha_{u,v} q(u,v) d\beta^u(v)$. ■

Lemă 4.1.5. Fie l o formă liniară pe $L^{\infty}(E, L^1(Y,\alpha))$, care are proprietatea că există $h \in L^{\infty}(X)^+$ astfel încât

$$|l(f)| \leq \int |f| d(h\mu) \circ \alpha$$

pentru toate funcțiile $f \in L^{\infty}(E, L^1(Y, \alpha))$. Atunci există o funcție $\varphi \in L^{\infty}(Y)$ cu $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$ şi $l(f) = \int \varphi f \, d(h\mu) \circ \alpha$, pentru orice funcție $f \in L^{\infty}(E, L^1(Y, \alpha))$.

Demonstrație. Fie $(A_n)_n$ un şir crescător de submulțimi boreliene ale lui Y cu $\bigcup_n A_n = Y$ şi $(u, v) \mapsto q(u, v)\alpha_{u,v}(A_n)$ mărginită pentru orice n (putem lua $A_n = \left\{ y : \frac{1}{n} \leq h_0(y) \leq n \right\}$, unde h_0 este o funcție boreliană pozitivă cu proprietatea $q(u.v)\alpha_{u,v}(h_0) = 1$ μ'- a.p.t). Fie de asemenea $(B_n)_n$ un şir crescător de submulțimi boreliene ale lui X cu $\bigcup_n B_n = X$. Punem $\chi_n = 1_{A_n}(1_{B_n} \circ \pi)$. Din teorema Radon-Nikodym în $L^{\infty}(Y)$, rezultă existența unei funcții $\varphi \in L^{\infty}(Y)$ cu proprietățile : $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$ şi

$$l(\psi \chi_n) = \int \varphi \psi \chi_n \, d(h\mu) \circ \alpha, \ (\forall)\psi \in L^{\infty}(Y)$$

Fie $f \in L^{\infty}(E, L^1(Y, \alpha))$. Avem $l(f) = \int \varphi f \, d(h\mu) \circ \alpha$ deoarece există un şir $(\psi_n)_n$ în $L^{\infty}(Y)$ astfel încât

$$\lim_n \int |f - \psi_n \chi_n| d(h\mu) \circ \alpha = 0 \ ■$$

<u>*Propoziție 4.1.6 (Proposition 6 [19]).*</u> Orice element $\nu \in L^{\infty}(Y) \otimes_{L^{\infty}(X)} L^1(X)$ poate fi exprimat ca $\nu = \varphi_0 \otimes h_0$ cu $\|\varphi_0\|_{\infty} = 1$ şi $\|h_0\|_1 = \|\nu\|$. Mai mult

$$\|\nu\| = \sup\left\{ |\nu(f)|, \ f \in L^{\infty}(E, L^1(Y, \alpha)) \text{ cu } \|f\|_{\pi,\rho,1} \leq 1 \right\}, \text{ unde}$$

$$\nu(f) = \int f\varphi_0 \, h_0 \circ \pi \, d\mu \circ \alpha,$$

iar dacă $\varphi_0 \geq 0$ şi $h_0 \geq 0$ atunci :

$$\|\nu\| = \sup\left\{ \nu(f), \ f \in L^{\infty}(E, L^1(Y, \alpha))^+ \text{ cu } \alpha_0(f) = 1 \right\}.$$

Demonstrație. Fie $\nu \in L^{\infty}(Y)\otimes_{L^{\infty}(X)} L^{1}(X)$. ν se poate scrie ca $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \otimes h_i$ modulo V, sau ținând cont de identificarea spațiului $L^{\infty}(Y)\otimes_{L^{\infty}(X)} L^{1}(X)$ cu un spațiu de măsuri ca $\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i h_i \circ \pi\right)\bullet(\mu\circ\alpha)$. Atunci pentru $f \in L^{\infty}(E, L^{1}(Y,\alpha))$ avem

$$|\nu(f)| \le \sum_{i=1}^{n}\int |f|\,|\varphi_i|\,|h_i\circ\pi|\,d\mu\circ\alpha \le \int |f|\left(\sum|\varphi_i|\right)\max(|h_i|)\circ\pi\, d\mu\circ\alpha$$

$$\le \int |f|\, d(h\mu)\circ\alpha \text{ , unde}$$

$h = n\cdot\max\|\varphi_i\|_{\infty}\max|h_i|$.

Din lema 4.1.5 rezultă că putem scrie $\nu = \varphi\otimes h$ cu $\varphi \in L^{\infty}(Y)$, $\|\varphi\|_{\infty} \le 1$, şi cu $h \in L^{1}(X)^{+}$. Înlocuind ν prin $|\nu| = |\varphi|\otimes h$, putem presupune că φ şi ν sunt pozitive. Pentru $g \in L^{\infty}(X)^{+}$, punem

$$\mu_0(g) = \sup\left\{\nu(f), f\in L^{\infty}(E, L^{1}(Y,\alpha))^{+} : \alpha_0(f)(u,v) = g(u) \text{ a.p.t. }\right\}.$$

Arătăm că μ_0 este o formă liniară continuă pe $L^{\infty}(X)$. Fie g_1, $g_2 \in L^{\infty}(X)^{+}$ şi fie $g = g_1 + g_2$. Luăm f_1 şi $f_2 \in L^{\infty}(E, L^{1}(Y,\alpha))^{+}$ astfel încât $\alpha_0(f_i)(u,v) = g_i(u)$, $i = 1,2$. Deoarece avem $\alpha_0(f_1 + f_2)(u,v) = (g_1 + g_2)(u)$ rezultă că $\mu_0(g_1 + g_2) \ge \nu(f_1) + \nu(f_2)$, şi deci $\mu_0(g_1 + g_2) \ge \mu_0(g_1) + \mu_0(g_2)$. Pentru a demonstra inegalitatea opusă luăm $f \in L^{\infty}(E, L^{1}(Y,\alpha))^{+}$ cu $\alpha_0(f)(u,v) = (g_1 + g_2)(u)$, şi $l_0 : Y \to R_{+}$ cu $q(u.v)\alpha_{u,v}(l_0) = 1$ μ'- a.p.t.. Pentru orice $\varepsilon > 0$, considerăm funcțiile :

$$f_i = \frac{(f + \varepsilon l_0)(g_i\circ\pi)}{g\circ\pi + \varepsilon} \quad i = 1,2$$

Funcțiile f_1, $f_2 \in L^{\infty}(E, L^{1}(Y,\alpha))^{+}$, şi au proprietatea că $\alpha_0(f_i)(u,v) = g_i(u)$, $i = 1,2$. Mai mult, avem :

$$\nu(f_1) + \nu(f_2) = \nu(f_1 + f_2) = \nu\left((f + \varepsilon l_0)\frac{g\circ\pi}{g\circ\pi + \varepsilon}\right) = \nu\left(f - \frac{\varepsilon}{g\circ\pi + \varepsilon}f - \frac{\varepsilon g\circ\pi}{g\circ\pi + \varepsilon}l_0\right)$$

şi în consecinţă,

$$
\begin{aligned}
\nu(f) &\le \nu(f_1)+\nu(f_2)+\varepsilon\,\nu\left(\frac{f}{g\circ\pi+\varepsilon}\right)+\varepsilon\nu\left(\frac{g\circ\pi}{g\circ\pi+\varepsilon}1_0\right)\\
&\le \nu(f_1)+\nu(f_2)+\varepsilon\|\varphi\|_\infty\int h\frac{\alpha(f)}{g+\varepsilon}d\mu+\varepsilon\|\varphi\|_\infty\int h\frac{g}{g+\varepsilon}d\mu\\
&\le \nu(f_1)+\nu(f_2)+2\varepsilon\|\varphi\|_\infty\|h\|_1
\end{aligned}
$$

Rezultă deci că $\mu_0(g)\le \mu_0(g_1)+\mu_0(g_2)$. μ_0 este aditivă, şi în plus este mărginită deoarece $\mu_0(g)\le \|g\|_\infty\|\varphi\|_\infty\|h\|_1$, pentru $g, h, \varphi\ge 0$ cu $\varphi\otimes h=\nu$. Mai mult, deoarece

$$\mu_0(g)\le\|\varphi\|_\infty\int gh\,d\mu \quad \text{pentru } g\in L^\infty(X)^+$$

rezultă că există $h_0 \in L^1(X)^+$ astfel încât $\mu_0 = h_0\mu$. Pentru fiecare $f \in L^\infty(E, L^1(Y,\alpha))^+$, avem $\nu(f)\le\int f\,d(h_0\mu)\circ\alpha$. Din lema 4.1.5 rezultă că există $\varphi_0 \in L^\infty(Y)^+$ cu $\|\varphi_0\|_\infty\le 1$ astfel încât $\nu=\varphi\otimes h=\varphi_0\otimes h_0$ în $L^\infty(Y)\otimes_{L^\infty(X)}L^1(X)$. Se observă că $\|\varphi_0\|_\infty=1$ şi $\|h_0\|_1=\|\nu\|$, deoarece $\|h_0\|_1\le\|\nu\|\le\|\varphi_0\|_\infty\|h_0\|_1$.

Pentru orice $\varepsilon>0$, există $f\in L^\infty(E, L^1(Y,\alpha))^+$ cu $\alpha_0(f)=1$ şi

$$\nu(f)\ge\mu_0(1)-\varepsilon=\|h_0\|_1-\varepsilon.$$

Astfel avem $\|h_0\|_1=\|\nu\|\le\sup\left\{\nu(f),\ f\in L^\infty(E, L^1(Y,\alpha))^+ \text{ cu } \alpha_0(f)=1\right\}$. Inegalitatea opusă este evidentă. ■

Observaţie 4.1.7. Fără a presupune că măsura $\mu\circ\alpha$ de pe Y admite o dezintegrare care să verifice ipotezele **(*)**, în [1] (Lemma 1.2.5 (i) /pg. 7) este demonstrat că orice element ν din $L^\infty(Y)\otimes_{L^\infty(X)}L^1(X)$ poate fi exprimat de asemenea ca $\nu=\varphi_0\otimes h_0$ cu $\|\varphi_0\|_\infty=1$ şi $\|h\|_1=\|\nu\|$, şi în plus,

$$\|\nu\|=\sup\left\{\,|\nu(f)|\,,\ f\in L^{\infty}\left(X,L^{1}(Y,\alpha)\right)\text{ cu }\|f\|_{\pi,1}\,\right\}.$$

Utilizând acest rezultat se arată că aplicația canonică de la $L^{\infty}(Y)\otimes_{L^{\infty}(X)}L^{1}(X)$ la $L^{\infty}(Y)\hat{\otimes}_{L^{\infty}(X)}L^{1}(X)$ (câtul completatului produsului tensorial, în norma produs tensorial proiectiv, la închiderea spațiului V) este un izomorfism izometric, de unde rezultă că $L^{\infty}(Y)\otimes_{L^{\infty}(X)}L^{1}(X)$ este un spațiu Banach al cărui dual este $B_{L^{\infty}(X)}\left(L^{\infty}(Y),L^{\infty}(X)\right)$ (Lemma 1.2.5 (ii) /pg. 7 [1]).

Propoziție 4.1.8 (Proposition 8 [19]). $L^{\infty}\left(E,L^{1}(Y,\alpha)\right)_{1}^{+}$ este dens în $B_{L^{\infty}(X)}\left(L^{\infty}(Y),L^{\infty}(X)\right)_{1}^{+}\cap M$ înzestrat cu topologia *-slabă .

Demonstrație. Fie C închiderea *-slabă a $L^{\infty}\left(E,L^{1}(Y,\alpha)\right)_{1}^{+}$ în spațiul $B_{L^{\infty}(X)}\left(L^{\infty}(Y),L^{\infty}(X)\right)$. Submulțimea $C\subset B_{L^{\infty}(X)}\left(L^{\infty}(Y),L^{\infty}(X)\right)_{1}^{+}$ este o mulțime compactă în topologia *-slabă deoarece este o submulțime închisă a bilei unitate din $B_{L^{\infty}(X)}\left(L^{\infty}(Y),L^{\infty}(X)\right)$.

Presupunem prin absurd că există $m\in B_{L^{\infty}(X)}\left(L^{\infty}(Y),L^{\infty}(X)\right)_{1}^{+}\cap M$ care nu este în C. Utilizând teorema de separare Hahn-Banach pentru mulțimea convexă şi compactă C şi $\{m\}$, rezultă că există un $\nu\in L^{\infty}(Y)\otimes_{L^{\infty}(X)}L^{1}(X)$, şi un număr real r astfel încât

$$\operatorname{Re}\nu(m) > r\text{ , şi }\operatorname{Re}\nu(f)\le r\text{ pentru orice }f\in L^{\infty}\left(E,L^{1}(Y,\alpha)\right)_{1}^{+}$$

Ținând cont de propoziția 4.1.6 rezultă că putem lua $\nu=\varphi_{0}\otimes h_{0}$ cu $\|\varphi_{0}\|_{\infty}=1$ şi $\|h_{0}\|_{1}=\|\nu\|$, $h_{0}\ge 0$. Notăm $\nu^{+}=((\operatorname{Re}\varphi_{0})+1)\otimes h_{0}$ ($\|\varphi_{0}\|_{\infty}=1$ => $(\operatorname{Re}\varphi_{0})+1\ge 0$ a.p.t.) . Atunci

$$\nu^{+}(m)=\int m(\operatorname{Re}\varphi_{0}+1)h_{0}\,d\mu=\operatorname{Re}\nu(m)+\|h_{0}\|_{1}>r+\|\nu\|\text{, şi}$$

$$\nu^{+}(f)=\int f(\operatorname{Re}\varphi_{0}+1)h_{0}\circ\pi\,d\mu\circ\alpha=\operatorname{Re}\nu(f)+\|h_{0}\|_{1}=\operatorname{Re}\nu(f)+\|\nu\|\le r+\|\nu\|,$$

pentru orice $f \in L^{\infty}(E, L^{p}(Y,\alpha))_{1}^{+}$.

Deoarece $\| \nu^{+} \| = \sup\{ \nu^{+}(f),\ f \in L^{\infty}(E, L^{1}(Y,\alpha))^{+} \text{ cu } \alpha_{0}(f)=1 \}$ rezultă că $\| \nu^{+} \| \le r + \| \nu \|$ şi deci $\| m \| > 1$, ceea ce contrazice $m \in B_{L^{\infty}(X)}(L^{\infty}(Y), L^{\infty}(X))_{1}^{+} \cap M$.

■

Definiţie 4.1.9. Fie α un sistem borelian pentru $\pi : Y \to X$, şi fie μ o măsură pe X. O *medie* ("*mean* ") este o aplicaţie, $m : L^{\infty}(Y) \to L^{\infty}(X)$, pozitivă, unitală, $L^{\infty}(X)$-liniară. Când X este redus la un punct rezultă că m este o stare pe $L^{\infty}(Y)$ (Definition 1.3.4/pg. 30 [1]).

Observaţie 4.1.10. Fie sistemele boreliene α_1 pentru $\pi_1 : Y_1 \to X$ şi α_2 pentru $\pi_2 : Y_2 \to Y_1$, şi μ o măsură pe X. Considerăm spaţiul borelian Y_2 înzestrat cu măsura

$$\mu \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2) = (\mu \circ \alpha_1) \circ \alpha_2 .$$

Dacă $m_1 : L^{\infty}(Y_1) \to L^{\infty}(X)$ este o aplicaţie $L^{\infty}(X)$–liniară şi dacă $m_2 : L^{\infty}(Y_2) \to L^{\infty}(Y_1)$ este $L^{\infty}(Y_1)$-liniară, atunci compunerea $m_1 \circ m_2$ este o aplicaţie $L^{\infty}(X)$–liniară de la $L^{\infty}(Y_2)$ la $L^{\infty}(X)$. $m_1 \circ m_2$ este o medie când m_1 şi m_2 sunt medii.

4.2. GRUPOIZI AMENABILI

a. Cazul borelian

Notaţie 4.2.1. Fie G un grupoid borelian şi X un G-spaţiu la stânga (X este înzestrat cu o structură boreliană, acţiunea lui G pe X este presupusă boreliană şi de asemenea aplicaţia $r : X \to U_G$ este presupusă boreliană). Fie X^{op} spaţiul X înzestrat cu acțiunea lui G la dreapta definită după cum urmează : $d^{op} = r$, $x\gamma = \gamma^{-1}x$, atunci vom nota cu $X \times G$ grupoidul $X^{op} * G$, a cărei structură este definită de 1.20.1 din capitolul 1, şi cu X/G spațiul X factorizat la relația : x ~ y $\Leftrightarrow (\exists)\gamma \in G : \gamma^{-1}x = y$ ($\Leftrightarrow x\gamma = y$).

<u>*Definiție 4.2.2.*</u> Fie X , Y două G-spații boreliene, şi fie $\pi : Y \to X$ o aplicație boreliană G-echivariantă (i.e. $r(\pi(y)) = r(y)$ şi $\gamma\, \pi(y) = \pi(\gamma\, y)$ pentru orice $(\gamma , y) \in G*X$)

1. Spunem că π-sistemul de măsuri $\alpha = \{\alpha^x, x \in X\}$ este *invariant* (*G-invariant*) dacă $\gamma\alpha^x = \alpha^{\gamma x}$ pentru orice pereche (x, γ) cu $r(x) = d(\gamma)$, unde măsura $\gamma\alpha^x$ este definită prin

$$\int f(y)d(\gamma\alpha^x)(y) := \int f(\gamma y)d\alpha^x(y)\,,\ f \geq 0 \text{ boreliană pe } Y.$$

2. Spunem că π este o *aplicație boreliană propriu-amenabilă* dacă există un π-sistem borelian de probabilități invariant. (Definition 2.1.13/pg. 38 [1])

<u>*Definiție 4.2.3.*</u> Spunem că un grupoid borelian G este *propriu* (*propriu-amenabil*) dacă aplicația boreliană $r : G \to U_G$ este propriu-amenabilă.

G-spațiul borelian X se numeşte *propriu* (*propriu-amenabil*) dacă grupoidul borelian X×G propriu (propriu-amenabil). (Definition 2.1.13/pg. 38 [1]).

<u>*Propoziție 4.2.4.*</u> (Proposition 2.1.5/pg. 35 [1]).

1) Compunerea a două aplicații G-echivariante propriu amenabile este o aplicație G-echivariantă propriu amenabilă.

2) Reciproc, fie aplicațiile G-echivariante $\pi : Y \to X$ şi $\rho : Z \to Y$ astfel încât $\pi \circ \rho$ să fie propriu amenabilă. Atunci π este propriu amenabilă.

3) Dacă G este propriu, atunci orice G-spațiu borelian este propriu.

Introducem mai departe elementele necesare pentru definirea aplicațiilor boreliene amenabile.

Definiţie 4.2.5 Fie G un grupoid borelian înzestrat cu un sistem Haar borelian $\nu=\{\nu^u, u\in U_G\}$, şi fie X un G-spaţiu borelian. O măsură pozitivă μ pe X se numeşte *cvasi invariantă* relativ la ν (sau
(G, ν)) dacă măsura $\mu \circ \nu$ de pe X$*$G definită prin:

$$\mu\circ\nu(f)=\int f(x,\gamma)d\nu^{r(x)}(\gamma)d\mu(x), \quad (\forall)f\in B(X*G)^{+}$$

este echivalentă cu imaginea ei prin aplicaţia $I:(x,\gamma)\mapsto(\gamma^{-1}x,\gamma^{-1})$, unde $B(X*G)^{+}$ este mulţimea tuturor funcţiilor boreliene nenegative pe X$*$G . Cu alte cuvinte, μ este cvasi-invariantă dacă grupoidul $\left(X\times G,\left[\int \delta_x\times\nu^{r(x)}d\mu(x)\right]\right)$ este grupoid cu măsură (Definition 3.1.1/pg. 53 [1]).

Vom considera în plus o surjecţie G-echivariantă boreliană π de la G-spaţiul borelian Y la X. Spunem că un π-sistem borelian α este G –cvasi invariant dacă există un *cociclu borelian* (i.e. un morfism de grupoizi) c : Y $\times$ G $\rightarrow$ R_*^+ , a. î.

$$\int f(\gamma^{-1}y)c(y,\gamma)d\alpha^{x}(y)=\int f(y)d\alpha^{\gamma^{-1}x}(y), \quad (\forall)f\in B(G)^{+},(\forall)\gamma\in G$$

Astfel măsurile $\gamma\alpha^{\gamma^{-1}x}$ şi α^{x} sunt echivalente pentru (x, γ) $\in$ X$*$G şi au derivata Radon-Nikodym $\dfrac{d\left(\gamma\alpha^{\gamma^{-1}\pi(y)}\right)}{d\alpha^{\pi(y)}}=c(y,\gamma)$. Sistemul α este G-invariant dacă c = 1.

Dându-se μ şi α ca mai înainte, măsura $\beta = \mu \circ \alpha$ de pe Y este de asemenea cvasi invariantă şi avem

$$\frac{d(\beta\circ\nu)}{d(\beta\circ\nu)^{-1}}(y,\gamma)=\frac{d(\mu\circ\nu)}{d(\mu\circ\nu)^{-1}}(\pi(y),\gamma)c(y,\gamma)^{-1} \quad \text{a.p.t.}$$

Reciproc, presupunem că se dă o aplicaţie G-invariantă boreliană $\pi : Y \rightarrow X$, şi considerăm o măsură β pe Y, cvasi invariantă pentru (G, ν). Fie μ o probabilitate echivalentă cu imaginea lui β prin π, şi fie dezintegrarea $\beta=\int \alpha^{x}\, d\mu(x)$ lui β relativ la μ . Atunci evident μ este cvasi invariantă, şi din unicitatea dezintegrării rezultă că $\gamma\alpha^{\gamma^{-1}x}$ este echivalentă cu α^{x} pentru $\mu \circ \nu$ - a. p. t. (x , γ).

În acest subcapitol vom adopta următorul punct de vedere: (G , ν) este un grupoid borelian cu sistemul Haar ν, $\pi : Y \to X$ este o aplicaţie G-invariantă boreliană, α este un π-sistem borelian cvasi invariant cu cociclul asociat c, şi μ este o măsură cvasi invariantă pe X. De acum înainte vom presupune c = 1, deşi multe dintre rezultatele următoare rămân adevărate pentru un cociclu c oarecare. Notăm $\delta = \frac{d(\mu \circ \nu)}{d(\mu \circ \nu)^{-1}}$. Spaţiul Y va fi implicit înzestrat cu măsura cvasi invariantă $\mu \circ \alpha$. Atunci avem

$$\frac{d(\mu \circ \alpha \circ \nu)}{d(\mu \circ \alpha \circ \nu)^{-1}}(y,\gamma) = \delta(\pi(y),\gamma)c(y,\gamma)^{-1} = \delta(\pi(y),\gamma) \text{ a.p.t.}$$

Vom nota cu $B_b(G,\nu)$ spaţiul funcţiilor boreliene f definite pe G cu proprietatea că $\nu(|f|)$ este mărginită.

Propoziţie 4.2.6. $B_b(G,\nu)$ acţionează prin convoluţie pe $L^\infty(X)$ conform formulei:

$$(L(f)\varphi)(x) = (f *_\nu \varphi)(x) = \int f(\gamma)\varphi(\gamma^{-1}x)d\nu^{r(x)}(\gamma)$$

pentru $f \in B_b(G,\nu)$ şi $\varphi \in L^\infty(X)$. Avem:

$$\| f *_\nu \varphi \|_\infty \le \| f \|_{r,1} \| \varphi \|_\infty .$$

Definiţie 4.2.7. Spunem că o medie $m \in B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$ este *invariantă* dacă

$$m(f*\varphi) = f*(m(\varphi)) \text{ pentru orice } f \in B_b(G,\nu) \text{ şi } \varphi \in L^\infty(Y).$$

(Definition 3.1.4/pg. 56 [1]).

Lema 4.2.8. Fie un şir $(g_i)_i$ din $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ (funcţiile nenegative din $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))$ de normă ≤ 1). Următoarele condiţii sunt echivalente:

(1) Pentru (∀) $\varphi \in L^\infty(Y)$, (∀) $h \in L^1(X)$ şi (∀) $f \in B_b(G,\nu)$,

$$\lim_i \int f(\gamma)h(x)\varphi(y)\left[g_i\left(\gamma^{-1}y\right)-g_i(y)\right]d\nu^{r(x)}(\gamma)d\alpha^x(y)d\mu(x)=0 \ ;$$

(2) Pentru $(\forall)$ $\varphi \in L^\infty(Y)$, $(\forall)$ $h \in L^1(X)$ şi $(\forall)$ $f \in B_b(G,\nu)$,

$$\lim_i \int f(\gamma)h(x)\varphi\left(\gamma^{-1}y\right)\left[g_i\left(\gamma^{-1}y\right)-g_i(y)\right]d\nu^{r(x)}(\gamma)d\alpha^x(y)d\mu(x)=0 \ ;$$

(3) Pentru $(\forall)$ $\varphi \in L^\infty(Y)$, şi $(\forall)$ $f \in L^1(X*G)$,

$$\lim_i \int f(x,\gamma)\,\varphi(y)\left[g_i\left(\gamma^{-1}y\right)-g_i(y)\right]d\nu^{r(x)}(\gamma)d\alpha^x(y)d\mu(x)=0 \ ;$$

(Lemma 3.1.5/pg. 56 [1]).

<u>*Definiție 4.2.9.*</u> Un şir $(g_i)_i$ din $L^\infty\left(X,L^1(Y,\alpha)\right)_1^+$ care satisface condițiile echivalente din lema precedentă şi în plus are proprietatea

$$(\forall)h \in L^1(X)\ ,\lim_i \int h(x)g_i(y)d\alpha^x(y)d\mu(x)=\int h(x)d\mu(x),$$

se numeşte medie aproximativă slab invariantă. (Definition 3.1.6/pg. 57 [1]).

<u>*Observație 4.2.10.*</u> În definiția 4.2.9 se poate impune condiția $\alpha(g_i)=1$ pentru orice i, înlocuind şirul $(g_i)_i$ cu şirul $(g_{i,n})_{i,n}$ definit prin

$$g_{i,n}=\frac{g_i+(1/n)g}{\alpha(g_i)+1/n} \quad ,$$

unde g este o funcție boreliană nenegativă pe Y cu $\alpha(g) = 1$.

<u>*Propoziție 4.2.11.*</u> Fie $m : L^\infty(Y) \to L^\infty(X)$ o medie . Următoarele condiții sunt echivalente :

(1) m este invariantă ;

(2) există o medie aproximativă slab invariantă $(g_i)_i$ în $L^\infty\left(X,L^1(Y,\alpha)\right)_1^+$ astfel încât $\lim_i m_{g_i} = m$ în $B_{L^\infty(X)}\left(L^\infty(Y),L^\infty(X)\right)$ înzestrat cu topologia *-slabă , unde

$$m_{g_i}:L^\infty(Y)\to L^\infty(X) \qquad m_{g_i}(\varphi)=\alpha(g_i\varphi) \ ;$$

Dacă sunt satisfăcute ipotezele (∗) din subcapitolul precedent atunci condiția (1) este echivalentă cu

(2') există o medie aproximativă slab invariantă $(g_i)_i$ în $L^\infty(E, L^1(Y,\alpha))_1^+$ astfel încât $\lim_i m_{g_i} = m$ în $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))$ înzestrat cu topologia *-slabă.

Demonstrație. Fie $(g_i)_i$ un şir în $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$. Pentru $f \in B_b(G,\lambda)$, $h \in L^1(X)$, şi $\varphi \in L^\infty(Y)$ avem

$$\left\langle f * \left(m_{g_i}(\varphi)\right), h\right\rangle - \left\langle m_{g_i}(f * \varphi), h\right\rangle =$$

$$= \int f(\gamma)h(x)\varphi(\gamma^{-1}y)\left[g_i(\gamma^{-1}y) - g_i(y)\right]d\nu^{r(x)}(\gamma)d\alpha^x(y)d\mu(x)$$

Astfel utilizând densitatea lui $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ în $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))_1^+$ (Lemma 1.2.6/ pg. 8 [1]), observăm că (1) şi (2) sunt echivalente.

Dacă în plus, sunt satisfăcute ipotezele **(∗)** din subcapitolul 4.1 (4.1.3) atunci $L^\infty(E, L^1(Y,\alpha))_1^+$ este dens în $B_{L^\infty(X)}(L^\infty(Y), L^\infty(X))_1^+ \cap M$. Deci în acest caz (1) şi (2') sunt echivalente. ■

Propoziție 4.2.12. Următoarele afirmații sunt echivalente :

(1) Există o medie invariantă $m : L^\infty(Y) \to L^\infty(X)$

(2) Există o medie aproximativă slab invariantă

(3) Există un şir $(g_i)_i$ în $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ astfel încât

(a) $(\forall) h \in L^1(X)$, $\lim\limits_i \int h(x) g_i(y) d\alpha^x(y) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x)$,

(b) $\lim_i \int h(x)\left[\int \left| f * g_i - (\nu(f)\circ r) g_i \right| d\alpha^x\right] d\mu(x) = 0$,

$(\forall) h \in L^1(X)$ şi $(\forall) f \in B_b(G,\nu)$.

(Proposition 3.1.8/pg. 58 [1]).

<u>*Definiție 4.2.13.*</u> Un şir $(g_i)_i$ din $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ se numeşte *medie aproximativă complet invariantă* dacă următoarele două condiții sunt îndeplinite:

(a) $(\forall) h \in L^1(X)$, $\lim\limits_i \int h(x) g_i(y) d\alpha^x(y) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x)$;

(b) $\lim_i \int f(x,\gamma)\varphi(y,\gamma)\left[g_i(\gamma^{-1}y) - g_i(y)\right] d\nu^{r(x)}(\gamma) d\alpha^x(y) d\mu(x) = 0$

$(\forall)$ $\varphi \in L^\infty(Y * G)$ şi $(\forall) f \in L^1(X * G)$ .Definition 3.1.20/pg. 63 [1]).

Putem normaliza o medie aproximativă complet invariantă cerând ca $\alpha(\ g_i\ ) =$ 1 pentru orice i (ca în 4.2.10). Dacă, în plus, sunt satisfăcute ipotezele (∗) din subcapitolul 4.1 (4.1.3) atunci se poate cere ca $\alpha_0(g_i) = 1$ pentru orice i.

<u>*Propoziție 4.2.14.*</u> Următoarele condiții sunt echivalente :

(1) Există o medie aproximativă complet invariantă .

(2) Există un şir $(g_i)_i$ în $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ a.î :

(a) $\alpha(\ g_i\ ) = 1$, pentru orice i ;

(b) pentru orice $f \in L^1(X * G)$,

$$\lim_i \int f(x,\gamma)\left| g_i(\gamma^{-1}y) - g_i(y)\right| d\nu^{r(x)}(\gamma) d\alpha^x(y) d\mu(x) = 0 .$$

(Proposition 3.1.22/pg. 64 [1]).

<u>*Definiție 4.2.15.*</u> Un element $e \in L^\infty(X * G)$ se numeşte de *tip pozitiv* dacă pentru orice număr natural n , şi orice $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$, inegalitatea

$$\sum e\left(\gamma_i^{-1}x, \gamma_i^{-1}\gamma_j\right)\overline{\zeta_i}\zeta_j \geq 0$$

are loc pentru $\nu^{r(x)}$ –aproape toți $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ din $G^{r(x)}$, pe o submulțime de complementară nulă a lui X .

O astfel de funcție admite o restricție $e^{(0)}$ la U_G , cu $\|e\|_\infty = \|e^{(0)}\|_\infty$ ([71] şi [67]).

Propoziție 4.2.16. Următoarele condiții sunt echivalente :

(1) Există o medie aproximativă complet invariantă .

(2) Există un şir $(\xi_n)_n \in L^\infty(X, L^2(Y,\alpha))$ astfel încât şirul $(e_n)_n$ de funcții de tip pozitiv pe grupoidul X∗G , definite prin

$$e_n(x,\gamma) = \int \overline{\xi_n(y)}\xi_n(\gamma^{-1}y)d\alpha^x(y)$$

are proprietățile :

(a) $e_n^{(0)} = 1 \ (\forall)n$;

(b) $\lim_n e_n = 1$ *-slab în $L^\infty(X * G)$.

(Proposition 3.1.25/pg. 65 [1]).

Definiție 4.2.17. Un *π-sistem de medii, invariant relativ la (α, ν, μ)* este o familie m = {m^x, x ∈ X },de stări (sau medii) m^x pe $L^\infty(Y, \alpha^x)$, astfel încât pentru orice φ ∈ $L^\infty(Y)$ să avem

(a) $x \mapsto m^x(\varphi)$ este μ-măsurabilă;

(b) $\gamma m^{\gamma^{-1}x}(\varphi) = m^x(\varphi)$ pentru $\mu\circ\nu$-a.p.t. (x, γ) ∈ X∗G, unde $\gamma m^{\gamma^{-1}x}(\varphi) = m^{\gamma^{-1}x}(\varphi(\gamma\,\cdot))$.

(Definition 3.1.26/pg. 66 [1]).

Propoziție 4.2.18. Următoarele afirmații sunt echivalente :

(1) Există o medie invariantă m : $L^\infty(Y) \to L^\infty(X)$;

(2) Există o medie aproximativă slab invariantă;

(3) Există o medie aproximativă complet invariantă;

(4) Există un π-sistem de medii, invariant relativ la (α, ν, μ).

(3.1.26, 3.1.14, 3.1.19, 3.2.3, 3.2.4 [1]).

Definiție 4.2.19. Fie G un grupoid borelian, şi π : Y → X o aplicație boreliană G-invariantă . Presupunem date un sistem Haar ν pe G şi β o măsură pe Y, care este cvasi invariantă pentru ν. Fie μ o măsură aparținând $[\pi_*(\beta)]$. Spunem că aplicația π este *amenabilă* relativ la (ν, β) (sau (G, ν, β)) dacă există o medie invariantă m : $L^\infty(Y,\beta) \to L^\infty(X,\mu)$, i.e o medie m cu proprietatea m(f*φ) = f*(m(φ)) pentru orice $f \in B_b(G,\nu)$ şi $\varphi \in L^\infty(Y)$. (Definition 3.2.1/pg. 67 [1]).

<u>*Definiție 4.2.20.*</u> Spunem că un grupoid cu măsură $\left(G, \left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ = (G, ν, μ) este *amenabil* (sau *clasa măsurii μ este amenabilă pentru (G, ν)*), dacă aplicația boreliană $r: G \to U_G$ este amenabilă relativ la (ν , $\mu \circ \nu$)(Definition 3.2.8/pg. 71 [1]).

Deci grupoidul cu măsură $\left(G, \left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ este amenabil dacă şi numai dacă există o medie m : $L^\infty(G) \to L^\infty(U_G)$ astfel încât m(f*φ) = f*(m(φ)) pentru orice f $\in B_b(G,\nu)$ şi $\varphi \in L^\infty(G)$.

<u>*Definiție 4.2.21.*</u> Fie G un grupoid borelian care admite un sistem Haar ν, şi X un G-spațiu înzestrat cu o măsură μ , cvasi invariantă pentru ν . Spunem că G-spațiul X este *amenabil relativ la (ν , μ)* dacă grupoidul cu măsură $\left(X \times G, \left[\int \delta_x \times \nu^{r(x)} d\mu(x)\right]\right)$ este amenabil (Definition 3.2.12/pg. 72 [1])..

<u>*Propoziție 4.2.22.*</u> Fie $\left(G, \left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ un grupoid borelian cu măsură. Următoarele condiții sunt echivalente :

(1) $\left(G, \left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ este amenabil ;

(2) [condiția slabă a lui Day] Există un şir $(g_i)_i$ în $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))_1^+$ (funcțiile nenegative din $L^\infty(X, L^1(Y,\alpha))$ de normă $\le$ 1), normalizat (i.e. $\nu(g_i)$=1, $(\forall)$i) care are proprietatea

$$\lim_i \int f(\gamma)\ \varphi(\gamma_1)\left[\ g_i\left(\gamma^{-1}\gamma_1\right)-g_i(\gamma_1)\right]d\nu^u(\gamma_1)d\nu^u(\gamma)d\mu(u)=0$$

pentru $(\forall)$ $\varphi \in L^\infty(G)$ şi $(\forall)$ $f\in L^1(G)$;

(3) [condiția tare a lui Day] Există un şir $(g_i)_i$ în $L^\infty\left(X, L^1(Y,\alpha)\right)_1^+$, normalizat, care are proprietatea

$$\lim_i \int h(u)\left[\int |\, f * g_i - (\nu(f)\circ r)g_i\,|\,d\nu^u\right]d\mu(u)=0$$

pentru $(\forall)h\in L^1(U_G)$ şi $(\forall)f\in B_b(G,\nu)$;

(4) [condiția slabă a lui Reiter] Există un şir $(g_i)_i$ în $L^\infty\left(X, L^1(Y,\alpha)\right)_1^+$, normalizat, care are proprietatea

$\lim_i \int f(\gamma)\ \left|g_i\left(\gamma^{-1}\gamma_1\right)-g_i(\gamma_1)\right|d\nu^u(\gamma_1)d\nu^u(\gamma)d\mu(u)=0$ pentru $(\forall)$ $f\in L^1(G)$;

(5) [condiția Hulanicki] Există un şir $(\xi_n)_n \in L^\infty\left(U_G, L^2(G,\nu)\right)$ astfel încât şirul $(e_n)_n$ de funcții de tip pozitiv pe grupoidul G , definite prin

$$e_n(\gamma)=\int \overline{\xi_n(\gamma_1)}\xi_n\left(\gamma^{-1}\gamma_1\right)d\nu^{r(\gamma)}(\gamma_1)$$

satisface proprietățile :

$e_n^{(0)}=1$ $(\forall)n$;

$\lim_n e_n=1$ *-slab în $L^\infty(G)$.

(Proposition 3.2.14/pg. 74 [1]).

Observație 4.2.23. În propoziția anterioară obținem definiții echivalente dacă înlocuim şirul generalizat $(g_i)_i$ cu un şir $(g_n)_n$ indexat după numere naturale, deoarece spațiile măsurabile considerate sunt separabile, iar măsurile de pe ele σ–finite . De asemenea putem presupune că $g_i \in B_b(G,\nu)^+ \subset L^\infty\left(U_G, L^1(G,\nu)\right)^+$. Mai mult, vom vedea în subcapitolul următor că în cazul aplicației r : $U_G \to G$ sunt satisfăcute ipotezele **(*)** din subcapitolul 4.1 (4.1.3), şi deci rezultă că putem întării condiția de normalizare impusă şirului $(g_i)_i$.

Definiție 4.2.24. Fie G un grupoid borelian care admite un sistem Haar ν. Spunem că G este *măsurabil amenabil* dacă şi numai dacă $\left(G, \left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ este amenabil pentru orice măsură μ, cvasi invariantă relativ la ν (Definition 3.3.1/pg. 82 [1]).

Propoziție 4.2.25. Fie G un grupoid borelian care admite un sistem Haar ν. Presupunem că există un şir $(h_n)_n$ de funcții boreliene nenegative din $B_b(G,\nu)$ a.î.

(a) $\nu(h_n)>0, (\forall)n$

(b) $\lim\limits_n \frac{1}{\nu^{r(\gamma)}(h_n)}\int \left|h_n(\gamma^{-1}\gamma_1)-h_n(\gamma_1)\right| d\nu^{r(\gamma)}(\gamma_1)=0 \;, (\forall)\gamma \in G$

Atunci G este măsurabil amenabil .
(Proposition 3.3.2/pg. 83 [1]).

b. Cazul topologic (local-compact)

În această secțiune vom presupune grupoizii şi spațiile pe care acționează ca fiind spații topologice local-compacte, cu bază numărabilă. De asemenea vom presupune aplicațiile de proiecție, r şi d, ale acestor grupoizi topologici ca fiind aplicații deschise. Vom înțelege prin sistem Haar pe un grupoid G un sistem Haar (continuu), $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, cu supp $\nu^u = G^u$ pentru orice $u \in U_G$. Noțiunea de spațiu propriu este cea din 2.2. Sistemele boreliene de măsuri vor fi înlocuite de sisteme continue, definite mai jos.

Definiție 4.2.26. Fie X, Y două spații local compacte, şi fie $\pi : Y \to X$ o aplicație continuă surjectivă. Un *π-sistem continuu* este o familie $\alpha = \{ \alpha^x : x \in X \}$ de măsuri Radon pozitive pe Y a.î.:

(1) Suportul lui α^x este conținut în $\pi^{-1}(x)$;

(2) Pentru orice funcție continuă cu suport compact $f \in C_c(Y)$, funcția

$$\alpha(f): x \mapsto \int f \, d\alpha^x$$

este continuă;

(3) $\alpha^x \neq 0$ pentru orice $x \in X$.

Dacă suportul măsurii α^x este exact $\pi^{-1}(x)$ spunem că α este *complet*.

Notație: $C_{c,\pi}(Y)$ = spațiul funcțiilor continue pe Y, cu suport π-compact (o submulțime A⊂Y se numeşte *π-compactă* dacă pentru orice mulțime compactă K ⊂ X rezultă că mulțimea $\pi^{-1}(K) \cap A$ este compactă).

Lema 4.2.27. Un sistem de măsuri α cu proprietățile (1) şi (2) din definiția precedentă are proprietatea (3), din aceeaşi definiție, dacă şi numai dacă există o funcție continuă nenegativă g din $C_{c,\pi}(Y)$, cu α(g) = 1. (Lemma 1.1.2/pg. 19 [1])

Definiție 4.2.28. Fie X, Y două G-spații local compacte, şi fie π : Y → X o aplicație continuă G-echivariantă. Spunem că π este o aplicație *continuă propriu-amenabilă* dacă există un π-sistem continuu de probabilități invariant (Definition 2..13/pg. 38 [1].

Enunțăm în continuare câteva proprietăți ale aplicațiilor continue propriu amenabile.

Propoziție 4.2.29. Fie Y, X două G-spații local-compacte şi fie π : Y → X o aplicație G-echivariantă continuă surjectivă.

1) Dacă X un G-spațiu propriu, atunci Y este un G-spațiu propriu de asemenea .

2) Dacă Y este un G-spațiu propriu şi π este o aplicație continuă propriu-amenabilă, atunci X este un G-spațiu propriu.

(Proposition 2.1.14/pg. 39 [1]).

Propoziție 4.2.30. Fie Y, X două G-spații local-compacte şi fie $\pi : Y \to X$ o aplicație continuă G-echivariantă a.î. există un π-sistem continuu invariant de măsuri Radon pozitive β. Dacă X este G-spațiu propriu, atunci:

1) Există o funcție g în $C_{c,\pi}(Y)$ cu $\beta(g) = 1$.

2) $\pi : Y \to X$ o aplicație propriu-amenabilă continuă.

(Proposition 2.1.15/pg. 39 [1]).

Propoziție 4.2.31. Fie X , Y două G-spații local-compacte şi fie, $\pi : Y \to X$ o surjecție continuă deschisă G-echivariantă. Dacă X este un G-spațiu principal atunci π este o aplicație propriu amenabilă continuă. (Proposition 2.1.16/pg. 40 [1]).

Definiție 4.2.38. Fie X şi Y două G-spații, iar $\pi : Y \to X$ o surjecție continuă G-echivariantă care admite un π-sistem continuu invariant de măsuri, α. Aplicația continuă π se numeşte (*topologic*) *amenabilă* dacă îndeplineşte următoarea condiție:

(*) Există un şir $(g_n)_n$ în $C_{c,\pi}(Y)^+$ a.î.:

(a) $\int g_n \, d\alpha^x = 1$

(b) $\int \left| g_n(\gamma^{-1}y) - g_n(y) \right| d\alpha^x(y)$ converge la 0 uniform pe submulțimile compacte ale lui $X * G$.

Observație 4.2.39. În [1] aplicațiile (topologic-) amenabile sunt definite într-un context mai general (nu se cere ca π să admită un π-sistem continuu invariant de măsuri). Dacă π este o surjecție continuă G-echivariantă , care admite un π-sistem continuu invariant de măsuri, definiția 4.2.38. este mai tare decât cea utilizată în [1], însă cele două definiții sunt echivalente dacă Y este G-spațiu propriu (Proposition 2.2.54/ pg. 42 [1]).

Propoziție 4.2.40. Fie $\pi : Y \to X$ o surjecție continuă G-echivariantă înzestrată cu un π-sistem continuu invariant de măsuri , α . Condiția $(*)$ din definiția precedentă este echivalentă cu:

(**) Există un şir $(\xi_n)_n \subset C_{c,\pi}(Y)$ a.î. şirul $(e_n)_n$ de funcții pozitive pe grupoidul X×G, definite prin:

$$e_n(x,\gamma) = \int \overline{\xi_n(y)}\xi_n(\gamma^{-1}y)d\alpha^x(y)$$

satisface următoarele proprietăți :

(a) $e_n^{(0)} = 1$ $(\forall)n$;

(b) $\lim_n e_n = 1$ uniform pe submulțimile compacte ale lui $X*G$.

(Proposition 2.2.7/pg.44 [1]).

Definiție 4.2.41. Fie G un grupoid topologic local-compact, cu bază numărabilă, care admite un sistem Haar (continuu).

Spunem că G este un grupoid *topologic amenabil* dacă aplicația $r : G \to U_G$ este amenabilă.

Un G-spațiu local-compact X se numeşte *topologic amenabil* dacă grupoidul $X \times G$ este topologic amenabil. (Definition 2.2.8/pg. 45 [1])

Propoziție 4.2.42. Fie G este un grupoid topologic local-compact .
Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) G este topologic amenabil .

(2) Există un G-spațiu local-compact principal Z cu Z/G local compact, a.î. aplicația continuă $r : Z \to U_G$ este (topologic) amenabilă.

(3) Orice surjecție continuă deschisă G-echivariantă $\pi : Y \to X$ (X, Y G-spații local-compacte) este (topologic) amenabilă .

(Corollary 2.2.11 /pg. 46 [1])

Propoziție 4.2.43. Fie G un grupoid topologic local-compact, cu bază numărabilă, care admite un sistem Haar (la stânga) (continuu) $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ cu $\operatorname{supp} \nu^u = G^u$ $(\forall)$ $u \in U_G$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) G este amenabil.

(2) Există un şir $(h_n)_n$ de funcții continue pe G, de tip pozitiv, cu suport compact a.î.:

(a) $h_n^{(0)} \leq 1$ $(\forall)n$

(b) $\lim_n h_n = 1$ uniform pe submulțimile compacte ale lui G.

(Proposition 2.2.13/pg. 47 [1]).

Teoremă 4.2.44. Amenabilitatea topologică este invariantă la echivalența de grupoizi topologici local-compacți. (Theorem 2.2.17. /pg.50 [1]).

Enunțăm mai jos două rezultate care stabilesc legătura dintre amenabilitatea topologică şi amenabilitatea măsurabilă. Evident, amenabilitatea topologică implică amenabilitatea măsurabilă.

Teoremă 4.2.45. Fie G un grupoid local compact echivalent cu un grupoid care admite un sistem Haar continuu complet şi care are orbite numărabile. Atunci G este măsurabil amenabil dacă şi numai dacă este topologic amenabil. (Theorem 3.3.7/pg. 86[1])

Propoziție 4.2.46. Fie G un grupoid topologic local-compact care admite un sistem Haar ν continuu . Considerăm următoarele condiții :

(1) G este topologic amenabil;

(2) [condiția Reiter P_1] Există un şir $(g_n)_n$ de funcții boreliene (sau continue) nenegative din $B_b(G, \nu)$ cu $\nu(g_n) = 1$ pentru orice n, a.î.

$$\lim_n \int \left| g_n(\gamma^{-1}\gamma_1) - g_n(\gamma_1) \right| d\nu^{r(\gamma)}(\gamma_1) = 0$$

uniform pe submulțimile compacte ale lui G;

(3) [condiția Reiter P_1^*] Există un şir $(g_n)_n$ de funcții boreliene (sau continue) nenegative din $B_b(G,\nu)$ cu $\nu(g_n)=1$ pentru orice n, a.î.

$$\lim_n \int \left| g_n(\gamma^{-1}\gamma_1) - g_n(\gamma_1) \right| d\nu^{r(\gamma)}(\gamma_1) = 0$$

simplu;

(4) Există un şir $(h_n)_n$ de funcții boreliene nenegative din $B_b(G,\nu)$ cu $\nu(h_n)>0,(\forall)n$ a.î.:

$$\lim_n \frac{1}{\nu^{r(\gamma)}(h_n)} \int \left| h_n(\gamma^{-1}\gamma_1) - h_n(\gamma_1) \right| d\nu^{r(\gamma)}(\gamma_1) = 0 \ ,(\forall)\gamma \in G;$$

(5) G este măsurabil amenabil.

Atunci (1) => (2) => (3) => (4) => (5). Mai mult, aceste condiții sunt echivalente dacă G este echivalent cu un grupoid care admite un sistem Haar continuu complet, şi care are orbite numărabile. (Corollarz 3.3.8/pg. 88 [1]).

c. Proprietăți ale grupoizilor amenabili. Exemple.

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți ale grupoizilor amenabili, dintre care cităm următorul rezultat: Grupoidul cu măsură (G,λ,μ) este amenabil dacă şi numai dacă grupoidul principal asociat este amenabil şi aproape toate grupurile de izotropie sunt amenabile. (5.3.33/pg.127[1]). Acest rezultat reduce studiul grupoizilor amenabili la studiul grupurilor amenabile şi a relațiilor de echivalență amenabile (grupoidul principal asociat fiind o relație de echivalență). Din 5.3.38/pg.131 [1] şi [29] rezultă că o relație de echivalență cu clasele de echivalență numărabile este amenabilă dacă şi numai dacă este hiperfinită, i.e. este reuniunea unui şir (numărabil) crescător de relații de echivalență finite (< = > cu clase de echivalență finite). Deci un grupoid este amenabil dacă şi numai dacă este echivalent cu un grupoid care poate fi reprezentat ca un şir crescător de grupoizi $(G_n)_{n\in N}$, fiecare G_n fiind o reuniune disjunctă (algebrică) de grupoizi cu grupurile de izotropie amenabile şi orbite finite.

Propoziție 4.2.47. Dacă $\left(G,\left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ este un grupoid cu măsură amenabil, şi U o submulțime invariantă măsurabilă de măsură pozitivă a lui U_G, atunci grupoidul $\left(G|_U, \nu|_U, \mu|_U\right)$ este amenabil. (Proposition 5.3.5/pg. 114[1])

Demonstrație . Într-adevăr, dacă $m: L^\infty(G) \to L^\infty(U_G)$ este o medie invariantă pentru G, atunci restricția ei $m|_U : L^\infty(G|_U) \to L^\infty(U)$ este o medie invariantă pentru $G|_U$. ■

Propoziție 4.2.48. Fie $\left(G,\left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ un grupoid cu măsură şi p o aplicație boreliană definită pe U_G cu valori într-un spațiu borelian B care este invariantă (i.e. $p \circ r = p \circ d$). Fie $\underline{\mu}$ o măsură din clasa $[p_*(\mu)]$, şi $\mu = \int \rho_\omega d\underline{\mu}(\omega)$ p-dezintegrarea măsurii μ . Atunci $\underline{\mu}$ -a.p.t. ω măsurile ρ_ω sunt cvasi invariante pentru (G, ν), şi următoarele condiții sunt echivalente:

(1) $\left(G,\left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ este amenabil;

(2) $\left(G,\left[\int \nu^u d\rho_\omega(u)\right]\right)$ este amenabil $\underline{\mu}$ -a.p.t. ω .

(Proposition 5.3.4/pg. 113[1])

O consecință a propoziției de mai sus este următoarea (Corollary 5.3.33 /pg. 127 [1]):

Propoziție 4.2.49. Fie $\left(G,\left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ un grupoid cu măsură. Considerăm grupoidul principal asociat (cf. 2.1.), $\left((r,d)(G),\left[(r,d)_*\left(\int \nu^u d\mu(u)\right)\right]\right)$. Atunci $\left(G,\left[\int \nu^u d\mu(u)\right]\right)$ este amenabil dacă şi numai dacă

$\left((r,d)(G),\left[(r,d)_*\left(\int \nu^u d\mu(u)\right)\right]\right)$ este amenabil şi grupurile de izotropie G_u^u sunt amenabile μ-a.p.t. u.

<u>Exemplu 4.2.50.</u> Grupoidul provenit din acțiunea unui grup amenabil pe o mulțime local compactă este amenabil, dar reciproca nu este adevărată. Fie G un grup local compact cu bază numărabilă şi H un subgrup închis; se poate arăta că grupoidul $(H \setminus G)\times G$ este amenabil dacă şi numai dacă H este amenabil.

<u>Exemplu 4.2.51.</u> Orice măsură tranzitivă pe un grupoid principal este amenabilă . Indicăm pe scurt cum se construieşte un şir $(f_i)_i$ a.î. $f_i * f_i^* \to 1$ pe G . Fie [u] o orbită fixată şi μ măsura tranzitivă $d_*(\nu^u)$. Se poate alege un şir crescător $(K_i)_i$ de submulțimi compacte ale [u] (cu topologia dată de bijecția $d:G^u \to [u]$). Definim f_i prin

$$f_i(x)= \begin{cases} \mu(K_i)^{-1/2} & , \quad (r,d)(x) \in K_i \times K_i \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Atunci

$$f_i * f_i^*(x)=\begin{cases} 1 & , \quad (r,d)(x) \in K_i \times K_i \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Funcțiile f_i nu sunt în $C_c(G)$, dar sunt în $L^2(G,\nu)$ (unde am considerat μ probabilitate, şi $\nu= \int \nu^u d\mu(u)$) şi deci pot fi aproximate în $L^2(G,\nu)$ prin elemente ale lui $C_c(G)$.

Următoarele rezultate şi exemple aparțin lui J. Renault ([68], II.3). Prezentăm şi demonstrația acestor rezultate pentru a da o imagine asupra modului în care apar mediile (slab) invariante pe grupoizii amenabili.

Propoziția 4.2.52. Fie G un grupoid local-compact care admite un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, A un grup local compact şi c : G $\to$ A un morfism continuu . Fie G(c) grupoidul a cărui structură este definită prin :

$$G(c) = G \times A$$

$$(x, a)(y, ac(x)) = (xy, a)$$

$$(x, a)^{-1} = (x^{-1}, ac(x))$$

Cu aceste notații , avem

1) Dacă G este (măsurabil) amenabil , atunci G(c) este (măsurabil) amenabil;

2) Dacă A este amenabil şi G(c) este (măsurabil) amenabil, atunci G este (măsurabil) amenabil;

Demonstrație. Spațiul unităților lui G(c) este $U_G \times A$. Un sistem Haar pentru G(c) este $\{\nu^{u,a}\}$ dat prin

$$\int f(x, b) d\nu^{u,a}(x, b) = \int f(x, a) d\nu^u(x).$$

Vom descrie măsurile cvasi invariante pentru G(c) . Fie $\underline{\mu}$ o măsură cvasi invariantă pe U_G şi $\{\alpha_u, u \in U_G\}$ un sistem de măsuri pe A , care au proprietatea că măsura $\mu = \int \delta_u \times \alpha_u \, d\underline{\mu}(u)$ este corect definită şi este satisfăcută următoarea relație

$$\alpha_{d(x)} \sim \alpha_{r(x)} c(x) \;\; \underline{\nu} - \text{a.p.t. } x \quad , \text{unde } \underline{\nu} = \int \nu^u \, d\underline{\mu}(u)$$

Se verifică uşor că μ este o măsură cvasi invariantă pentru G(c) . Reciproc, presupunem că μ este o măsură cvasi invariantă pentru G(c), $\pi : U_G \times A \to U_G$ este proiecția pe prima componentă, şi $\underline{\mu}$ este imaginea măsurii μ prin π . Înlocuim μ, $\underline{\mu}$ şi $\{\nu^u\}$ cu probabilități din clasele lor. Fie $\{\alpha_u, u \in U_G\}$ probabilitățile obținute prin π-dezintegrarea lui μ relativ la $\underline{\mu}$. Măsura ν_0 indusă de μ are forma

$$\int f \, d\nu_0 = \int f(x, a) d\nu^u(x) \alpha_u(a) \underline{\mu}(u) \;\; ,$$

în timp ce ν_0^{-1} are forma

$$\int f\,d\nu_0^{-1} = \int f\left(x^{-1}, ac(x)\right) d\nu^u(x)\alpha_u(a)\underline{\mu}(u) \;.$$

Din unicitatea π-dezintegrării lui ν_0 , şi din simetria lui ν_0 obţinem $\alpha_{r(x)} \sim \alpha_{d(x)} c\left(x^{-1}\right)$ $\underline{\nu}$ – a.p.t. x .

1) Fie $\mu = \int \delta_u \times \alpha_u \, d\underline{\mu}(u)$ o măsură cvasi invariantă pentru G(c) , ca mai înainte . Dacă $\underline{\mu}$ este amenabilă , atunci există un şir $(f_i)_i$ în $C_c(G)$ a.î. $u \mapsto f_i * f_i^*(u)$ converge la 1 slab în $L^\infty(U_G, \underline{\mu})$, şi $x \mapsto f_i * f_i^*(x)$ converge la 1 slab în $L^\infty(G, \underline{\nu})$. Fie $(h_i)_i$ o unitate aproximativă mărginită în norma $\|\ \|_\infty$ pentru $C_c(A)$ cu înmulţirea (punctuală), şi funcţia $g_i \in C_c(G \times A)$ definită prin

$$g_i(x, a) = f_i(x) h_i(a)$$

Şirul $(g_i)_i$ are proprietăţile cerute :

$$g_i * g_i^*(x, a) = \int g_i(xy, a)\overline{g_i}(y, ac(x))\, d\lambda^{d(x)}(y)$$

$$= h_i(a)\overline{h_i}(ac(x)) f_i * f_i^*(x)$$

Verificăm convergenţa şirului $(u, a) \mapsto g_i * g_i^*(u, a)$. Acest şir fiind mărginit în $L^\infty(U_G \times A, \mu)$, este suficient să verificăm convergenţa doar pentru funcţii de forma $f(u)g(a)$ unde $f \in C_c(U_G)$ şi $g \in C_c(A)$. Observăm că

$$\int f(u)g(a) g_i * g_i^*(u, a)\, d\mu(x, a) =$$

$$= \int f(u)\left(\int g(a)|h_i(a)|^2 d\alpha_u(a)\right) f_i * f_i^*(u)\, d\underline{\mu}(u) \xrightarrow{\ i\ } \int f(u)g(a)\, d\mu(u, a) \,,$$

deoarece $\int g(a)|h_i(a)|^2 d\alpha_u(a)$ converge la $\int g(a)\, d\alpha_u(a)$ în $L^1(U_G, \underline{\mu})$ şi $f_i * f_i^*(u)$ converge la 1 slab în $L^\infty(U_G, \underline{\mu})$. Convergenţa lui $g_i * g_i^*(x, a)$ se demonstrează în acelaşi fel . În consecinţă, μ este amenabilă . În acelaşi mod se demonstrează că G topologic amenabil implică G(c) topologic amenabil .

2) Presupunem că A este amenabil şi G(c) este măsurabil amenabil . Fie $\underline{\mu}$ o măsură cvasi invariantă pe U_G . Atunci măsura $\mu = \underline{\mu} \times \alpha$, unde α este o măsură

Haar la dreapta pentru A , este cvasi invariantă pentru G(c) . Deoarece G(c) este măsurabil amenabil , există o medie aproximativă invariantă $(g_i)_i$, $g_i \geq 0$, $g_i \in C_c(G \times A)$ a.î. $(u,a) \mapsto \int g_i(x,a) d\nu^u(x)$ converge la 1 slab în $L^\infty(U_G \times A, \mu)$, şi $(u,a) \mapsto \int |g_i(xy,a) - g_i(y, ac(x))| d\nu^{d(x)}(y)$ converge la 0 slab în $L^\infty(G \times A, \nu_0)$. Grupul A fiind amenabil are de asemenea o medie invariantă $(k_i)_i$, $k_i \geq 0$, $k_i \in C_c(A)$ a.î. $\int k_j(a) d\alpha(a) = 1$, şi $b \mapsto \int |k_j(ab) - k_j(a)| d\alpha(a)$ converge la 0 uniform pe submulțimile compacte ale lui A . Definim funcțiile $f_{ij} \in C_c(G)$ prin $f_{ij} = \int g_i(x,a) k_j(a) d\alpha(a)$. Nu este greu de verificat că familia de funcții $u \mapsto \int f_{ij}(x) d\nu^u(x)$ este mărginită în $L^\infty(U_G, \underline{\mu})$ şi că familia de funcții $x \mapsto \int |f_{ij}(xy) - f_{ij}(y)| d\nu^{d(x)}(y)$ este mărginită în $L^\infty(G, \underline{\nu})$. Vom arăta că , fiind dată o vecinătate a lui 1 în $L^\infty(U_G, \underline{\mu})$ (înzestrat cu topologia slabă),

$$V = \left\{ h \in L^\infty(U_G, \underline{\mu}) : \left| \int (h(u) - 1) \phi_k(u) d\underline{\mu}(u) \right| \leq \varepsilon_k , \ k = 1,2,...,m \right\}$$

unde $\phi_k \in C_c(U_G)$, $\varepsilon_k > 0$, $k = 1,2,...,m$ şi o vecinătate a lui 0 în $L^\infty(G, \underline{\nu})$ (înzestrat cu topologia slabă),

$$W = \left\{ f \in L^\infty(G, \underline{\nu}) : \left| \int f(x) \psi_l(x) d\underline{\nu}(x) \right| \leq n_l , \ l = 1,2,...,n \right\}$$

există f_{ij} a.î. $u \mapsto \int f_{ij} d\lambda^u$ este în V şi $x \mapsto \int |f_{ij}(xy) - f_{ij}(y)| d\nu^{d(x)}(y)$ este în W .

Fie M cu proprietatea : $\left\| (u,a) \mapsto \int g_i(x,a) d\nu^u(x) \right\|_{L^\infty(U_G \times A, \mu)} \leq M$, $(\forall) i$

Putem alege j a.î. , pentru orice l = 1,2, …, n ,

$$\int |\psi_l(x)| \left| k_j\left(ac(x)^{-1}\right) - k_j(a) \right| d\alpha(a) d\underline{\nu}(x) \leq \frac{n_l}{2M}$$

De acum încolo j va fi fixat . Observăm că

$$\int \phi_k(u)\left(\int f_{ij}(x)d\nu^u(x)\right)d\underline{\mu}(u) =$$

$$=\int \left(g_i(x,a)d\nu^u(x)\right)\phi_k(u)k_j(a)d\mu(u,a) \xrightarrow{i} \int \phi_k(u)k_j(a)d\mu(x,a) = \int \phi_k(u)d\mu(u) .$$

Deci pentru i suficient de mare $u \mapsto \int f_{ij}\, d\nu^u$ este în V . Analog , pentru i suficient de mare, avem

$$\int \left(\int |\,g_i(xy,a) - g_i(y,ac(x))|\,d\nu^{d(x)}(y)\right)|\,\psi_l(x)|\,k_j(a)d\nu(x,a) \le \frac{n_l}{2}\ , \ l=1,2,...,n$$

Ținând cont de faptul că

$$f_{ij}(xy) - f_{ij}(y) =$$

$$= \int \left(g_i(xy,a) - g_i(y,ac(x))\right)k_j(a)d\alpha(a) + \int g_i(y,a)\left(k_j\left(ac(x)^{-1}\right) - k_j(a)\right)d\alpha(a) ,$$

obținem

$$\left|\int \left(\int |\,f_{ij}(xy) - f_{ij}(y)|\,d\nu^{d(x)}(y)\right)\psi_l(x)d\underline{\nu}(x)\right| \le$$

$$\le \int \left(\int |g_i(xy,a) - g_i(y,ac(x))|\ d\nu^{d(x)}(y)\right)|\psi_l(x)|k_j(a)d\nu_0(x,a) +$$

$$+ \int |\,\psi_l(x)|\left(\int g_i(y,a)d\nu^{d(x)}(y)\right)|\,k_j\left(ac(x)^{-1}\right) - k_j(a)|\,d\nu_0(x,a) \quad \le \ n_l$$

Aceasta arată că $\underline{\mu}$ este amenabilă . În acelaşi fel se arată că dacă G(c) este topologic amenabil şi A este amenabil, atunci G este topologic amenabil . ■

<u>Propoziție 4.2.53.</u> Fie G un grupoid topologic local-compact înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u\ ,\ u \in U_G\}$ şi A un grup local-compact care acționează continuu pe G prin automorfisme lăsând sistemul Haar invariant , şi fie $G \times_\alpha A$ produsul semi-direct .

1) Dacă A este amenabil şi G este (măsurabil) amenabil, atunci $G \times_\alpha A$ este (măsurabil) amenabil.

2) Dacă produsul semi-direct $G \times_\alpha A$ este (măsurabil) amenabil, atunci G este (măsurabil) amenabil .

Demonstrație. $\alpha : A \to Aut(G)$ este un morfism cu proprietatea că aplicația

$$A \times G \ni (a, x) \mapsto \alpha(a)x \in G$$

este continuă. Produsul semi-direct $G \times_\alpha A$ este grupoidul $G \times A$ unde:

$$(x, a)(y, b) = (x(\alpha(a)y), ab)$$

$$(x, a)^{-1} = (\alpha(a^{-1})x^{-1}, a^{-1})$$

Atunci $r(x, a) = (r(x), e)$, $d(x, a) = (\alpha(a^{-1})d(x), e)$ şi spațiul unităților produsului semi-direct poate fi identificat cu U_G . $G \times_\alpha A$ cu topologia produs pe G × A este grupoid topologic local-compact. Spunem că automorfismul s al lui G lasă sistemul Haar invariant dacă $s \cdot \nu^u = \nu^{s(u)}$, cu alte cuvinte dacă $\int f(s(x)) d\nu^{s^{-1}(u)}(x) = \int f(x)\nu^u(x)$ pentru orice $f \in C_c(G^u)$. Dacă β este o măsură Haar la stânga pentru A, atunci este un sistem Haar pentru $G \times_\alpha A$ - verificăm invarianța la stânga:

$$\int f((x, a)(y, b)) d\nu^{\alpha(a^{-1})d(x)}(y) d\beta(b) = \int f(x(\alpha(a)y), ab) d\nu^{\alpha(a^{-1})d(x)}(y) d\beta(b) =$$

$$= \int f(xy, ab) d\nu^{d(x)}(y) d\alpha(b) = \int f(y, b) d\nu^{r(x)}(y) d\alpha(b)$$

Demonstrația acestei propoziții este asemănătoare cu cea a propoziției precedente, de aceea vom indica doar construcția mediilor aproximative invariante:

1) Dacă se dă $(f_i)_i$ a.î. $f_i * f_i^* \to 1$ pe G şi $(h_j)_j$ a.î. $h_j * h_j^* \to 1$ pe A punem

$$g_{ij}(x, a) = f_i(\alpha(a^{-1})x) h_j(a)$$

2) Dacă se dă o medie aproximativă $(g_i)_i$ pe $G \times_\alpha A$, putem defini o medie aproximativă pe G prin

$$f_i(x) = \int g_i(x, a) d\beta(a) \ . \blacksquare$$

4.3. O PROPRIETATE DE ANULARE PENTRU MEDIILE INVARIANTE

Fie G un grupoid local-compact cu bază numărabilă şi $\{ \nu^u , u \in U_G \}$ un sistem Haar continuu pe G . Alegem μ o probabilitate cvasi invariantă asociată acestui sistem cu proprietatea că există o probabilitate simetrică λ pe G astfel încât $\mu=r_*(\lambda)$ (fiecare clasă de măsuri cvasi invariante conține o astfel de probabilitate) . Notăm cu $\nu = \int \nu^u d\mu(u)$ şi cu $\Delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ funcția modulară. Dacă pentru fiecare $u \in U_G$ definim măsura ν_u prin

$$\nu_u(f)=\int f(y^{-1})d\nu^u(y) \text{ , } f \geq 0 \text{ boreliană}$$

atunci $\nu^{-1} = \int \nu_u d\mu(u)$.

Presupunem (G, ν, μ) grupoid amenabil şi $m : L^\infty(G) \rightarrow L^\infty(U_G)$ o medie invariantă care provine dintr-o medie aproximativă complet invariantă normalizată. Vom demonstra că, în cazul în care G are μ-aproape toate grupurile de izotropie necompacte şi funcția modulară Δ mărginită pe o vecinătate simetrică a spațiului unităților U_G, m(f) = 0 pentru orice funcție f : G $\rightarrow$ **C** continuă care se anulează la infinit.

Existența unei medii invariante m este echivalentă cu existența unui şir de funcții pozitive boreliene $(g_n)_n$ (numit medie aproximativă slab invariantă) cu proprietățile:

1) $\int g_n d\nu^u = 1 \quad \mu - \text{a.p.t. } u \in U_G$

2) $\lim_{n\to\infty} \int f(x) \left| g_n(x^{-1}y) - g_n(y) \right| d\nu^u(y) d\nu^u(x) d\mu(u) = 0$ pentru orice f din $L^1(U_G * G)$

În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} m_{g_n} = m$ în $B_{L^\infty(U_G)}\left(L^\infty(G), L^\infty(U_G)\right)$ înzestrat cu topologia *-slabă, unde m_{g_n} se defineşte prin :

$$m_{g_n}(\varphi)(u) = \int g_n \varphi \, d\nu^u \text{ , } u \in U_G \text{ ,} \varphi \in L^\infty(G).$$

Aplicând teorema 2.1.15 grupoidului (G, [ν]) rezultă că există o mulțime boreliană U_0 cu complementara de măsură nulă astfel încât pe $G|_{U_0}$ integrala $f \mapsto \int f(y) d\nu(y)$ are (r,d)- dezintegrarea : $\int_{E|_{U_0}} \int_{G|_{U_0}} f(y) d\nu_{u,v}(y) q(u,v) d\lambda'(u,v)$,

unde

- $E = (r,d)(G)$
- $q : E|_{U_0} \to R_+^*$ este un morfism de grupoizi
- λ' este o probabilitate pe E aparținând clasei de măsuri $[(r,d)_*(\nu)]$.
- măsurile $\nu_{u,v}$ sunt σ-finite .

Se poate demonstra că putem alege mulțimea U_0 saturată şi măsurile $\nu_{u,v}$ astfel încât

$$\int f(y) d\nu_{u,v}(y) = \int f(y^{-1}) \delta(y^{-1}) d\nu_{v,u}(y) \ \ (\forall) u, v \in U_0 \ u \sim v \ ,$$

unde $\delta(y) = \Delta(y) \dfrac{q(d(y), r(y))}{q(r(y), d(y))}$. De asemenea un pas din demonstrația teoremei 4.4./pg. 23 [42] constă în a arăta că

$$\int f(y) d\nu_{u,v}(y) = \int f(y) Q(y) d\lambda_{u,v}(y) \ \ \lambda' - \text{a.p.t. } (u,v)$$

cu $\lambda_{u,v}$ probabilități concentrate pe G_v^u şi Q o funcție boreliană strict pozitivă. În consecință, luând $f(x) = \dfrac{1}{Q(x) q(r(x), d(x))}$ (ca şi în observația 3.2.3) rezultă că există o funcție boreliană $f: G \to \mathbf{R}_+$ cu proprietatea că $q(u,v)\nu_{u,v}(f) = 1$ λ' –a.p.t..

Dacă luăm $Y = G$, $X = U_G$, $\pi = r$, $\alpha^u = \nu^u$ se observă uşor că sunt satisfăcute ipotezele **(∗)** din subcapitolul 4.1, şi ținând cont de propoziția 4.2.11 deducem că putem alege şirul $(g_n)_n$ astfel încât să fie îndeplinite şi condițiile $g_n \in L^\infty\left(E, L^1(G, \nu)\right)$ (spațiul Banach al funcțiilor ν -măsurabile $f : G \to \mathbf{C}$ cu proprietatea că aplicația

$(u,v)\mapsto\int |f| d\nu_{u,v}$ este λ'-esențial mărginită, înzestrat cu norma $\| f \|_{r,d} = \| (u,v)\mapsto q(u,v)\nu_{u,v}(|f|)\|_\infty$) şi $\| g_n \|_{r,d} = 1\ (\forall)n$.

Existența unei medii invariante este echivalentă cu existența unui şir de funcții pozitive boreliene $(g_n)_n$ cu proprietățile:

1) $\int g_n d\nu^u = 1\ \ \mu-$a.p.t. $u\in U_G$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int f(x)\left|g_n(x^{-1}y)-g_n(y)\right|d\nu^u(y)d\nu^u(x)d\mu(u)=0$ pentru orice $f\in L^1(G)$

Să arătăm că putem presupune şi în acest caz că $\| g_n \|_{r,d} = 1\ (\forall)n$. Vom utiliza acelaşi raționament ca în [1] (Proposition 3.1.22/pg. 64). Am observat mai sus că existența unei medii invariante este echivalentă cu existența unei medii aproximative $(g'_n)_n$ cu $\| g'_n \|_{r,d} = 1\ (\forall)n$. Evident existența unui şir $(g_n)_n$ cu proprietățile 1) şi 2) de mai sus este mai tare decât existența unei medii aproximative slab invariante. Reciproc, să presupunem că există o medie aproximativă slab invariantă $(g'_n)_n$ cu $\| g'_n \|_{r,d} = 1\ (\forall)n$. Pentru fiecare $g\in L^\infty(E, L^1(G,\nu))^+$ cu $q(u,v)\nu_{u,v}(g) = 1$ pentru orice $(u,v) \in E$, notăm cu $b(g)$ funcția

$$(x, y) \to g(y^{-1}x) - g(x)$$

definită pe $G*G$. Fie C submulțimea convexă a lui $L^\infty(U_G*G, L^1(G*G))$ formată din funcții de forma $b(g)$. Faptul că există o medie aproximativă slab invariantă este echivalent cu faptul că 0 aparține închiderii lui C în $L^\infty(U_G*G, L^1(G*G))$ înzestrat cu topologia asociată cu familia de seminorme

$$f\to\left|\int h(u,v)\varphi(y)f(y)d\nu_{u,v}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)\right|$$

unde $h \in L^1(E)$ şi $\varphi \in L^\infty(G)$. Această topologie este mai slabă decât topologia definită de familia de seminorme

$$f\to\int h(u,v)|f(y)|d\nu_{u,v}(y)q(u,v)d\lambda'(u,v)$$

unde h $\in L^1(E)^+$. Conform lemei 4.1.5 cele două topologii admit aceleaşi forme liniare şi continue. Din teorema de separare Hahn-Banach rezultă că există un şir $(g_i)_i$ în $L^\infty(E, L^1(G,\nu))$ normalizat ($\| g_i \|_{r,d} = 1\ (\forall) i$) astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\left| g_n(x^{-1}y) - g_n(y)\right| d\nu^{r(x)}(y) d\nu_{u,v}(x) q(u,v) d\lambda'(u,v) = 0$$

ceea ce este echivalent cu

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\left| g_n(x^{-1}y) - g_n(y)\right| d\nu^{u}(y) d\nu^{u}(x) d\mu(u) = 0$$

Datorită separabilităţii lui $L^1(U_G{*}G)$ putem presupune că şirul $(g_i)_i$ poate fi indexat după numere naturale.

În cele ce urmează vom numi *medie aproximativă complet invariantă normalizată* un şir de funcţii pozitive boreliene $(g_n)_n$ cu proprietăţile:

1) $\| g_n \|_{r,d} = 1$ pentru orice n.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int f(x)\left| g_n(x^{-1}y) - g_n(y)\right| d\nu^{u}(y) d\nu^{u}(x) d\mu(u) = 0$ pentru orice $f \in L^1(G)$.

Am demonstrat că existenţa unei medii invariante este echivalentă cu existenţa unei medii aproximative complet invariantă şi normalizată $(g_n)_n$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} m_{g_n} = m$ în $B_{L^\infty(U_G)}(L^\infty(G), L^\infty(U_G))$ înzestrat cu topologia *-slabă, unde m_{g_n} se defineşte prin :

$$m_{g_n}(\varphi)(u) = \int g_n \varphi\, d\nu^u,\ u \in U_G, \varphi \in L^\infty(G),$$

atunci vom spune că m provine dintr-o medie aproximativă complet invariantă şi normalizată.

<u>*Lema 4.3.1 (Lemma 10 [19]).*</u> Cu notaţiile de mai sus, pentru orice $f \in L^1(G)$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\int f(xy^{-1})\left| g_n(y) - g_n(x)\right| d\nu_{d(x)}(y) d\nu(x) = 0$$

Demonstraţie. Din proprietatea 2) a mediei slab invariante $(g_n)_n$ rezultă

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int f(x)\left| g_n(x^{-1}y) - g_n(y)\right| d\nu^{u}(y) d\nu^{u}(x) d\mu(u)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int f(x)\left|g_n(y)-g_n(xy)\right|d\nu^{d(x)}(y)\underbrace{d\nu^{u}(x)d\mu(u)}_{d\nu(x)}$$

$$\overset{\nu=\Delta\nu^{-1}}{\downarrow}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int f(x)\left|g_n(y)-g_n(xy)\right|d\nu^{d(x)}(y)\Delta(x)d\nu^{-1}(x)$$

$$\overset{\nu^{-1}=\int \nu_u d\mu(u)}{\downarrow}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int f(x)\Delta(x)\left|g_n(y)-g_n(xy)\right|d\nu^{d(x)}(y)d\nu_u(x)d\mu(u)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int f(x)\Delta(x)\left|g_n(y)-g_n(xy)\right|d\nu_u(x)d\nu^{u}(y)d\mu(u)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int f\left(xy^{-1}\right)\Delta\left(xy^{-1}\right)\left|g_n(y)-g_n(x)\right|d\nu_{d(y)}(x)\underbrace{d\nu^{u}(y)d\mu(u)}_{d\nu(y)}$$

$$\overset{\nu=\Delta\nu^{-1}}{\downarrow}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int f(xy)\Delta(x)\left|g_n\left(y^{-1}\right)-g_n(x)\right|d\nu_{r(y)}(x)d\nu(y)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int f(xy)\Delta(x)\left|g_n\left(y^{-1}\right)-g_n(x)\right|d\nu^{u}(y)\underbrace{d\nu_u(x)d\mu(u)}_{d\nu^{-1}(x)}$$

$$\overset{\nu=\Delta\nu^{-1}}{\downarrow}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int f\left(xy^{-1}\right)\left|g_n(y)-g_n(x)\right|d\nu_{d(x)}(y)d\nu(x).\ \blacksquare$$

Propoziție 4.3.2 (Proposition 11 [19]). Dacă funcția modulară Δ este mărginită pe o vecinătate simetrică a spațiului unităților U_G, atunci există un şir $(h_n)_n$ de funcții pozitive boreliene pe U_G cu următoarele proprietăți:

1) Pentru orice mulțime compactă $K \subset G$ şi orice funcție $\varphi \in L^1(U_G)$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\int 1_K(x)\varphi(r(x))\left|g_n(x)-h_n(d(x))\right|d\nu(x)=0$$

2) Pentru orice $u \in U_G$ există $M(u) > 0$ astfel încât :
   (a) $h_n(u) \le M(u) < \infty$ $(\forall)$ n μ-a.p.t..
   (b) $u \mapsto M(u)$ este o funcție continuă.

Demonstrație. Fie U o vecinătate simetrică a spațiului unităților U_G pe care funcția modulară Δ să fie mărginită şi fie $U_1 \subset U$ o vecinătate închisă d-compactă a mulțimii U_G. Fie $b : G \to [0,1]$ o funcție continuă cu suportul d-compact $\subset U$ aleasă astfel încât $b|_{U_1} \equiv 1$. Dacă punem $a(x) = \dfrac{b(x)}{\int b(y)d\nu_{d(x)}}$ obținem o funcție a : G → **R**+

continuă cu suportul d-compact cu proprietatea că $\int a(y)d\nu_u(y) = 1 \ (\forall) u \in U_G$.

Definim funcțiile $h_n : U_G \to [0,\infty]$ prin

$$h_n(u) = \int a(y)g_n(y)d\nu_u(y)$$

Notăm cu L suportul funcției a . Deoarece L este o mulțime d-compactă rezultă că L^{-1} este r-compactă și deci pentru orice mulțime K compactă mulțimea KL^{-1} este compactă .

Fie $\varphi \in L^1(U_G)$ și K compactă ⊂ G fixate. Dacă $f(x) = \varphi(r(x))\, 1_{KL^{-1}}(x)$ atunci $f \in L^1(G)$ deoarece

$$\int |f(x)|d\nu(x) = \int |\varphi(u)| \int 1_{KL^{-1}}(x)d\nu^u(x)d\mu(u) \leq \sup \nu^u(KL^{-1}) \int |\varphi(u)|d\mu(u) .$$

Aplicând lema 4.3.1 acestei funcții f rezultă :

$$\lim_{n\to\infty} \int 1_{KL^{-1}}(xy^{-1})\varphi(r(x))|g_n(y) - g_n(x)|d\nu_{d(x)}(y)d\nu(x) = 0 \quad (1)$$

Dacă $M_0 = \sup\limits_{x \in L \cap d^{-1}(d(K))} a(x)$ atunci pentru orice $(x, y) \in \bigcup\limits_{u \in U_G} (G_u \times G_u)$ avem :

$$M_0 \cdot 1_{KL^{-1}}(xy^{-1})|\varphi(r(x))||g_n(y) - g_n(x)| \geq M_0 \cdot 1_K(x)1_{L^{-1}}(y^{-1})|\varphi(r(x))||g_n(y) - g_n(x)|$$

$$\geq M_0 \cdot 1_K(x)1_L(y)|\varphi(r(x))||g_n(y) - g_n(x)|$$

$$\overset{d(x)=d(y)}{\geq} a(y)1_K(x)|\varphi(r(x))||g_n(y) - g_n(x)|$$

Ținând cont și de relația (1) deducem că :

$$\lim_{n\to\infty} \int 1_K(x)\varphi(r(x))a(y)|g_n(y) - g_n(x)|d\nu_{d(x)}(y)d\nu(x) = 0$$

Pe de altă parte:

$$\left| \int 1_K(x)\varphi(r(x))|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu(x) \right| \leq$$

$$\leq \int 1_K(x)|\varphi(r(x))|\left|\int a(y)g_n(x)d\nu_{d(x)}(y) - \int a(y)g_n(y)d\nu_{d(x)}(y)\right|d\nu(x)$$

$$\leq \int 1_K(x)|\varphi(r(x))|\int a(y)|g_n(y)-g_n(x)|d\nu_{d(x)}\,d\nu(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ .$$

Dacă $\lambda' = \int \delta_u \times \beta^u \, d\mu(u)$ este o dezintegrare a probabilității λ' relativ la proiecția pe prima componentă, atunci la fel ca în demonstrația propoziției 4.1.4. rezultă că $\nu^u = \int \nu_{u,v} q(u,v)d\beta^u(v)$ a.p.t..

Pentru μ-a.p.t. $u \in U_G$ avem:

$$h_n(u) = \int a(y^{-1})g_n(y^{-1})d\nu^u(y) = \int\int a(y^{-1})g_n(y^{-1})d\nu_{u,v}(y)q(u,v)d\beta^u(v)$$

$$= \int\int a(y)g_n(y)\delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)q(u,v)d\beta^u(v)$$

$$= \int\int a(y)g_n(y)\Delta(y^{-1})\frac{q(r(y),d(y))}{q(d(y),r(y))}d\nu_{v,u}(y)q(u,v)d\beta^u(v)$$

$$= \int\int a(y)g_n(y)\Delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)q(v,u)d\beta^u(v)$$

$$= \int\int \left(b(y)\Big/\int b(x)d\nu_{d(y)}(x)\right)g_n(y)\Delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)q(v,u)d\beta^u(v)$$

$$\leq \sup_{y\in U}\Delta(y)\cdot\int\int \left(1\Big/\int b(x)d\nu_{d(y)}(x)\right)g_n(y)d\nu_{v,u}(y)q(v,u)d\beta^u(v)$$

$$\leq \sup_{y\in U}\Delta(y)\cdot\left(1\Big/\int b(x)d\nu_u(x)\right)\int\int g_n(y)d\nu_{v,u}(y)q(v,u)d\beta^u(v)$$

Deoarece $g_n \in L^\infty(E, L^1(G,\nu))_1$ rezultă că pentru orice $u \in U_G$ există

$$M(u) = \sup_{y\in U}\Delta(y)\cdot\left(1\Big/\int b(x)d\nu_u(x)\right)$$

astfel încât $h_n(u) \leq M(u) < \infty$ $(\forall)$ n μ-a.p.t. şi astfel încât $u \mapsto M(u)$ să fie o funcție continuă . ■

Observație 4.3.3. Mărginirea funcției modulare pe o vecinătate a spațiului unităților a fost utilizată doar pentru a demonstra proprietatea 2) din propoziția de mai sus .

Teoremă 4.3.4 (Theorem 13 [19]). Dacă grupoidul G are μ-aproape toate grupurile de izotropie necompacte şi dacă funcția modulară Δ este mărginită pe o vecinătate simetrică a spațiului unităților U_G, atunci pentru orice medie aproximativă complet invariantă $(g_n)_n$ normalizată ($\| g_n \|_{r,d} = 1$ pentru orice n) există un subşir al şirului $(g_n)_n$ (notat tot $(g_n)_n$) astfel încât pentru orice mulțime compactă $K \subset G$ şi orice funcție $\varphi \in L^1(U_G)$ avem :

$$\lim_{n\to\infty}\int 1_K(x)\varphi(r(x))g_n(x)d\nu(x)=0 \ .$$

Demonstrație . Din propoziția anterioară rezultă că pentru orice mulțime compactă $K \subset G$ şi orice funcție $\varphi \in L^1(U_G)$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi(u)\int 1_K(x)\Delta(x)\left|g_n(x)-h_n(d(x))\right|d\nu_u(x)d\mu(u)=0$$

Luăm $\varphi = 1$. Pentru fiecare mulțime compactă K există un subşir astfel încât :

$$\lim_{i\to\infty}\int 1_K(x)\Delta(x)\left|g_{n_i}(x)-h_{n i}(d(x))\right|d\nu_u(x)=0 \ \ \mu-\text{a.p.t.}$$

Fie $(K_n)_n$ un şir crescător de compacte cu $\bigcup_n K_n = G$. Pentru fiecare număr natural m >0 există n_m astfel încât:

$$\int 1_{K m}(x)\Delta(x)\left|g_{n_m}(x)-h_{n m}(d(x))\right|d\nu_u(x)<\frac{1}{m} \ \ \mu-\text{a.p.t.} \ .$$

Deoarece pentru fiecare mulțime compactă K există K_m cu $K \subset K_m$ rezultă că

$$\lim_{m\to\infty}\int 1_K(x)\Delta(x)\left|g_{n_m}(x)-h_{n m}(d(x))\right|d\nu_u(x)=0 \ \ \mu-\text{a.p.t.} \ (\forall)K \ .$$

Renotăm subşirurile obținute cu $(g_n)_n$, respectiv $(h_n)_n$. Pentru μ-a.p.t. $u \in U_G$ şirul $(h_n(u))_n$ este un şir mărginit , deci admite un şir convergent pe care îl notăm tot cu $(h_n(u))_n$. Pentru u fixat notăm $l = \lim_{n\to\infty} h_n(u)$. Atunci ținând cont şi de dezintegrarea utilizată în demonstrația propoziției anterioare avem :

$$h_n(u)\int 1_K(x)\Delta(x)d\nu_u(x) = \int 1_K(x)\Delta(x)h_n(d(x))d\nu_u(x) \le$$

$$\le \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) + \int 1_K(x)\Delta(x)\, g_n(x)d\nu_u(x)$$

$$\le \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) + \int 1_K(x^{-1})\Delta(x^{-1})\, g_n(x^{-1})d\nu^u(x)$$

$$\le \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) +$$

$$+ \int\int 1_K(x^{-1})\Delta(x^{-1})\, g_n(x^{-1})d\nu_{u,v}(x)q(u,v)d\beta^u(v)$$

$$\le \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) +$$

$$+ \int\int 1_K(x)\Delta(x)\, g_n(x)\delta(x^{-1})d\nu_{v,u}(x)q(u,v)d\beta^u(v)$$

$$\le \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) +$$

$$+ \int\int 1_K(x)\, g_n(x)d\nu_{v,u}(x)q(v,u)d\beta^u(v)$$

$$\le \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) + \| g_n \|_{r,d}$$

$$= \int 1_K(x)\Delta(x)|g_n(x) - h_n(d(x))|d\nu_u(x) + 1 \quad .$$

Trecând la limită obținem

$$l \cdot \int 1_K(x)\Delta(x)d\nu_u(x) \le 1 \ (\forall)K \iff l \cdot \int\int 1_K(x)d\nu_{v,u}(x)q(v,u)d\beta^u(v) \le 1 \ .$$

Dacă $l \neq 0$ atunci $(\forall)K \Rightarrow \int\int 1_K(x)d\nu_{v,u}(x)q(v,u)d\beta^u(v) \le (1/l) \Rightarrow$

$$\int\int 1\, d\nu_{v,u}(x)q(v,u)d\beta^u(v) \le (1/l) \Rightarrow \int 1\, d\nu_{v,u} < \infty \ \beta^u\text{–a.p.t.} \ .$$

Fie $v \sim u$ cu $\int 1\, d\nu_{v,u} < \infty$, şi $z \in G$ astfel încât r(z) = u şi d(z) = v . Atunci din

$$\int 1\, d\nu_{u,u}(x) = \int 1(zx)d\nu_{d(z),u} = \int 1\, d\nu_{v,u}(x) < \infty$$

rezultă că grupul de izotropie G_u^u compact , ceea ce reprezintă o contradicție cu ipoteza. Deci $l = 0$ Am demonstrat că orice punct limită al şirului $(h_n(u))_n$ este egal cu 0, deci că $\lim_{n\to\infty} h_n(u) = 0$. Din

$$|\varphi(r(x))| 1_K(x)\, h_n(d(x)) \le |\varphi(r(x))| 1_K(x) M(d(x)) \le |\varphi(r(x))| 1_K(x) \sup_{d(K)} M \text{ a.p.t.}$$

aplicând teorema de convergență dominată a lui Lebesgue rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int 1_K(x)\varphi(r(x)) h_n(d(x)) d\nu(x) = 0 \ .$$

Trecând la limită în următoarea inegalitate :

$$\left| \int 1_K(x)\varphi(r(x)) g_n(x) d\nu(x) \right| \le$$

$$\le \int |\varphi(r(x))| 1_K(x) \, |g_n(x) - h_n(d(x))| d\nu(x) + \int |\varphi(r(x))| 1_K(x)\, h_n(d(x)) d\nu(x)$$

obținem concluzia teoremei . ■

<u>*Teoremă 4.3.5 (Theorem 14 [19]).*</u> Fie grupoidul local-compact amenabil (G,ν,μ) cu μ-aproape toate grupurile sale de izotropie necompacte şi cu funcția modulară Δ mărginită pe o vecinătate simetrică a spațiului unităților U_G . Dacă m este o medie invariantă pentru G ce provine dintr-o medie aproximativă complet invariantă normalizată, atunci $m(f) = 0$ (în $L^\infty(U_G)$) pentru orice funcție $f : G \to \mathbf{C}$ continuă care se anulează la infinit .

Demonstrație. Fie $(g_n)_n$ o medie aproximativă complet invariantă normalizată astfel încât $\lim_{n\to\infty} m_{g_n} = m$ în $B_{L^\infty(U_G)}\left(L^\infty(G), L^\infty(U_G)\right)$ înzestrat cu topologia *-slabă. Atunci din teorema precedentă rezultă că pentru orice mulțime compactă $K \subset G$ şi orice funcție $\varphi \in L^1(U_G)$ să avem:

$$\lim_{n\to\infty} \int 1_K(x)\varphi(r(x)) g_n(x) d\nu(x) = 0$$

Fie $f : G \to \mathbf{C}$ o funcție continuă care se anulează la infinit, fie $\varepsilon > 0$, şi fie $K_\varepsilon \subset G$ o mulțime compactă aleasă astfel încât $\sup_{x\in G-K_\varepsilon} |f(x)| < \varepsilon$. Pentru orice $\varphi \in L^1(U_G)$, din inegalitățile:

$$\left|\int f(x)\varphi(r(x))g_n(x)d\nu(x)\right| \leq$$

$$\leq \int 1_{K_\varepsilon}(x)|f(x)||\varphi(r(x))|g_n(x)d\nu(x) + \int 1_{G-K_\varepsilon}(x)|f(x)||\varphi(r(x))|g_n(x)d\nu(x)$$

$$\leq \left(\sup_{x\in K_\varepsilon}|f(x)|\right)\int 1_{K_\varepsilon}(x)|\varphi(r(x))|g_n(x)d\nu(x) + \varepsilon\underbrace{\int 1_{G-K_\varepsilon}(x)|\varphi(r(x))|g_n(x)d\nu(x)}_{\leq\|\varphi\|_1}.$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\int f(x)\varphi(r(x))g_n(x)d\nu(x) = 0$ <=> $\langle m_{g_n}(f), \varphi\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$ =>

$\langle m(f), \varphi\rangle = 0$. ■