5. C^*-ALGEBRE ASOCIATE GRUPOIZILOR

Subcapitolul 5.1 este dedicat prezentării construcțiilor C^* - algebrei şi C^* - algebrei reduse asociate unui grupoid, precum şi a corespondenței care există între reprezentările unitare ale grupoidului şi reprezentările nedegenerate ale C^* - algebrei. Demonstrațiile acestor rezultate se găsesc în [68] şi [56]. Definiția C^*-algebrei depinde de alegerea unui sistem Haar pe grupoid. Dar definiția unei reprezentări pe grupoid nu depinde. În cazul grupurilor măsura Haar este esențial unică, dar în cazul general al grupoizilor, sistemele Haar nu sunt unice. În 5.2 sunt expuse rezultate legate de "independența" C^*-algebrei de sistemul Haar ales. Subcapitolul 5.1 se încheie cu un rezultat din [1] care stabileşte că pentru un grupoid măsurabil amenabil C^* - algebra şi C^* -algebra redusă coincid. În 5.4 se studiază reciproca acestui rezultat. În subcapitolul 5.5 se introduce o noțiune de amenabilitate pentru reprezentările unui grupoid, şi se studiază legătura din amenabilitatea reprezentărilor şi cea a grupoidului. În ultimul subcapitol sunt expuse noțiunile de C^*-sistem grupoidal şi C^*-algebră asociată introduse de Masuda în [52].

5.1. C^*- ALGEBRA ŞI C^*- ALGEBRA REDUSĂ ASOCIATE UNUI GRUPOID LOCAL COMPACT

Construcția C^* -algebrei asociate unui grupoid extinde construcția din cazul grupurilor local-compacte: spațiul $C_c(G)$ al funcțiilor continue cu suport compact este transformat în $*$-algebră şi înzestrat cu cea mai mică C^* -normă pentru care toate reprezentările devin continue; C^* (G) se obţine prin completarea acestui spaţiu.

Ca şi în cazul grupurilor există o corespondenţă între reprezentările unitare ale grupoidului şi reprezentările C^* -algebrei asociate. Spre deosebire de grupuri, care se reprezintă pe spaţii Hilbert, grupoizii se reprezintă pe fibrate Hilbert. Un *fibrat* este reuniunea disjunctă a unei familii de spaţii vectoriale. Pentru a defini un fibrat (vectorial) presupunem că V = $\{V(x)\}_{x \in X}$ este o familie de spaţii vectoriale indexată după o mulţime X, şi considerăm mulţimea

$$X * V' = \{(x, \xi) : \xi \in V(x)\}.$$

Evident, X$*$V este reuniunea disjunctă a spaţiilor de forma $\{x\} \times V(x)$ care de obicei vor fi identificate cu V(x). Fie $\pi : X * V \to X$ proiecţia definită prin $\pi(x, \xi) := x$. Numim X$*$ V sau perechea (X$*$ V , π) fibrat (vectorial) peste X. Pentru fiecare x în X, spaţiul V(x), care se identifică cu $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times V(x)$, se numeşte fibra în x. Se observă că dacă toate spaţiile V(x) coincid cu un spaţiu fixat V, atunci X$*$V coincide cu $X \times V$, iar fibra în fiecare punct este o copie a lui V. Un astfel de fibrat este numit *trivial*. O *secţiune* a unui fibrat vectorial, sau un câmp vectorial, este o aplicaţie $f : X \to X*V$ astfel încât $\pi(f(x)) = x \in X$. Secţiunile fibratului X$*$V sunt strâns legate de elementele produsului cartezian

$$\prod_{x \in X} V(x) = \left\{ \phi : X \to \bigcup_{x \in X} V(x) \ : \ \phi(x) \in V(x), (\forall) x \in X \right\}.$$

Într-adevăr, pentru o secţiune dată f, există un unic element $\hat{f} \in \prod_{x \in X} V(x)$ astfel încât $f(x) = (x, \hat{f}(x))$; şi pentru un element $\hat{f} \in \prod_{x \in X} V(x)$ aplicaţia f definită prin

$$f(x) = (x, \hat{f}(x))$$

constituie o secţiune. Datorită acestei legături strânse, de obicei vom scrie $\hat{f}(x)$ în loc $(x, \hat{f}(x))$. În cazul fibratului trivial $X \times V$ o secţiune f este în mod unic determinată de o funcţie $\hat{f} : X \to V$. Evident, secţiunile pot fi adunate (punctual) şi înmulţite cu scalari. Suntem interesați de secțiuni care sunt măsurabile sau continue, însă pentru aceasta este necesar ca fibratul să aibă o anumită structură. Este convenabil să descriem structura (măsurabilă sau topologică) a unui fibrat cu ajutorul unei mulțimi de secțiuni.

Definiție 5.1.1. Un *fibrat Hilbert* (*borelian*) *analitic* este un fibrat vectorial ($X*H$, π), unde fiecare spațiu H(x) este un spațiu Hilbert şi unde $X*H$ este înzestrat cu structură boreliană analitică care îndeplineşte următoarele condiții :

(1) O submulțime E a lui X este boreliană dacă şi numai dacă $\pi^{-1}(E)$ este boreliană.

(2) Există un şir de secțiuni $(f_n)_{n\geq 1}$, numit şir fundamental, astfel încât

(a) fiecare funcție $\tilde{f}_n$: $X*H \to C$, definită prin

$$\tilde{f}_n(x,\xi)=(f_n(x),\xi)_{H(x)}$$

este boreliană ;

(b) pentru orice pereche de secțiuni fundamentale, f_n şi f_m , funcția

$$x \mapsto (f_n(x), f_m(x))_{H(x)}$$

este boreliană ;

(c) funcțiile $\{\tilde{f}_n , n\geq 1\}$ împreună cu π separă punctele lui $X*H$.

Dacă structura boreliană este standard vom spune că fibratul este fibrat Hilbert borelian standard .

În cazul unui fibrat Hilbert $X*H$ nu vom mai scrie indicele H(x) de la produsul scalar.

Următorul rezultat (enunțat în [56] - Proposition 3.2/pg. 56) stabileşte condițiile pe care trebuie să le îndeplinească un şir de secțiuni ale unui fibrat pentru a determina structura boreliană a fibratului .

Propoziție 5.1.2. Dacă X este un spațiu borelian analitic, H este o familie de spații Hilbert indexată după X, şi $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de secțiuni care satisface condițiile 2.(b) şi 2.(c) din definiția 5.1.1, atunci există o unică structură boreliană pe X∗H astfel încât (X∗H , π) devine fibrat Hilbert analitic şi şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ devine şir fundamental pentru acest fibrat .

Dacă structura boreliană de pe X este standard, atunci şi structura indusă pe X∗H este standard.

Observații 5.1.3. 1. Dacă (X∗H , π) este un fibrat Hilbert analitic cu un şir fundamental de secțiuni $(f_n)_{n\geq 1}$, atunci o secțiune f : X → X∗H este boreliană dacă şi numai dacă funcția

$$x \mapsto (f(x), f_n(x)) \, [:X \to C]$$

este boreliană pentru orice n .

2. Pentru orice x ∈ X, fibra H(x) este spațiul închis generat de vectorii $f_n(x)$ (aceasta este o consecință a condiției 2.(c) din definiția 5.1.1)

Notăm cu B(X∗H) spațiul secțiunilor boreliene ale fibratului Hilbert analitic (X∗H, π). Spațiul B(X∗H) este un modul peste spațiul B(X) al funcțiilor boreliene definite pe X cu valori complexe:

$$(\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x) = (x , \varphi(x)\hat{f}(x)) ,$$

φ ∈ B(X), şi f ∈ B(X∗H).

Aplicând procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt familiei de vectori $\{f_n(x), n \geq 1\}$ şi eliminând vectorii egali cu zero obținem o bază ortonormată în fiecare spațiu H(x), x ∈ X. Utilizând o astfel de ortonormalizare şi identitatea lui Parseval, se demonstrează că pentru orice secțiune boreliană f, funcția cu valori reale

$$x \mapsto \| f(x) \|$$

este boreliană.

Definiție 5.1.4. Pentru un fibrat Hilbert analitic (X∗H , π) şi o măsură μ pe X, notăm cu $L^2(X, H\ \mu)$ sau $\int_X^{\oplus} H(x) d\mu(x)$ mulțimea

$$\left\{ f \in B(X * H) : \int \| f(x) \|^2 \, d\mu(x) < \infty \right\}$$

şi numim această mulţime *spaţiul secţiunilor de pătrat integrabil* ale fibratului X∗H, sau *integrala directă* a lui X∗H .

Evident, acest spaţiu este un spaţiu Hilbert cu produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int \langle f(x), g(x) \rangle \, d\mu(x), \quad f, g \in L^2(X, H \ \mu) \ .$$

Mai general, pentru $1 \le p < \infty$, notăm cu $L^p(X, H \ \mu)$ mulţimea

$$\left\{ f \in B(X * H) : \int \| f(x) \|^p \, d\mu(x) < \infty \right\}$$

care este spaţiu Banach relativ la norma $\| f \|_p = \left(\int \| f(x) \|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$. Notăm cu $L^\infty(X, H \ \mu)$ spaţiul Banach

$$\left\{ f \in B(X * H) : x \mapsto \| f(x) \| \in L^\infty(X, \mu) \right\}$$

înzestrat cu norma $\| f \|_\infty = \left\| \ x \mapsto \| f(x) \|_{H(x)} \ \right\|_\infty$.

<u>*Observaţie 5.1.5.*</u> În definiţia de mai sus se consideră identificate funcţiile care coincid μ-a.p.t.. Dacă măsura μ se subînţelege ea va fi omisă din notaţii.

Este demonstrat în [1] (Proposition A.3.9 /pg. 120) că $L^\infty(X, H \ \mu)$ poate fi identificat cu dualul spaţiului Banach $L^1(X, H \ \mu)$ prin intermediul formei biliniare

$$L^\infty(X, H, \mu) \times L^1(X, H, \mu) \ni (\varphi, f) \mapsto \int_X \langle \varphi(x), f(x) \rangle_{H(x)} \, d\mu(x) \ .$$

<u>*5.1.6. Exemple de fibrate Hilbert analitice*</u>

1. Fie $X \times H$ un fibrat trivial, cu H spaţiu Hilbert separabil şi X un spaţiu analitic. Structura boreliană este structura boreliană produs, unde pe H se consideră structura boreliană determinată de topologia slabă sau topologia normei - pentru spaţii separabile cele două coincid. Secţiunile acestui fibrat se identifică cu funcţii definite pe X cu valori în H. Pe post de şir fundamental putem alege un şir de funcţii $(f_n)_{n \ge 1}$ definite pe X cu valori în H, care separă punctele lui X şi pentru care spaţiul

închis generat de vectorii de forma $f_n(x)$ este H, pentru orice x . Mai general, să presupunem că X este reuniunea disjunctă a unei familii de submulțimi boreliene nevide, $X=\bigcup_n X_n$, şi că pentru orice n se dă un spațiu Hilbert H_n . Atunci X∗H = $\bigcup_n X_n \times H_n$ înzestrat cu o structura boreliană şi un şir fundamental evidente devine fibrat Hilbert analitic.

2. Fie (X , λ) un spațiu analitic cu probabilitate, fie ν o măsură σ-finită pe X care este echivalentă cu λ, şi P = $d\nu/d\lambda$. Fie Y un spațiu borelian numărabil generat, π : X → Y o aplicație boreliană surjectivă şi μ = π∗(λ). Considerăm $\nu=\int \nu_y \, d\mu(y)$ o π-dezintegrare a lui ν. Dacă luăm H(y) = $L^2(\nu_y)$ obținem un fibrat Y∗H peste Y. Structura boreliană pe Y∗H este dată de un şir $(f_n)_{n\geq 1}$ de secțiuni definit după cum urmează. Alegem un şir de funcții boreliene nenegative mărginite pe X , $(g_n)_{n\geq 1}$, care separă punctele. Definim f_n : X → Y∗H prin

$$f_n(y)=(y,\hat{f}_n(y)) \text{ , unde } \hat{f}_n(y)(x) = g_n(x)P^{-1/2}(x) \ , \ x\in\pi^{-1}(y) .$$

Acest şir de secțiuni verifică 2.(b) şi 2.(c) din definiția 5.1.1 , şi deci există o unică structură boreliană analitică pe Y∗H care îl transformă în fibrat Hilbert analitic .

Mai mult, aplicația $W : L^2(X,\nu) \to \int_Y^{\oplus} \mathsf{H}(y)d\mu(y)$, definită prin

$$(W\xi)(y)(x) = \begin{cases} \xi(x), & x\in\pi^{-1}(y) \\ 0 \quad , & x\notin\pi^{-1}(y) \end{cases}$$

este un izomorfism de spații Hilbert .

3. Fie G un grupoid topologic local-compact (cu bază numărabilă) care admite un sistem Haar (continuu) $\{\nu^u \ , u\in U_G\}$. Fie $\mathsf{H}(u)=L^2(\nu^u)$, $u\in U_G$. Fibratul obținut se notează cu $U_G * L^2(\{\nu^u\})$. Structura boreliană pe $U_G * L^2(\{\nu^u\})$ este determinată de un şir de secțiuni $(\xi_n)_{n\geq 1}$ definit după cum urmează. Dacă $(f_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcții din $C_c(G)$ care separă punctele definim ξ_n : $U_G \to U_G * L^2(\{\nu^u\})$ prin formula

$$\hat{\xi}_n(u)(x)=f_n(x) \quad , \quad x\in G^u \quad .$$

Şirul $(\xi_n)_{n\geq 1}$ satisface condiţiile 2.(b) şi 2.(c) din definiţia 5.1.1, şi în consecinţă există o unică structură boreliană analitică pe $U_G * L^2(\{\nu^u\})$-de fapt această structură este standard - care-l transformă în fibrat Hilbert analitic peste U_G .

Definiţie 5.1.7. Fie două fibrate Hilbert analitice $X_i * H_i$ i = 1,2. Se numeşte *aplicaţie de fibrate* o pereche (τ ,T), unde $\tau : X_1 \to X_2$ este o aplicaţie boreliană iar $T: X_1 * H_1 \to X_2 * H_2$ este de asemenea o aplicaţie boreliană , astfel încât pentru fiecare x $\in X_1$, există o aplicaţie liniară $\hat{T}(x)$: $H_1(x) \to H_2(\tau(x))$ cu proprietatea că

$$T(x,\xi)=\left(\tau(x),\hat{T}(x)\xi\right), \quad (\forall)(x,\xi)\in X_1 * H_1 \quad .$$

Se spune că aplicaţia T *acoperă* pe τ. Suntem în particular interesaţi de situaţia în care $X_1 = X_2 = X$, şi de aplicaţiile de fibrate care implică acoperiri ale aplicaţiei identice de pe X. Notăm mulţimea acestor aplicaţii cu $\mathrm{Hom}(X * H_1, X * H_2)$. Evident, acest spaţiu poate fi identificat cu spaţiul secţiunilor boreliene ale fibratului:

$$X * B(H_1, H_2) := \{(x,A) : x\in X, A\in B(H_1(x), H_2(x))\},$$

a cărui structură boreliană este determinată de aplicaţiile boreliene

$$(x,A) \mapsto (Af_{1,n}(x), f_{2,m}(x)) ,$$

pentru orice şir fundamental $(f_{i,n})_{n\geq 1}$ corespunzător fibratului $X * H_i$, i = 1,2. Structura boreliană de pe $X * B(H_1, H_2)$ este standard dacă fiecare dintre cele două fibrate este standard. O secţiune boreliană mărginită a acestui fibrat, A, dă naştere unui operator decompozabil de la $\int_X^{\oplus} H_1(x)d\mu(x)$ la $\int_X^{\oplus} H_2(x)d\mu(x)$ care va fi notat tot cu A:

$$A\xi(x)=\hat{A}(x)\xi(x) \ , \ \xi\in\int_X^{\oplus} H_1(x)d\mu(x)$$

Aceşti operatori comută cu operatorii de înmulţire cu funcţii din $L^\infty(X,\mu)$. Reciproc, orice operator care comută cu operatorii de înmulţire cu funcţii din $L^\infty(X,\mu)$ este dat de o secțiune boreliană mărginită a fibratului $X*B(H_1, H_2)$, i.e. o secțiune A astfel încât $\sup_x \left\| \hat{A}(x) \right\|$ este finit ([55]).

Definiție 5.1.8. Un izomorfism (care păstrează fibrele) de la fibratul Hilbert analitic $X*H_1$ la fibratul $X*H_2$ este o secțiune boreliană V a lui $X*B(H_1, H_2)$ astfel încât $\hat{V}(x)$ este un izomorfism de spații Hilbert pentru orice x . Două fibrate Hilbert analitice peste același spațiu se numesc izomorfe dacă există un izomorfism (care păstrează fibrele) între ele.

Următorul rezultat, enunțat în [56] (3.9 /pg. 62), arată că orice fibrat Hilbert analitic este izomorf cu unul de tipul prezentat în exemplul 5.1.6.1 .

Propoziție 5.1.9. Fiind dat un fibrat Hilbert analitic X*H , considerăm mulțimile

$$X_n = \{ x : \dim(H(x)) = n \}, \quad n = 1,2,3,...,\infty$$

și pentru fiecare n fixăm un spațiu Hilbert H_n de dimensiune n. Atunci X*H este izomorf cu $\bigcup_{n \in \{1,2,...,\infty\}} X_n \times H_n$.

Definiție 5.1.10. Fiind dat un fibrat X*H, se notează cu Iso(X*H) mulțimea

$$\{ (x, V, y) : \quad V: H(y) \to H(x) \text{ este un izomorfism de spații Hilbert} \}$$

înzestrată cu cea mai slabă structură boreliană cu proprietatea că aplicațiile

$$(x, V, y) \mapsto (Vf_n(y), f_m(x))$$

sunt boreliene pentru orice n și m, unde este $(f_n)_n$ un șir fundamental pentru X*H.

Este ușor de observat că Iso(X*H) este un grupoid analitic cu structura definită astfel:

$$\mathrm{Iso}(X*H)^{(2)} = \{((x, V, y), (t, W, z)) : y = t\}$$

$$(x, V, y)(y, W, z) := (x, V \circ W, z)$$

$$(x, V, y)^{-1} := (y, V^{-1}, x)$$

De fapt grupoidul Iso(X∗H) este grupoidul din exemplul 1.2.8 asociat aplicaţiei π : X∗H $\to$ X. Spaţiul unităţilor acestui grupoid se identifică în mod natural cu X.

Propoziţie 5.1.11. Dacă fibratul Hilbert analitic X∗H este izomorf cu $\bigcup_n X_n \times H_n$, unde X este reuniunea disjunctă a mulţimilor X_n şi H_n este un spaţiu Hilbert separabil pentru orice n, atunci Iso(X∗H) este izomorf cu $\bigcup_n X_n \times \mathsf{U}(H_n) \times X_n$, unde $\mathsf{U}(H_n)$ este grupul borelian al operatorilor unitari pe H_n înzestrat cu structura boreliană determinată topologia operatorială slabă, şi $X_n \times \mathsf{U}(H_n) \times X_n$ este grupoidul trivial de grup $\mathsf{U}(H_n)$ înzestrat cu structura boreliană produs.

Definiţie 5.1.12. Fie G un grupoid topologic local-compact înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. O *reprezentare* a lui G (şi a sistemului Haar ν) este un triplet, $(\mu, U_G * \mathsf{H}$, L), unde μ este o măsură cvasi invariantă pe U_G, $U_G * \mathsf{H}$ este un fibrat Hilbert analitic peste U_G, şi $L : G \to$ Iso($U_G * \mathsf{H}$) este un morfism borelian de grupoizi a cărui restricţie la U_G este aplicaţia identică (dacă se identifică $U_{\mathrm{Iso}(U_G * \mathsf{H})}$ cu U_G). În consecinţă,

$$L(x)=\left(r(x),\hat{L}(x),d(x)\right),$$

unde $\hat{L}(x)$: $\mathsf{H}(d(x)) \to \mathsf{H}(r(x))$ este un izomorfism de spaţii Hilbert .

Observaţie 5.1.13. Vom slăbi uneori condiţiile pe care trebuie să le satisfacă o reprezentare a unui grupoid, cerând doar să fie un morfism a.p.t. de grupoizi de la G la grupoidul izomorfismelor fibratului Hilbert . Deci, o reprezentare va consta într-o măsură cvasi invariantă μ, un fibrat Hilbert analitic $U_G * \mathsf{H}$ peste U_G, o submulţime $U \subset U_G$, măsurabilă, de complementară nulă, şi o aplicaţie boreliană, $L : G|_U \to \mathrm{Iso}\left(\left(U_G * \mathsf{H}\right)|_U\right)$, unde $\left(U_G * \mathsf{H}\right)|_U$ reprezintă restricţia lui $U_G * \mathsf{H}$ la U, astfel încât

1. Pentru orice $x \in G$ există $\hat{L}(x): \mathcal{H}(d(x)) \to \mathcal{H}(r(x))$ un izomorfism de spaţii Hilbert astfel încât
$$L(x) = \left(r(x), \hat{L}(x), d(x)\right) \text{ pentru } \nu\text{-a.p.t. } x \in G|_U \ ;$$
2. $\hat{L}(u) = I_u$, operatorul identic pe H(u), pentru μ-a.p.t. $u \in U$;
3. $\hat{L}(x)\hat{L}(y) = \hat{L}(xy)$ $\nu^{(2)}$ - a.p.t. $(x, y) \in G^{(2)}$;
4. $\hat{L}(x)^{-1} = \hat{L}(x^{-1})$ ν-a.p.t $x \in G$.

($\nu = \int \nu^u d\mu(u)$, $\nu_u = (\nu^u)^{-1}$ este imaginea lui ν^u prin aplicaţia $x \mapsto x^{-1}$, şi $\nu^{(2)} = \int \nu_u \times \nu^u d\mu(u)$)

Din teorema 5.1/pg. 283 [62] rezultă că există o reprezentare a lui G care coincide ν-a.p.t cu L.

<u>Definiţie 5.1.14.</u> Două reprezentări $(\mu_i, U_G * \mathcal{H}_i, L_i)$, i = 1,2, se numesc echivalente dacă $\mu_1 \sim \mu_2$ şi există un izomorfism (care respectă fibrele) de fibrate Hilbert analitice
$$V : (U_G * \mathcal{H}_1)|_U \to (U_G * \mathcal{H}_2)|_U \ ,$$
unde U este o submulţime măsurabilă de complementară nulă a lui U_G , izomorfism care are proprietatea că $\hat{V}(r(x))\hat{L}_1(x) = \hat{L}_2(x)\hat{V}(d(x))$ pentru $x \in G|_U$.

Prezentăm pe scurt construcţiile C^* - algebrei şi C^* -algebrei reduse asociate unui grupoid, construcţii care se găsesc în [68] şi [56]. Fixăm un sistem Haar (continuu), $\{\nu^u, u \in U_G\}$, pe grupoidul G. Definim o structură algebrică involutivă pe $C_c(G)$ prin formulele:
$$f * g(y) = \int f(x) g(x^{-1}y) d\nu^{r(y)}(x) = \int f(yx) g(x^{-1}) d\nu^{d(y)}(x) \ ,$$
$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})} \ ,$$

f, g $\in C_c(G)$. Cu aceste operații, $C_c(G)$ devine *-algebră topologică (relativ la topologia limită inductivă (Proposition 1.1 /pg 48 [68]).

Definiția 5.1.15. O *reprezentare* a algebrei $C_c(G)$ este un * –morfism continuu de la $C_c(G)$ la B(H), pentru un spațiu Hilbert H. Pe $C_c(G)$ se consideră topologia limită inductivă, iar pe B(H) topologia operatorială slabă.

Teoremă 5.1.16. Aplicația

$$f \mapsto \| f \| := \sup \{ \| \pi(f) \| : \pi \text{ este o reprezentare a algebrei } C_c(G) \}$$

ia valori finite şi defineşte o C^* -normă pe $C_c(G)$. În plus, avem $\| f \| \leq \| f \|_I$, unde

$$\| f \|_I = \max\left\{ \sup_u \int |f(x)| d\nu^u(x), \sup_u \int |f(x^{-1})| d\nu^u(x) \right\}$$

Algebra obținută prin completarea lui $C_c(G)$ în $\| \cdot \|$ este o C^* -algebră , notată prin $C^*(G)$ sau $C^*(G, \{\nu^u\})$, şi se numeşte C^* *-algebra asociată grupoidului G* (determinată de $\{\nu^u , u \in U_G\}$) .

Definiție 5.1.17. Fie G un grupoid topologic local-compact înzestrat cu un sistem Haar $\{\nu^u , u \in U_G\}$ şi μ o măsură cvasi invariantă pe U_G . Fie $\nu = \int \nu^u \, d\mu(u)$ şi ν^{-1} imaginea lui ν prin aplicația $x \mapsto x^{-1}$.

Pentru f $\in C_c(G)$, Ind μ(f) este un operator pe $L^2(\nu^{-1})$ definit prin formula

$$\operatorname{Ind}\mu(f)\xi(x) = \int f(y)\xi(y^{-1}x) d\nu^{r(x)}(y) = f * \xi(x)$$

(Se verifică uşor că $\| \operatorname{Ind}\mu(f) \| \leq \| f \|_I$ şi că Ind μ este o reprezentare a lui $C_c(G)$ în sensul definiției 5.1.15)

Ind μ se numeşte *reprezentarea indusă de μ* .

Observaţie 5.1.18. Fie $\nu_u = (\nu^u)^{-1}$ imaginea lui ν^u prin aplicaţia $x \mapsto x^{-1}$. Pentru f din $C_c(G)$, considerăm operatorul $\mathrm{Ind}_u(f): L^2(G, \nu_u) \to L^2(G, \nu_u)$ definit prin

$$\mathrm{Ind}_u(f)\xi(x) = \int f(y)\xi(y^{-1}x)d\nu^{r(x)}(y)$$

Se demonstrează că $\mathrm{Ind}\,\mu = \int_{U_G}^{\oplus} \mathrm{Ind}_u\, d\mu(u)$, şi că Ind μ este o reprezentare fidelă a lui $C_c(G)$, dacă supp(μ) = U_G .

Definiţie 5.1.19. C^* *-algebra redusă* a grupoidului G , notată $C^*_{red}(G)$ sau $C^*_{red}(G, \{\nu^u\})$ se obţine prin completarea algebrei $C_c(G)$ în norma

$$\| f \|_{red} = \sup\{\| \mathrm{Ind}_u(f) \|,\ u \in U_G\}$$

Din observaţia precedentă rezultă că $\| f \|_{red} = \| \mathrm{Ind}\,\mu(f) \|$ pentru orice măsură μ care are proprietatea că supp(μ)= U_G .

O construcţie care generalizează C^* -algebra redusă asociată unui grupoid se găseşte în [52] şi va fi prezentată în ultimul subcapitol al acestei lucrări.

Următoarele două teoreme descriu corespondenţa dintre reprezentările unui grupoid şi reprezentările C^* -algebrei asociate. Demonstraţiile se găsesc în [68] (capitolul II) şi în [56] (capitolul III).

Teorema 5.1.20. Fie $(\mu, U_G * \mathsf{H}, L)$ o reprezentare a grupoidului local-compact G înzestrat cu un sistem Haar continuu $\{\nu^u, u \in U_G\}$ cu proprietatea că supp $\nu^u = G^u$ pentru orice $u \in U_G$. Fie $\nu = \int \nu^u d\mu(u)$ şi Δ funcţia modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi măsurii μ. Pentru f din $C_c(G)$, ξ şi η din $\int_{U_G}^{\oplus} \mathsf{H}(u)d\mu(u)$ se defineşte o reprezentare a lui $C_c(G)$ pe $\int_{U_G}^{\oplus} \mathsf{H}(u)d\mu(u)$ prin

$$(L(f)\xi,\eta)=\int f(x)\left(\hat{L}(x)\xi(d(x),\eta(r(x)))\right)d\nu_0(x),$$

unde $\nu_0 := \Delta^{\frac{-1}{2}}\nu$. Inegalitatea $\|L(f)\| \le \|f\|_I$ este satisfăcută pentru orice $f \in C_c(G)$.

Reprezentări echivalente pe G induc reprezentări unitar echivalente pe $C_c(G)$.

Teorema 5.1.21. Fie H un spațiu Hilbert şi H_0 un subspațiu liniar dens. Presupunem că L este un morfism de la $C_c(G)$ la spațiul transformărilor liniare pe H_0, şi că sunt satisfăcute următoarele condiții:

(a) L este nedegenerată (i.e. spațiul generat de

$$\{\ L(f)\xi : f \in C_c(G)\ ,\ \xi \in H_0\ \}$$

este dens în H);

(b) Pentru orice ξ şi η din H_0 , funcționala $L_{\xi,\eta} : C_c(G) \to \mathbf{C}$, definită prin

$$L_{\xi,\eta}(f) = \langle \xi, L(f)\eta \rangle,$$

este continuă relativ la topologia limită inductivă pe $C_c(G)$;

(c) Pentru orice $f \in C_c(G)$ şi orice ξ , $\eta \in H_0$ rezultă

$$\langle \xi, L(f^*) \rangle = \langle L(f)\xi, \eta \rangle$$

Atunci fiecare L(f) este mărginit, şi deci se poate extinde la un operator, de asemenea notat L(f), pe întreg spațiul H. Aplicația $f \mapsto L(f)$ este o reprezentare a lui $C_c(G)$ pe H şi există o reprezentare , $(\mu, U_G * \mathsf{H}, U)$, a grupoidului G astfel încât L este unitar echivalentă cu reprezentarea (definită de teorema 5.1.20) indusă de $(\mu, U_G * \mathsf{H}, U)$ pe $C_c(G)$.

Observație 5.1.22. Dacă $(\mu, U_G * \mathsf{H}, L)$ este o reprezentare a grupoidului local-compact G înzestrat cu un sistem Haar$\{\nu^u, u \in U_G\}$, şi $f \mapsto L(f)$ este reprezentarea indusă pe $C_c(G)$ descrisă în 5.1.20 , atunci putem exprima L(f) explicit ca un operator pe $\int_{U_G}^{\oplus} \mathsf{H}(u)d\mu(u)$ prin formula :

$$(L(f)\xi)(u)=\int f(x)\hat{L}(x)\xi(d(x))\Delta^{-1/2}(x)d\nu^u(x) \ , \ \mu\text{- a.p.t} \ ,$$

$f \in C_c(G)$, $\xi \in \int_{U_G}^{\oplus} \mathsf{H}(u)d\mu(u)$. Mai mult, dacă $U_G * \mathsf{H}$ este izomorf cu fibratul trivial $U_G \times H$ printr-un izomorfism $V : U_G \times H \to U_G * \mathsf{H}$, $V(u,\xi)=(u,\hat{V}\xi)$, şi dacă $L_0 : G \to \mathsf{U}(H)$ este definit prin formula $L_0(x)=\hat{V}(r(x))L(x)\hat{V}(d(x))^{-1}$, atunci V, privit ca un izomorfism de spații Hilbert de la $\int_{U_G}^{\oplus} \mathsf{H}(u)d\mu(u)$ la $L^2(\mu,H)$, dă naştere următoarei egalități

$$(VL(f)V^{-1}\xi)(u)=\int f(x)L_0(x)\xi(d(x))\Delta^{-1/2}(x)d\nu^u(x)$$

pentru $f \in C_c(G)$, $\xi \in L^2(\mu,H)$.

<u>*Definiție 5.1.23.*</u> Fie G un grupoid topologic local-compact înzestrat cu un sistem Haar $\{\nu^u , u \in U_G\}$ şi μ o măsură cvasi invariantă pe U_G . *Reprezentarea regulată* (*la stânga*) a grupoidului G este reprezentarea (μ, $U_G * L^2(\{\nu^u\})$, L) unde

$$\hat{L}(x) : L^2(\nu^{d(x)}) \to L^2(\nu^{r(x)})$$

este definit prin formula

$$(\hat{L}(x)\xi(d(x)))(y)=\xi(x^{-1}y)$$

Reprezentarea indusă de (μ, $U_G * L^2(\{\nu^u\})$, L) pe $C_c(G)$ este numită *reprezentarea regulată la stânga* pe $C_c(G)$ (sau $C^*(G,\{\nu^u\})$) determinată de μ .

<u>*Observație 5.1.24.*</u> Dacă G este un grupoid topologic local-compact, $\{\nu^u , u \in U_G\}$ un sistem Haar pe G, μ o măsură cvasi invariantă pe U_G , $\nu=\int \nu^u d\mu(u)$ şi Δ funcția modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u , u \in U_G\}$ şi

măsurii μ, atunci reprezentarea regulată la stânga pe $C_c(G)$ şi Ind μ sunt unitar echivalente. Aplicaţia $W: L^2(\nu) \to L^2(\nu^{-1})$ definită prin formula $W\xi = \Delta^{1/2}\xi$ este un izomorfism de spaţii Hilbert care implementează echivalenţa celor două reprezentări (Proposition 1.10 /pg. 57 [68]).

Următoarele două rezultate au fost demonstrate de P. Muhly în [56] (2.37/pg. 51 şi 3.30/pg. 84), şi reprezintă caracterizarea C^*-algebrei şi C^*-algebrei reduse asociate unui grupoid trivial.

Propoziţie 5.1.25. Dacă $G = X \times X$ este grupoidul trivial pe spaţiul local compact Hausdorff cu bază numărabilă, X, şi dacă sistemul Haar $\{\nu^x, x \in X\}$ pe G este dat de $\nu^x = \delta_x \times \lambda$, unde λ este o măsură Radon pe X cu supp(λ) = X, atunci $C^*_{red}(G, \{\delta_x \times \lambda\})$ este izomorfă cu $\mathcal{K}(L^2(\lambda))$, spaţiul operatorilor compacţi pe $L^2(\lambda)$.

Demonstraţie. Avem $\| f \|_{red} = \sup\{\| \mathrm{Ind}_u(f)\|,\ u \in U_G\}$. Deoarece G este tranzitiv Ind_u este unitar echivalent cu Ind_v pentru orice u, v $\in$ X. Astfel $\| f \|_{red} = \| \mathrm{Ind}_u(f)\|$, pentru orice $u \in X$. Dar Ind_u acţionează pe $L^2(\nu^{-1})$, unde $\nu = \delta_u \times \lambda$, şi deci $\nu^{-1} = \lambda \times \delta_u$. Aplicaţia

$$W : L^2(\nu^{-1}) \to L^2(\nu), \quad (W\xi)(x) = \xi(x, u)$$

este un izomorfism de spaţii Hilbert care satisface $W\, \mathrm{Ind}_u(f)\, W^{-1} = \pi(f)$, unde $\pi(f)$ este un operator pe $L^2(\nu)$ definit prin formula $\pi(f)\xi(x) = \int f(x,y)\xi(y)d\lambda(y)$. ■

Propoziţie 5.1.26. Dacă $G = X \times X$ este grupoidul trivial pe spaţiul local compact Hausdorff cu bază numărabilă, X, şi dacă sistemul Haar $\{\nu^x, x \in X\}$ pe G este dat de $\nu^x = \delta_x \times \lambda$, unde λ este o măsură Radon pe X cu supp(λ) = X, atunci $C^*(G, \{\delta_x \times \lambda\})$ este izomorfă cu $\mathcal{K}(L^2(\lambda))$, spaţiul operatorilor compacţi pe $L^2(\lambda)$.

Demonstraţie. Fie π o reprezentare a lui $C^*(G, \{\delta_x \times \lambda\})$, şi fie $(\mu, U_G * \mathcal{H}, L)$ reprezentarea de pe G care o induce. Deoarece μ şi λ sunt echivalente, putem înlocui

μ cu λ. În acest caz măsura $\nu = \lambda \times \lambda$ este simetrică, şi deci, $\Delta \equiv 1$. Deoarece G este un grupoid tranzitiv şi (μ, $U_G * H$, L) este o reprezentare a lui G rezultă că fibratul $U_G * H$ este izomorf cu un fibrat trivial $U_G \times H$ (pentru orice reprezentare a unui grupoid, submulţimile lui U_G pentru care dim(H(u)) este constantă sunt invariante, iar pentru un grupoid tranzitiv singura submulţime nevidă invariantă lui U_G este chiar U_G). Din observaţia 5.1.22 rezultă că putem lua ca spaţiu Hilbert al reprezentării π spaţiul $L^2(\lambda, H)$ şi pentru $\xi \in L^2(\lambda, H)$, şi $f \in C_c(G)$, putem scrie

$$(\pi(f)\xi)(x) = \int f(x,y)(L_0(x,y)\xi)(y)d\lambda(y),$$

unde $L_0 : G \to U(H)$, este morfismul borelian determinat de L. Din propoziţia 1.4 rezultă că există o funcţie boreliană $\theta : X \to U(H)$ astfel încât $L_0(x, y) = \theta(x)\theta(y)^{-1}$, pentru orice $x,y \in X$. Dacă definim

$$W : L^2(\lambda, H) \to L^2(\lambda, H),\ (W\xi)(x) = \theta(x)^{-1}\xi(x),$$

atunci $(W\pi(f)W^{-1}\xi)(x) = \int f(x,y)\xi(y)d\lambda(y)$. Astfel π, restricţionată la $C_c(G)$, este unitar echivalentă cu un multiplu al reprezentării canonice a lui $C_c(G)$ pe $L^2(\lambda)$. Aceasta arată că $C^*(G,\{\delta_x\times\lambda\})$ este izomorfă cu $\mathcal{K}(L^2(\lambda))$. ■

Se observă egalitatea C^*-algebrei şi C^*-algebrei reduse asociate unui grupoid trivial. Există o clasă de grupoizi pentru care se întâmplă acest lucru, şi anume grupoizii măsurabil amenabili. Prezentăm mai departe elementele necesare pentru stabilirea acestui rezultat.

__Definiţie 5.1.27.__ Fie $(\mu, U_G * \mathcal{H}$, L) o reprezentare a grupoidului local-compact G înzestrat cu sistemul Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi probabilitatea cvasi invariantă μ. Pentru secţiunile măsurabile mărginite ξ, $\eta \in \int_{U_G}^{\oplus} \mathcal{H}(u)d\mu(u)$, definim funcţia $(\xi, \eta) : G \to \mathbf{C}$ prin

$$(\xi,\eta)(x) := \left\langle \xi(r(x)), \hat{L}(x)\eta(d(x)) \right\rangle.$$

O astfel de funcție se numeşte *coeficient al reprezentării* $(\mu, U_G * \mathsf{H}$, L).

<u>*Observație 5.1.28.*</u> În [71] este demonstrat că mulțimea coeficienților formează o subalgebră involutivă a lui $L^\infty(G)$, numită *algebra Fourier-Stieltjes*, B(G,$\{\nu^u\}$,μ), a grupoidului cu măsură $\left(G,\left[\int \nu^u\, d\mu(u)\right]\right)$.

<u>*Exemple 5.1.29.*</u>

1. Fie K un spațiu Hilbert separabil. Reprezentarea trivială de multiplicitate K este dată de fibratul trivial $U_G \times K$ şi $\hat{L}(x)=I_K$, aplicația identică pe spațiul K, pentru orice $x \in G$. Coeficienții ei sunt de forma $\varphi(x)=\langle \xi(r(x)), \eta(d(x))\rangle$, cu ξ, η aplicații măsurabile mărginite definite pe U_G cu valori în K. Reprezentarea trivială se notează cu T sau cu T_μ, dacă este necesar să specificăm μ.

2. Dacă $(\mu, U_G * L^2(\{\nu^u\})$, L) este reprezentarea regulată la stânga a grupoidului $\left(G,\left[\int \nu^u\, d\mu(u)\right]\right)$, atunci coeficienții ei sunt de forma $(\xi,\eta)(x)=\int \overline{\hat{\xi}(y)}\hat{\eta}(x^{-1}y)d\nu^{r(x)}(y)$, cu ξ, η secțiuni boreliene mărginite ale fibratului $U_G * L^2(\{\nu^u\})$. Reprezentarea regulată se notează cu Reg sau cu Reg_μ. Mulțimea coeficienților reprezentării regulate formează un ideal involutiv al algebrei B(G,$\{\nu^u\}$,μ), numit *algebra Fourier* A(G) a grupoidului cu măsură $\left(G,\left[\int \nu^u\, d\mu(u)\right]\right)$.

<u>*Definiție 5.1.30.*</u> $\left(G,\left[\int \nu^u\, d\mu(u)\right]\right)$ un grupoid cu măsură şi $\nu=\int \nu^u\, d\mu(u)$. Considerăm următoarea normă pe G:

$$\| f \|_I = \max\left\{ \left\| u \mapsto \int |f(x)| d\nu^u(x) \right\|_\infty ,\ \left\| u \mapsto \int |f(x^{-1})| d\nu^u(x) \right\|_\infty \right\}$$

Şi notăm $I(G)=\{f\in L^1(G,\nu_0)\,,\,\|f\|_I<\infty\}$, unde $\nu_0=\Delta^{-1/2}\nu$ pe G (Δ este funcția modulară a grupoidului (G, [ν])). Ca şi în [41] se poate demonstra că I(G) este $*$-algebră Banach involutivă. Tot ca în [41] (Theorem 3.4 /pg. 50) se demonstrează că formula

$$\langle \xi, L_f\eta\rangle=\int\langle \xi\circ r(x), L(x)\eta\circ d(x)\rangle f(x)d\nu_0(x)$$

(unde f∈ I(G) , $(\mu, U_G\times H, L)$ o reprezentare a grupoidului , $\xi,\eta\in L^2(U_G,H)$)

stabileşte o corespondență între reprezentările grupoidului G în spații Hilbert separabile şi $*$-reprezentările nedegenerate ale algebrei I(G) (sau ale unei subalgebre “suficient de cuprinzătoare” a lui I(G)) care au următoarele două proprietăți

(1) Pentru l,m ∈ H => $\left|\langle L_f(u\mapsto l),(u\mapsto m)\rangle\right|\le\|f\|_I\|l\|\|m\|$

(2) $M_r(\alpha)L_f=L_{f(\alpha\circ r)}$ unde $M_r:L^\infty(U_G,\mu)\to L(L^2(U_G,H,\mu))$, $M_r(\alpha)j=\alpha j$

Definim C^*-norma $\|f\|=\sup\|L(f)\|$, L parcurge mulțimea reprezentărilor lui $\left(G,\left[\int\nu^u d\mu(u)\right]\right)$ şi notăm cu $C^*(G,\{\nu^u\},\mu)$ algebra obținută prin completarea lui I(G) în această normă .

<u>*Teoremă 5.1.31(Theorem 6.1.3/pg. 89 [1])*</u> Fie $\left(G,\left[\int\nu^u d\mu(u)\right]\right)$ un grupoid cu măsură. Următoarele afirmații sunt echivalente :

(1) (G, $\{\nu^u\}$, μ) este amenabil;

(2) Reprezentarea regulată este fidelă pe $C^*(G,\{\nu^u\},\mu)$;

(3) Există un şir $(\xi_i)_i$ din $L^\infty(U_G L^2(G,\lambda))$ astfel încât şirul de funcții de tip pozitiv $(e_i=(\xi_i,\xi_i))_i$ satisface următoarele condiții:

(a) $e_i^{(0)}\le 1$, $(\forall)i$;

(b) $\lim_i e_i^{(o)}=1$ *-slab în $L^\infty(U_G)$

(c) $\lim_i e_i=1$ *-slab în $L^\infty(G)$

(4) Aceeaşi afirmație ca (3) dar fără condiția (a) .

Următoarea teoremă găseşte în [1] (Proposition 6.1.5/pg. 90).

Teoremă 5.1.32. Fie G un grupoid topologic local-compact, înzestrat cu un sistem Haar continuu $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Dacă G este măsurabil amenabil atunci $C^*(G) = C^*_{red}(G)$ (algebrele definite în 5.1.16 şi 5.1.19).

În subcapitolul 5.3 vom studia reciproca acestei afirmaţii.

5.2. CONSIDERAŢII ASUPRA DEPENDENŢEI C^*-ALGEBREI ASOCIATE UNUI GRUPOID DE SISTEMUL HAAR

a. C^*-algebre Morita echivalente şi grupoizi Morita echivalenţi

Definiţie 5.2.1. Un *modul hermitic peste o C^*-algebră* A este dat de un spaţiu Hilbert H şi o *-reprezentare nedegenerată $\pi : A \to B(H)$ ce determină o acţiune

$$a\cdot\xi = \pi(a)\xi \text{ pentru } a\in A \text{ şi } \xi\in H.$$

Dacă A este W^*-algebră se presupune în plus că π este o reprezentare normală, şi în acest caz modulul se numeşte *modul normal* .(Rieffel [73])

Modulele hermitic (A-modulele în sensul de mai sus) peste o C^*-algebră A formează o categorie în care morfismele sunt operatorii de intervertire, i.e. morfismele de A-module.

Definiţie 5.2.2. Două C^*-algebre se numesc *Morita echivalente* dacă determină categorii echivalente de module hermitice şi dacă functorii T care determină echivalenţa sunt *-functori, i.e. dacă $f : H_1 \to H_2$ este un morfism, atunci $T(f^*) = T(f)^*$.

Categoria modulelor hermitice peste o C^*-algebră A este echivalentă cu categoria modulelor normale peste algebra von Neumann envelopantă n(A). Deci echivalenţa Morita de C^*-algebre este în realitate un concept legat de algebre von Neumann şi în consecinţă prea slab pentru majoritatea aplicaţiilor. De aceea se defineşte un concept mai restrictiv: echivalenţa Morita în sens tare.

__Definiţie 5.2.3.__. Fie A o C^*-algebră. Un *C^*-modul pre-Hilbert* peste A este un A-modul la dreapta X (cu o structură compatibilă de spaţiu vectorial peste **C**), înzestrat cu o aplicaţie $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$: X × X → A, liniară în a doua variabilă şi antiliniară în prima, care satisface condiţiile:

1. $< x, x >_A \geq 0$ pentru orice $x \in X$.
2. $< x, x >_A = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.
3. $< x, y >_A = < y, x >_A^*$ pentru orice $x,y \in X$.
4. $< x, y\cdot a >_A = < y, x >\cdot a$ pentru orice $x,y \in X$ şi $a \in A$.

Aplicaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$: X × X → A se numeşte *produs scalar pe X cu valori în A*. (Paschke [58], Rieffel [72])

Se poate arăta că $\|x\| = \left\|\langle x, x\rangle_A\right\|^{1/2}$ defineşte o normă pe X. Dacă X este complet relativ la această normă, atunci X se numeşte *C^*-modul Hilbert peste A*. Dacă nu, prin completare X poate fi transformat într-un C^*-modul Hilbert peste A. Noţiunea de *C^*-modul Hilbert la stânga* se defineşte similar.

Ca oricărui spaţiu normat, unui C^*-modul Hilbert X peste C^*-algebra A i se poate asocia algebra operatorilor liniari şi mărginiţi B(X). În cele ce urmează vom nota cu **B**(X) mulţimea operatorilor liniari şi mărginiţi T : X → X care sunt aplicaţii de module (i.e satisfac $T(x\cdot a) = T(x)\cdot a$, pentru orice $x \in X$ şi $a \in A$) şi care admit adjuncţi (i.e. există $T^* \in$ **B**(X) cu proprietatea $< T(x), y > = < x, T^*(y) >$ pentru orice x, $y \in X$. Este uşor de observat că dacă X este un spaţiu Hilbert complex şi A = **C** (mulţimea numerelor complexe), atunci **B**(X) = B(X). În situaţia în care X este spaţiu Hilbert, **B**(X) = B(X) are un ideal bilateral închis netrivial, şi anume spaţiul operatorilor compacți K(X). Analogul acestui ideal pentru un C^*-modul Hilbert X oarecare este spațiul liniar închis generat de "operatorii de rang 1", i.e operatorii de forma $x \otimes y^* \in \mathbf{B}(X)$

$$x \otimes y^*(z) = x < y, z >.$$

Mulțimea acestor operatori se notează cu **K**(X) şi se numeşte *algebra de imprimitivitate* a C^*-modulului Hilbert X.

Propoziția următoare poate fi demonstrată uşor folosind rezultatele din [56].

<u>*Propoziție 5.2.4.*</u> Dacă X este un C^*-modul Hilbert la dreapta peste C^*-algebra A, atunci **B**(X) şi **K**(X) sunt C^*-algebre, iar **B**(X) este *-izomorfă cu algebra multiplicatorilor lui **K**(X). În plus, X devine un C^*-modul Hilbert la stânga peste **K**(X), cu produsul scalar următor:

$$< x, y>_{\mathbf{K}(X)} = x \otimes y^*$$

iar algebra de imprimitivitate a lui X privit ca C^*-modul Hilbert la stânga peste **K**(X) este izomorfă cu A.

<u>*Definiție5.2.5.*</u> Fie A şi B două C^*-algebre. O *(A, B)-echivalență* este un (A, B)-bimodul X înzestrat cu produsele scalare $<\cdot,\cdot>_A$ şi $<\cdot,\cdot>_B$ cu valori în A, respectiv în B, în raport cu care X devine C^*-modul Hilbert la stânga peste A şi respectiv, C^*-modul Hilbert la dreapta peste B şi astfel încât

1. $<x, y>_A \cdot z = x \cdot <y, z>_B$ pentru orice $x, y, z \in X$.
2. Spațiul liniar generat de $< X, X >_A = \{<x, y>_A : x, y \in X\}$ este dens în A, iar spațiul liniar generat de $< X, X >_B = \{<x, y>_B : x, y \in X\}$ este dens este dens în B.
3. Pentru orice $x, y \in X$, $a \in A$ şi $b \in B$

$$< a\cdot x, a\cdot y >_B \leq \|a\|^2 < x, y >_B \text{ şi } < x\cdot b, y\cdot b >_A \leq \|b\|^2 < x, y >_A$$

C^*-algebrele A şi B se numesc *Morita echivalente în sens tare* dacă există o (A, B)-echivalență. (Rieffel [72], [74]).

Echivalența Morita în sens tare este o relație de echivalență.

Nu este greu de observat că dacă X este un C^*-modul Hilbert peste o C^*-algebra A, atunci A şi **K**(X) sunt C^*-algebre Morita echivalente în sens tare. Următoare propoziţie uşor de demonstrat stabileşte reciproca:

Propoziţie 5.2.6. Fie o (A,B)-echivalenţă X în sensul definiţiei 5.2.5. Atunci aplicaţia definită pe $\mathbf{K}(X_B)$ (algebra de imprimitivitate a lui X privit ca C^*-modul Hilbert la dreapta peste B) cu valori în A definită prin

$$x \otimes y^* \to \langle x, y \rangle_A$$

este un izomorfism de C^*-algebre.

De asemenea aplicaţia definită pe $\mathbf{K}(X_A)$ (algebra de imprimitivitate a lui X privit ca C^*-modul Hilbert la stânga peste A) cu valori în B definită prin

$$x^* \otimes y \to \langle x, y \rangle_B$$

este un izomorfism de C^*-algebre ($x^* \otimes y$ este definit prin $x^* \otimes y\,(z) = \langle z, x\rangle_A y$).

Astfel două C^*-algebre sunt Morita echivalente în sens tare dacă şi numai dacă fiecare dintre ele poate fi realizată ca algebră de imprimitivitate a unui C^*-modul Hilbert peste cealaltă. De asemenea se poate arăta că două C^*-algebre A şi B cu unitate aproximativă numărabilă (de exemplu separabile sau unitare) sunt Morita echivalente în sens tare dacă şi numai dacă sunt stabil echivalente, i.e. $A\otimes K \cong B\otimes K$, unde K este algebra operatorilor compacţi pe un spaţiu Hilbert separabil ([10]).

Noţiunea de echivalenţă Morita pentru grupoizi local compacţi de Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams (Definition 2.1/p. 6 [57]) şi a fost prezentată în capitolul 2 (definiţie 2.2.5). Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams au demonstrat următorul rezultat ce stabileşte legătura dintre echivalenţa Morita de grupoizi şi echivalenţă Morita în sens tare de C^*-algebre grupoidale.

Teoremă 5.2.7. Fie G şi H doi grupoizi local compacţi cu bază numărabilă, înzestraţi cu sistemele Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ şi $\lambda = \{\lambda^u, u \in U_H\}$ respectiv. Dacă G şi H sunt grupoizi Morita echivalenţi (în sensul definiţiei 2.2.5), atunci C^*-algebrele $C^*(G, \nu)$ şi $C^*(H, \lambda)$ sunt Morita echivalente în sens tare (Theorem 2.8/p. 10 [57]).

Definiția C^*-algebrei depinde de alegerea unui sistem Haar pe grupoid. Dar definiția unei reprezentări pe grupoid nu depinde. În cazul grupurilor măsura Haar este esențial unică, dar în cazul general al grupoizilor sistemele Haar nu sunt unice. O consecință directă a teoremei anterioare, este următoarea propoziție:

<u>*Propoziție 5.2.8.*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu două sistemele Haar $v = \{\nu^u, u \in U_G\}$ și $\lambda = \{\lambda^u, u \in U_G\}$. Atunci C^*-algebrele $C^*(G, v)$ și $C^*(G, \lambda)$ sunt Morita echivalente în sens tare.

Deci sisteme Haar diferite pe un grupoid G determină C^*-algebre Morita echivalente în sens tare. Acesta este dealtfel singurul rezultat referitor la independența C^*-algebrei asociate unui grupoid de sistemul Haar considerat. Se pune întrebarea dacă C^*-algebrele asociate cu două sisteme Haar diferite sunt *-izomorfe. Aceasta este încă o problemă deschisă. În cazul grupoizilor tranzitivi răspunsul este afirmativ, aşa cum arată următorul rezultat obținut de Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams.

<u>*Teorema 5.2.9.*</u> Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă. Fie $u \in U_G$ o unitate şi G_u^u grupul de izotropie în u. Dacă $v = \{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G, atunci există o măsură Radon pozitivă μ pe U_G cu suportul egal cu U_G astfel încât $C^*(G, v)$ să fie *-izomorfă cu $C^*(G_u^u) \otimes K(L^2(U_G, \mu))$. (Theorem 3.1/p. 16 [57])

Pentru a demonstra această teoremă Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams au arătat mai întâi că $C^*(G, v)$ şi $C^*(G_u^u)$ sunt Morita echivalente în sens tare via un C^*-modul Hilbert X_1 . În consecință $C^*(G, v)$ este *-izomorfă cu algebra de imprimitivitate a lui X_1. Apoi au construit un alt C^*-modul Hilbert X_2 peste $C^*(G_u^u)$ a cărui algebră de imprimitivitate este $C^*(G_u^u) \otimes K(L^2(U_G, \mu)$ pentru o anumită măsură μ. De aici a rezultat izomorfismul dintre $C^*(G, \nu)$ şi $C^*(G_u^u) \otimes K(L^2(U_G, \mu)$. În secțiunea c vom stabili acelaşi rezultat utilizând descompunerea sistemului Haar obținută în secțiunea 2.4. b.

b. C^*-algebrele $C^*(G)$ şi $M^*(G)$ asociate unui grupoid tranzitiv

Fie G un grupoid local compact înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Reamintim că pentru a construi C^*-algebra asociată grupoidului local compact G şi sistemului Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, Jean Renault [68] a definit o normă pe $C_c(G)$, spațiul funcțiilor continue cu suport compact pe G:

$$\|f\| = \{\|L(f)\| : L \text{ reprezentare pe } C_c(G)\}.$$

Completarea algebrei $C_c(G)$ relativ la această normă determină C^*-algebra asociată lui G. Fiecare funcțională liniară şi pozitivă de normă 1 pe o C^*-algebră dă naştere la o reprezentare a algebrei şi la un vector ciclic în spațiul Hilbert al reprezentării. Suma directă a acestor reprezentări ciclice este reprezentarea universală a C^*-algebrei. Reprezentarea universală a C^*-algebrei $C^*(G, \nu)$ notată cu ω in [67]. Închiderea relativ la topologia uniformă (închiderea în normă) a lui $\omega(M_c(G))$ este o C^*-algebră notată $M^*(G, \nu)$, unde $M_c(G)$ este spațiul funcțiilor boreliene mărginite cu suport compact pe G (vezi [67]). Pentru algebrele $C_c(G)$ şi $M_c(G)$ multiplicarea este dată bineînțeles de convoluție

$$f * g(x) = \int f(xy)g(y^{-1})d\nu^{d(x)}(y)\,,\ x \in G$$

şi involuția este dată de

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})},\ x \in G.$$

Vom arăta că în cazul tranzitiv $C^*(G, \nu) = M^*(G, \nu)$. Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie μ_0 o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\mu = r_*(\mu_0) = d_*(\mu_0)$ să fie o măsură cvasi-invariantă relativ la sistemul Haar. Fie $e \in U_G$ o unitate fixată. Aplicând Lemma

1.1/pg. 102 [47] spațiilor local compacte G^e şi U_G, şi aplicației continue şi surjective $d_e : G^e \to U_G$, $d_e(x) = d(x)$ rezultă că d_e are o secțiune boreliană regulată $\sigma:U_G \to G^e$ (i.e. σ este o aplicație boreliană cu proprietatea că $d(\sigma(u)) = u$ pentru orice $u \in U_G$, şi $\sigma(K)$ este relativ compactă în G^e pentru orice submulțime compactă K a lui U_G). Fie Δ funcția modulară asociată lui modificând Δ pe o mulțime de măsură nulă putem presupune că Δ este morfism strict. Conform teoremei 2.4.8 există o funcție boreliană pozitivă $h_0:U_G \to R_+^*$ astfel încât pentru orice funcție boreliană nenegativă f avem

$$\int f(y)d\nu^u(y)=\int_{U_G} h_0(v)\left(\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(v)\right)d\mu_e(y)\right)d\mu(v) \quad \mu\text{-a.p.t. } u \in U_G,$$

unde μ_e este o măsură Haar pe grupul local compact G_e^e .

În plus,

$$\Delta(x)=\frac{h_0(d(x))}{h_0(r(x))}\Delta_e\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)$$

unde Δ_e este funcția modulară a grupului local compact G_e^e.

Să presupunem că alegem măsura μ_e în felul următor. Fie U_0 o vecinătate închisă simetrică d-compactă a lui U_G şi fie $f_0 : G \to [0, 1]$ o funcție continuă cu suport d-compact aleasă astfel încât $f_0(x) = 1$ pentru orice $x \in U_0$. Alegem măsura Haar μ_e pe G_e^e astfel încât

$$\int f_0(x)d\mu_e(x) = 1.$$

Dacă $f_1: G \to [0, 1]$ este definită prin

$$f_1(x) = f_0(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}),\ x \in G,$$

atunci avem

$$\int_{G_e^e} f_1\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(v)\right)d\mu_e(y)=\int f_0(y)d\mu_e(y)=1, \text{ pentru orice } u, v \in U_G.$$

Să considerăm K o submulțime compactă a lui U_G şi să observăm că

$$\begin{aligned}\int 1_K(w)h_0(w)d\mu(w) &= \int\int_{G_e^e} f_1\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(w)\right)d\mu_e(y)1_K(w)h_0(w)d\mu(w)\\ &= \int\int_{G_e^e} f_1\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(w)\right)1_K\left(d\left(\sigma(u)^{-1}y\sigma(w)\right)\right)d\mu_e(y)h_0(w)d\mu(w)\\ &= \int f_1(y)1_K(y)d\nu^u(y).\end{aligned}$$

Ținând cont că $f_1 1_K \circ d\, 1_{G^u}$ este o funcție mărginită cu suport compact pentru orice u, obținem că

$$\int 1_K(w) h_0(w) d\mu(w) < \infty \text{ pentru orice mulțime compactă } K \subset U_G.$$

Aplicând lema 2.4.5 rezultă că există un sistem de măsuri σ-finite, $\{\nu_{u,v}, u, v \in U_G\}$, cu următoarele proprietăți

(1) $\nu_{u,v}$ este concentrată pe G_v^u şi $\nu_{u,v} \neq 0$ $(\forall)$ $u,v \in U_G$.

(2) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G, aplicația

$$(u, v) \mapsto \int f\, d\nu_{u,v} \quad [: U_G \times U_G \to \overline{\mathbf{R}}]$$

este boreliană.

(3) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G

$$\int f(xy) d\nu_{d(x),v}(y) = \int f(y) d\nu_{r(x),v}(y) \quad (\forall)\ v \in U_G,\ x \in G$$

(4) Pentru orice $f \geq 0$ boreliană pe G

$$\Delta(x) \int f(yx) d\nu_{u,r(x)}(y) = \int f(y) d\nu_{u,d(x)}(y) \quad (\forall)\ u \in U_G,\ x \in G$$

(5) Pentru orice $f \geq 0$ Borel pe G

$$\int f(y) d\nu_{u,v}(y) = \int f(y^{-1}) \Delta(y^{-1}) d\nu_{v,u}(y) \quad (\forall)\ u,v \in U_G$$

(6) $\nu^u = \int \nu_{u,v}\, d\mu(v)$ pentru μ-a.p.t. $u \in U_G$

În cele ce urmează vom numi un sistem de măsuri $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ cu proprietățile (1)-(6) *sistem de măsuri rezultat prin descompunerea sistemului Haar*.

<u>*Lema 5.2.10.*</u> Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie μ_0 o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\mu = r_*(\mu_0) = d_*(\mu_0)$ să fie o măsură cvasi-invariantă relativ la sistemul Haar. Fie $e \in U_G$ o unitate fixată şi $\sigma : U_G \to G^e$ o secțiune boreliană regulată pentru

d_e: $G^e \to U_G$, $d_e(x) = d(x)$. Fie Δ o funcție modulară asociată lui μ convenabil aleasă. Atunci

1. există o funcție boreliană pozitivă $h_0: U_G \to R_+^*$ astfel încât pentru orice funcție boreliană nenegativă f avem

$$\int f(y)d\nu^u(y) = \int_{U_G} h_0(v)\left(\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(v)\right)d\mu_e(y)\right)d\mu(v) \quad \mu\text{-a.p.t. } u \in U_G$$

2. Pentru orice mulțime compactă $K \subset U_G$.

$$\int 1_K(w)h_0(w)d\mu(w) < \infty$$

3. Pentru orice funcție $f: G \to \mathbf{C}$ boreliană mărginită cu suport compact K, există $M > 0$ astfel încât

$$\left(\int f(x)\Delta(x)^{-1/2} d\nu_{u,v}(x)\right)^2 \le M h_0(u)h_0(v)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(v),$$

unde $\{\nu_{u,v},\ u,v \in U_G\}$ este sistemul de măsuri obținut prin descompunerea sistemului Haar.

Demonstrație. Primele două puncte rezultă din considerațiile de deasupra lemei. Pentru a demonstra 3, să observăm ca în demonstrația teoremei 2.4.8 că

$$\left(\int f(x)\Delta(x)^{-1/2} d\nu_{u,v}(x)\right)^2 = \left(\int f(x)\Delta(x)^{-1/2} d\nu_{u,v}(x)\right)^2 1_{r(K)}(u)\ 1_{d(K)}(v)$$

$$\le \left(\sqrt{h_0(v)h_0(u)} \int f\left(\sigma(u)^{-1} x\sigma(v)\right)\Delta_e(x)^{-1/2} d\mu_e(x)\right)^2$$

$$\le h_0(v)h_0(u) \sup\{f(x), x \in L\} \sup\{\Delta_e(x), x \in L\}\mu_e(L)\ 1_{r(K)}(u)\ 1_{d(K)}(v)$$

$$= M h_0(u)h_0(v)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(v),$$

unde $\begin{cases} L = \sigma(r(K))K\sigma(d(K)^{-1} \text{ este o mulțime relativ compactă şi} \\ M = \sup\{f(x), x \in L\} \sup\{\Delta_e(x), x \in L\}\mu_e(L) < \infty. \end{cases}$

■

Deoarece grupoidul G înzestrat cu sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. este tranzitiv există o singură clasă invariantă de măsuri pe U_G. Deci probabilitatea cvasi-invariantă μ este esențial unică. În cele ce urmează vom considera fixată această probabilitatea cvasi-invariantă μ şi vom nota

$$\nu_1 = \int \nu^u d\mu(v) = \int\int \nu_{u,v} d\mu(v) d\mu(u) \text{ şi } \nu_0 = \int \Delta^{-\frac{1}{2}} d\nu_1 .$$

Notaţii 5.2.11. Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Deoarece grupoidul G este tranzitiv există o singură clasă invariantă de măsuri pe U_G. Deci probabilitatea cvasi-invariantă μ din lema precedentă este esenţial unică. În cele ce urmează vom considera fixată această probabilitatea cvasi-invariantă μ fixată şi vom nota

$$\nu_1 = \int \nu^u d\mu(v) = \int\int \nu_{u,v} d\mu(v) d\mu(u) \text{ şi } \nu_0 = \int \Delta^{-\frac{1}{2}} d\nu_1 ,$$

unde Δ este funcţia modulară a lui μ. Pentru orice $g \in L^1(G,\nu_0)$ vom nota

$$\|g\|_{II} = \sup\left\{ \int |g(x) a(r(x)) b(d(x))| \Delta^{-\frac{1}{2}}(x) d\nu_1(x), \int |a(u)|^2 d\mu(u) = \int |b(u)|^2 d\mu(u) = 1 \right\}.$$

Se poate demonstra că $\|g\|_{II}$ nu depinde de μ (este esenţial că G este tranzitiv).

Propoziţie 5.2.12 (Proposition 4 [18]). Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie f o funcţie boreliană mărginită pe G cu suport compact: Atunci există un şir $(f_n)_n$ în $C_c(G)$ astfel încât

$$\|f - f_n\|_{II} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Demonstraţie. Fie f o funcţie boreliană mărginită pe G cu suport compact K. Atunci f este limita aproape peste tot relativ la ν_1 a unui şir $(f_n)_n$, din $C_c(G)$ care este uniform mărginit şi care are proprietatea că suportul fiecărei funcţii f_n este conţinut în K. Vom arăta că $(f_n)_n$ are un subşir astfel încât

$$\|f - f_{n_k}\|_{II} \xrightarrow{k\to\infty} 0 ,$$

Considerăm descompunerea sistemului Haar $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ ale cărei proprietăţi au fost descrise la începutul secţiunii. Deoarece

$$\lim_n \int |f(x) - f_n(x)| \Delta^{-\frac{1}{2}}(x) d\nu_1(x) = \int |f(x) - f_n(x)| \Delta^{-\frac{1}{2}}(x) d\nu_{u,v}(x) d\mu(v) d\mu(u) = 0 ,$$

rezultă există un subşir al lui $(f_n)_n$ astfel încât:

$$\lim_k \int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\Delta^{-\frac{1}{2}}(x)d\nu_{u,v}(x)=0,\ \mu\times\mu\text{-a.p.t.}$$

Datorită mărginirii lui f şi $(f_n)_n$, aplicând lema 5.2.10, rezultă că există M>0 şi $h_0:U_G\to R_+^*$ boreliană astfel încât

$$\left(\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 \leq \quad M h_0(u)h_0(v)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(v),$$

şi pentru orice mulţime compactă $L\subset U_G$

$$\int 1_L(w)h_0(w)d\mu(w)<\infty.$$

Fie $a,b:U_G\to\mathbf{C}$, astfel încât $\int |a(u)|^2 d\mu(u)=\int |b(u)|^2 d\mu(u)=1$.

$$\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\left|a(r(x))b(d(x))\right|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_1(x)=$$

$$=\int\int\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\left|a(r(x))b(d(x))\right|\Delta(x)^{-1/2}d\nu_{u,v}(x)d\mu(v)d\mu(u)$$

$$\leq\left(\int\int\left(\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)\right)^{1/2}\left(\int\int |a(u)b(v)|^2 d\mu(v)d\mu(u)\right)^{1/2}$$

$$\leq\left(\int\int\left(\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(\int |a(u)|^2 d\mu(u)\right)^{1/2}\left(\int |b(v)|^2 d\mu(v)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int\int\left(\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)\right)^{1/2}$$

Deoarece

$$\int\int\left(\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)\leq M h_0(u)h_0(v)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(v),$$

şi

$$\int\int M h_0(u)h_0(v)1_{r(K)}(u)1_{d(K)}(v)d\mu(u)d\mu(v)=$$

$$=M\left(\int h_0(u)1_{r(K)}(u)d\mu(u)\right)\left(\int h_0(v)1_{d(K)}(v)d\mu(v)\right)<\infty$$

aplicând teorema de convergenţă dominată rezultă că

$$\sup\left\{\int \left|f(x)-f_{n_k}(x)\right|\left|a(r(x))b(d(x))\right|\Delta^{-\frac{1}{2}}(x)d\nu(x),\ \int \left|a(u)\right|^2 d\mu(u)=\int \left|b(u)\right|^2 d\mu(u)=1\right\}$$

converge la zero. ■

Teorema 5.2.13. Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar ν = $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Atunci $C^*(G, \nu) = M^*(G, \nu)$.

Demonstrație Putem privi $C^*(G, \nu)$ ca o subalgebră a lui $M^*(G, \nu)$. Pe de altă parte, în cazul tranzitiv

$$\left\|\omega(f)\right\| \le \left\|f\right\|_{II}$$

pentru orice f în $M_c(G)$ (vezi [42] sau [67]). Dacă $f \in M_c(G)$, atunci conform propoziției anterioare există $(f_n)_n$ în $C_c(G)$ astfel încât

$$\left\|f - f_n\right\|_{II} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

De aici rezultă că există $(f_n)_n$ în $C_c(G)$ astfel încât

$$\left\|\omega(f - f_n)\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Astfel f aparține închiderii în normă a lui ω($C_c(G)$, i.e. f aparține $C^*(G, \nu)$. ■

Propoziție 5.2.14 (Proposition 5 [18]). Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar ν = $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie μ o măsură cvasi-invariantă, Δ este funcția modulară a lui μ. şi

$$\nu_1 = \int \nu^u d\mu(v) = \int \int \nu_{u,v}\, d\mu(v) d\mu(u) \text{ şi } \nu_0 = \int \Delta^{-1/2}\, d\nu_1 ,$$

Dacă $f \in L^1(G,\nu_0)$ are proprietatea că

$$\int \int \left(\int \left|f(x)\right|\Delta^{-1/2}(x) d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v) d\mu(u) < \infty .$$

atunci f aparține $C^*(G,\nu)$.

Demonstrație. Demonstrăm că există un şir $(f_n)_n$ de funcții boreliene mărginite pe G cu suport compact astfel încât

$$\left\|f - f_n\right\|_{II} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Fie $g_n(x)=f(x)$ dacă $|f(x)| \le n$ şi $g_n(x)=0$ în caz contrar. Fie $(K_n)_n$ un şir crescător de mulțimi compacte cu $\bigcup_n K_n = G$. Dacă $f_n = g_n 1_{k_n}$, atunci $|f-f_n|$ converge punctual la zero, dominat de $|f|$. De aceea

$$\int \int \left(\int |f(x)-f_n(x)|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u) < \infty$$

converge la zero conform teoremei de convergență dominată . Am observat în demonstrația propoziției 5.2.12 că

$$\|f-f_n\|_{II} \le \left(\int \int \left(\int |f(x)-f_{n_k}(x)|\Delta^{-\frac{1}{2}}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)\right)^{1/2},$$

Deci $\|f-f_n\|_{II} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Din aceeaşi propoziție rezultă că orice funcție boreliană mărginită pe G cu suport compact poate fi aproximată în $\| \ \|_{II}$ cu funcții continue cu suport compact. În consecință, dacă $f \in L^1(G,\nu_0)$ are proprietatea

$$\int \int \left(\int |f(x)|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u) < \infty$$

atunci există un şir $(f_n)_n$ de funcții continue cu suport compact astfel încât

$$\|f-f_n\|_{II} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Este cunoscut că orice reprezentare $L : C_c(G) \to L(H)$ în sensul definiției 5.1.15 (Definition 1.3/pg.50 [68]) , are proprietatea că $\|L(f)\| \le \|f\|_{II}$. Deci pentru orice funcție f cu proprietatea din ipoteză există un şir $(f_n)_n$ de funcții continue cu suport compact astfel încât

$$\|L(f-f_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

pentru orice reprezentare L, ceea ce înseamnă că f poate fi privită ca element în $C^*(G,\nu)$. ■

c. Izomorfismul dintre C^*-algebrele asociate unui grupoid tranzitiv

Vom demonstra mai întâi că C^*-algebra asociată unui grupoid tranzitiv este *-izomorfă cu C^*-algebra asociată unui grupoid trivial

Notații 5.2.15. Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie μ_0 o probabilitate simetrică pe G astfel încât $\mu = r_*(\mu_0) = d_*(\mu_0)$ să fie o măsură cvasi-invariantă relativ la sistemul Haar. Fie $e \in U_G$ o unitate fixată şi $\sigma : U_G \to G^e$ o secțiune boreliană regulată pentru d_e: $G^e \to U_G$, $d_e(x) = d(x)$. Fie Δ o funcție modulară asociată lui μ convenabil aleasă. Fie $\{\nu_{u,v}, u,v \in U_G\}$ un sistem de măsuri rezultat prin descompunerea sistemului Haar. Din lema 5.2.10 rezultă că există o funcție boreliană pozitivă h_0 cu următoarele proprietăți

1. Pentru orice funcție boreliană nenegativă f avem

$$\int f(y)d\nu_{u,v}(y) = h_0(v)\left(\int_{G_e^e} f\left(\sigma(u)^{-1} y\sigma(v)\right)d\mu_e(y)\right) \quad \mu\times\mu\text{-a.p.t. } (u,v)$$

cu μ_e măsură Haar pe G_e^e convenabil aleasă

2. Pentru orice $x \in G$

$$\Delta(x) = \frac{h_0(d(x))}{h_0(r(x))}\Delta_e\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)$$

unde Δ_e este funcția modulară a grupului local compact G_e^e.

3. Pentru orice mulțime compactă $K \subset U_G$.

$$\int 1_K(w)h_0(w)d\mu(w) < \infty .$$

Considerăm grupoidul trivial $U_G \times G_e^e \times U_G$. Topologia pe $U_G \times G_e^e \times U_G$ este topologia produs, iar operațiile sunt date de

$$(u,x,v)(v,z,w) = (u,xz,w)$$
$$(u,x,v)^{-1} = (v,x^{-1},u).$$

Cu această structură $U_G \times G_e^e \times U_G$ devine grupoid local compact cu bază numărabilă. Nu este greu de demonstrat că sistemul de măsuri $\nu_e = \{\varepsilon_u \times \mu_e \times h_0 \cdot \mu, u \in U_G\}$ este sistem Haar pe $U_G \times G_e^e \times U_G$ şi că C^*-algebra asociată este *-izomorfă cu $C^*(G_e^e) \otimes K(L^2(U_G, \mu))$ (ε_u este măsura Dirac în u).

Lema 5.2.16 (Proposition 3 [23]). Cu notațiile 5.2.15, aplicația $\varphi : G \to U_G \times G_e^e \times U_G$ definită prin

$$\varphi(x) = (r(x), \sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}, d(x))$$

este un izomorfism borelian de grupoizi care transportă sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ al lui G în sistemul Haar $\nu_e = \{\varepsilon_u \times \mu_e \times h_0 \cdot \mu,\ u \in U_G\}$ al lui $U_G \times G_e^e \times U_G$.

Demonstrație. Rezultă prin calcul direct. ■

Teoremă 5.2.17(Theorem 7 [23]). Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie $U_G \times G_e^e \times U_G$ grupoidul trivial înzestrat cu sistemul Haar $\nu_e = \{\varepsilon_u \times \mu_e \times h_0 \cdot \mu,\ u \in U_G\}$ ca în 5.2.15. Atunci $C^*(G,\nu)$ şi $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e)$ sunt *-izomorfe.

Demonstrație. Fie φ izomorfismul de grupoizi definit în lema 5.2.16. Orice reprezentare nedegenerată a lui $C_c(G)$ este echivalentă cu reprezentarea obținută prin integrarea unei reprezentări a grupoidului conform teoremei 5.1.21 (Teorema 1.21/p. 65 [68] sau Teorema 3.29/p. 74 [56]). Deoarece $\varphi : G \to U_G \times G_e^e \times U_G$ este un izomorfism borelian de grupoizi, $L \to L \circ \varphi$ determină o corespondență biunivocă între reprezentările lui $U_G \times G_e^e \times U_G$ şi reprezentările lui G. De asemenea φ transportă sistemul Haar al lui G în sistemul Haar de pe $U_G \times G_e^e \times U_G$. De aceea, aplicația $\Phi : M_c(U_G \times G_e^e \times U_G) \to M_c(G)$ definită prin

$$\Phi(f) = f \circ \varphi$$

poate fi extinsă la un *-izomorfim între $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e)$ şi $C^*(G,\nu)$. ■

Observație 5.2.18. În condițiile teoremei anterioare, obținem că $C^*(G,\nu)$ este *-izomorfă cu $C^*(G_e^e) \otimes K(L^2(U_G, \mu))$ deoarece $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e)$ este *-izomorfă cu $C^*(G_e^e) \otimes K(L^2(U_G, \mu))$.

Notații 5.2.19. Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu două sisteme Haar $\nu_i = \{\nu_i^u, u \in U_G\}$, i=1,2. Fie μ_i o măsură cvasi-invariantă relativ la sistemul Haar i=1,2 aleasă ca în 5.2.25. Fie $\{ \nu_{u,v}^i, u,v \in U_G\}$, i=1,2, sistemele de măsuri rezultate prin descompunerea celor doua sisteme Haar, și h_0^i, i=1,2 funcțiile corespunzătoare cu proprietățile indicate în 5.2.15.

Izomorfismul dintre $C^*(G,\nu_1)$ și $C^*(G,\nu_2)$ se obține prin compunerea izomorfismelor următoare

$C^*(G,\nu_1) \xrightarrow{f \to f\circ\varphi^{-1}} C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1) \xrightarrow{\sim} C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1)$

$\xrightarrow{f \to f\circ\varphi} C^*(G,\nu_1)$.

Pentru a pune în evidență izomorfismul dintre C^*-algebrele $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1)$ și $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^2)$ observăm că spațiul liniar generat de funcțiile de forma

$$(u,x,v) \to g_1 \otimes f \otimes g_2(u,x,v) = g_1(u)f(x)g_2(v)$$

cu g_1, f și g_2 funcții continue cu suport compact este dens în norma $\| \|_\infty$ în $C_c(U_G \times G_e^e \times U_G)$ și deci este dens în C^*-normă în $C_c(U_G \times G_e^e \times U_G)$. Fie

$$U : L^2(U_G, \mu_1) \to L^2(U_G, \mu_2)$$

un operator unitar. În aceste condiții aplicația

$$g_1 \otimes f \otimes g_2 \to U(g_1) \otimes f \otimes U(g_2)$$

poate fi extinsă la un *-izomorfism între $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1)$ și $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^2)$.

Teorema 5.2.10. Fie G un grupoid *tranzitiv* local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu două sisteme Haar $\nu_i = \{\nu_i^u, u \in U_G\}$, i=1,2. Fie μ_i o măsură cvasi-invariantă relativ la sistemul Haar i=1,2 aleasă ca în 5.2.25. Fie

$$U : L^2(U_G, \mu_1) \to L^2(U_G, \mu_2)$$

un operator unitar. Fie $e \in U_G$ o unitate fixată și $\sigma : U_G \to G^e$ o secțiune boreliană regulată pentru d_e: $G^e \to U_G$, $d_e(x) = d(x)$. Considerăm aplicația

$$g_1 \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} g_2 \xrightarrow{\Phi} U(g_1) \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} U(g_2),$$

unde $g_1, g_2 : U_G \to \mathbf{C}$, f: $G_e^e \to \mathbf{C}$ sunt funcții boreliene mărginite cu suport compact, iar $g_1 \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} g_2$ este definită prin

$$g_1 \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} g_2(x) := g_1(r(x))f(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1})g_2(d(x)),\ x \in G$$

şi analog este definită $U(g_1) \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} U(g_2)$.

Atunci Φ poate fi extinsă la un *-izomorfism între $C^*(G,\nu_1)$ şi $C^*(G,\nu_2)$.

Demonstrație. Aplicația Φ definită pe spațiul liniar generat de funcțiile de forma $g_1 \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} g_2$ reprezintă restricția compunerii izomorfismele puse în evidență în 5.2.19. De aceea trebuie demonstrat doar că spațiul liniar generat de $g_1 \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} g_2$ este dens în $C^*(G,\nu_1)$ în C^*-normă. Pentru aceasta ținem cont de următoarele fapte: $M^*(G,\nu_1) = C^*(G,\nu_1)$, $f \to f \circ \varphi^{-1}$ este un *-izomorfism între $C^*(G,\nu_1)$ şi $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1)$, şi spațiul liniar generat de funcțiile de forma

$$(u,x,v) \to g_1 \otimes f \otimes g_2(u,x,v) = g_1(u)f(x)g_2(v)$$

cu g_1, f şi g_2 funcții continue cu suport compact este dens în $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1)$, deci cu atât mai mult spațiul liniar generat de funcțiile de forma

$$(u,x,v) \to g_1 \otimes f \otimes g_2(u,x,v) = g_1(u)f(x)g_2(v)$$

cu g_1, f şi g_2 funcții boreliene mărginite cu suport compact este dens în $C^*(U_G \times G_e^e \times U_G, \nu_e^1)$. Spațiul corespunzător acestuia în $C^*(G,\nu_1)$ este spațiul liniar generat de funcțiile de forma $g_1 \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} g_2$. În consecință acesta este şi el dens în $C^*(G,\nu_1)$ în C^*-normă. ■

5.3. C^*-ALGEBRA ASOCIATĂ UNUI GRUPOID CU SPAȚIUL ORBITELOR NUMĂRABIL SEPARAT

Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Presupunem în plus că spațiul orbitelor $U_G/G = \{[u], u \in U_G\}$ este numărabil separat. Notăm π: $U_G \to U_G/G$ aplicația canonică $u \to [u]$. Aplicând un rezultat enunțat în [2] (Theorem 3.4.3/p. 77 [2]) spațiului analitic U_G, spațiului numărabil separat U_G/G şi aplicației boreliene π, rezultă că există o secțiune universal măsurabilă $\sigma : U_G/G \to U_G$ pentru π, i.e. o aplicație universal măsurabilă ce satisface $\pi(\sigma([u])) = [u]$, pentru orice orbită [u]. Pe U_G/G am considerat structura boreliană cât indusă de π. O mulțime M este boreliană în U_G/G dacă şi numai dacă preimaginea $\pi^{-1}(M)$ este boreliană în U_G. În [65] Arlan Ramsay stabileşte condiții necesare şi suficiente pentru ca spațiul orbitelor să fie numărabil separat. Fie

$$R = (r,d)(G) = \{(r(x),d(x)),\ x \in G\}$$

grupoidul principal asociat lui G (graficul relație de echivalență $u \sim v <=> G_v^u \neq \emptyset$). Acest grupoid fiind imaginea lui G prin morfismul continuu (r,d), este un grupoid σ-compact. În particular, R este o submulțime F_σ în $U_G \times U_G$. Aplicând un rezultat al lui Arlan Ramsay (Theorem 2.1/p. 363 [65]), rezultă că următoarele afirmații sunt echivalente:

1. structura boreliană cât pe U_G/G este numărabil separată
2. topologia cât pe U_G/G generează structura boreliană cât
3. U_G/G este spațiu standard
4. $\pi: U_G \to U_G/G$ admite o secțiune boreliană
5. fiecare orbită [u] este local închisă.
6. U_G/G este spațiu topologic T_0 (înzestrat cu topologia cât)

De aceea putem considera că secțiunea σ este de fapt boreliană.

Fie $(K_n)_n$ un şir crescător de mulțimi compacte cu $\bigcup_n K_n = G$. Pentru fiecare n, considerăm o funcție $f_n : G \to [0, 1]$ continuă cu suport compact astfel încât $f_n(x) = 1$ pentru orice $x \in K_n$. Fie $a_n(u) = \dfrac{1}{2^n \nu^u(f_n)}$ dacă $\nu^u(f'_n) > 1$, şi $a_n(u) = \dfrac{1}{2^n}$ în caz contrar. Nu este greu de observat că funcția $u \to a_n(u)$ este continuă. Fie

$$P(u,x) = \sum_n a_n(u) f_n(x) \text{ pentru orice } u \in U_G \text{ şi } x \in G$$

Deoarece $|\, a_n(u)\, f_n(x)\, | \le \frac{1}{2^n}$, seria de funcții $(u,x) \to \sum_n a_n(u) f_n(x)$ este normal şi deci uniform convergentă. Fiind o serie uniform convergentă de funcții continue, suma ei, i.e. funcția P este continuă. De aici rezultă că pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$, funcția

$$u \to \int f(x) P(u,x) d\nu^u(x)$$

este continuă cu suport compact. Dacă notăm

$$M(u) = \int P(u,x) d\nu^u(x)$$

atunci $0 < M(u) \le 2$. Fie α^u măsura definită prin

$$\alpha^u(f) = \frac{1}{M(u)} \int f(x) P(u,x) d\nu^u(x)$$

pentru orice funcție f continuă cu suport compact. Atunci $u \to \alpha^u$ este continuă, în sensul că $u \to \alpha^u(f)$ este continuă pentru orice funcție f continuă cu suport compact. Ca urmare $u \to d_*(\alpha^u)$ este continuă. Fie $\eta_u^1 = d_*(\alpha^u)$ şi $\eta_{\pi(u)} = \eta^1_{\sigma(\pi(u))}$ pentru orice u. Este uşor de demonstrat că pentru orice funcție boreliană nenegativă şi mărginită f

$$u \to \int f(w) d\eta_{\pi(u)}(w)$$

este o funcție boreliană mărginită.

Fie $\lambda^1_{\pi(u)} = \int \nu^w d\eta_{\pi(u)}$ măsura indusă de $\eta_{\pi(u)}$ pe G, şi fie $\lambda_{\pi(u)} = \frac{1}{2}\left(\lambda^1_{\pi(u)} + \left(\lambda^1_{\pi(u)}\right)^{-1}\right)$. Înlocuind $\eta_{\pi(u)}$ cu $d_*(\lambda_{\pi(u)})$, putem presupune că sistemul de măsuri $\{\eta_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G/G\}$ îndeplineşte următoarele condiții:

1. Pentru orice funcție boreliană nenegativă şi mărginită f

   $$u \to \int f(w) d\eta_{\pi(u)}(w)$$

   este o funcție boreliană mărginită
2. $\eta_{\pi(u)} \sim d_*(\nu^u)$ (au aceleaşi mulțimi de măsură nulă) pentru orice $u \in U_G$
3. $\eta_{\pi(u)} = d_*(\lambda_{\pi(u)})$ pentru orice $\pi(u) \in U_G/G$, unde $\lambda_{\pi(u)}$ este o probabilitate simetrică pe G.

În [21] folosind un rezultat al lui Etienne Blachard (Theorem 3.3 [6]) am arătat că în situația în care R = (r,d)(G) este o submulțime închisă a lui $U_G \times U_G$ (sau echivalent U_G/G este spațiu Hausdorff) se poate construi un sistem de măsuri $\{\eta_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G/G\}$ care să verifice condițiile 2 şi 3 de mai sus, şi în plus să aibă proprietatea că pentru orice funcție continuă cu suport compact f

$$u \to \int f(w) d\eta_{\pi(u)}(w)$$

este o funcție continuă cu suport compact

Folosind sistemul de măsuri $\{\eta_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G/G\}$ vom rafina rezultatele referitoare la dezintegrarea sistemului Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ din secțiunea 2.4.a.

Fie μ o măsură cvasi-invariantă pentru sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, şi fie

$$\mu_1 = \int \eta_{\pi(u)} d\mu(u).$$

Cvasi-invarianța măsurii μ şi cvasi-invarianța fiecărei măsuri $\eta_{\pi(u)}$ implică echivalența măsurilor μ_1 şi μ: $\mu_1 \sim \mu$. Considerăm măsura

$$\lambda = \int \lambda_{\pi(u)} d\mu(u)$$

(unde măsurile $\lambda_{\pi(u)}$ sunt probabilitățile simetrice utilizate pentru a construi $\eta_{\pi(u)}$: $\eta_{\pi(u)} = d_* (\lambda_{\pi(u)})$) şi observăm că

$$\begin{aligned}\int f(x) d\lambda(x) &= \int \int f(x) d\lambda_{\pi(u)}(x) d\mu(u)\\ &= \int \int f(x^{-1}) d\lambda_{\pi(u)}(x) d\mu(u)\\ &= \int f(x^{-1}) d\lambda(x)\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\int g(u) d\mu_1(u) &= \int \int g(w) d\eta_{\pi(u)}(w) d\mu(u)\\ &= \int \int g(d(x)) d\lambda_{\pi(u)}(x) d\mu(u)\\ &= \int g(d(x)) d\lambda(x)\end{aligned}$$

De aceea $\mu_1 = d_*(\lambda)$, cu λ o probabilitate simetrică pe G. În cele ce urmează vom folosi aceeaşi notaţie ν şi pentru sistemul Haar ($\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$) şi pentru măsura indusă pe G de μ_1, i.e $\nu = \int \nu^u d\mu_1(u)$. Din context se va subînţelege când ν se referă la un sistem de măsuri şi când la o măsură. Notăm

$$\eta = \int \eta_{\pi(u)} \times \eta_{\pi(u)} d\mu(u).$$

Fie $\lambda = \int \lambda^u d\mu_1(u)$ o r-dezintegrare a lui λ şi fie $\lambda' = (r,d)_*(\lambda)$. Cvasi invarianţa măsurii $\eta_{\pi(u)}$ implică echivalenţa măsurilor $d_*(\nu^u)$ şi $\eta_{\pi(u)}$ şi mai departe echivalenţa:

$$\delta_u \times d_*(\nu^u) \sim \delta_u \times \eta_{\pi(u)}.$$

În consecinţă, avem

$$\int \delta_u \times d_*(\lambda^u) d\mu_1(u) \sim \int \delta_u \times d_*(\nu^u) d\mu_1(u) \sim \int \delta_u \times \eta_{\pi(u)} d\mu_1(u).$$

Pe de altă parte, pentru orice funcţie f continuă cu suport compact definită pe R, avem

$$\begin{aligned}\int\int f(s,t)d(\delta_u \times d_*(\lambda^u))(s,t)d\mu_1(u) &= \int\int f(u,d(x))d\lambda^u(u)d\mu_1(u)\\ &= \int f(r(x),d(x))d\lambda(x)\\ &= \int f(s,t)d\lambda'(s,t)\end{aligned}$$

Astfel $\eta \sim \lambda'$. Dacă notăm cu q o derivată Radon - Nikodym $\frac{d\eta}{d\lambda'}$, atunci q este o funcţie boreliană pozitivă, şi se poate arăta uşor că pentru μ_1 -a.p.t.

$$q = \frac{d(\delta_u \times \eta_{\pi(u)})}{d\lambda'^u}, \text{ unde } \lambda' = \int \lambda'^u d\mu_1(u) \text{ este o r-dezintegrare a lui } \lambda'.$$

Ca urmare, pentru orice funcţie f continuă cu suport compact definită pe R, avem

$$\int f((u,v)(s,t))q(s,t)d\lambda'^v(s,t) = \int f(s,t)q(s,t)d\lambda'^u(s,t).$$

Aplicând teorema 2.1.8 şi teorema 2.1.11, rezultă că

$$(u,v) \to \frac{q(u,v)}{q(v,u)} \text{ este un morfism a.p.t. egal cu } \frac{d\eta}{d\eta^{-1}}.$$

Deoarece η = η^{-1}, rezultă $\dfrac{q(u,v)}{q(v,u)}$ = 1 η-a.p.t. Fie $\Delta = \dfrac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ funcția modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi măsurii cvasi invariante μ_1, şi fie

$$\delta(y) = \Delta(y)\,\frac{q(d(y),r(y))}{q(r(y),d(y))},\ y \in G.$$

Avem δ(y) = Δ(y) ν-a.p.t deoarece $\dfrac{q(u,v)}{q(v,u)}$ = 1 η-a.p.t.

Aplicând lema 2.4.4. în contextul de mai sus obținem:

Lema 5.3.1(Proposition 1 [22]). Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă având spațiul orbitelor U_G/G numărabil separat. Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G şi μ o măsură cvasi invariantă pe U_G. Atunci există un sistem $\{\eta_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G/G\}$ de probabilități pe U_G, o submulțime σ-compactă Z saturată a lui U_G cu complementara μ-nulă şi un sistem de măsuri σ-finite $\{\nu_{u,v}, (u,v) \in R \cap (Z \times Z)\}$ cu următoarele proprietăți

(1) Pentru orice funcție boreliană nenegativă f pe U_G

$$u \to \int f(w)\,d\eta_{\pi(u)}(w)$$

este o funcție boreliană.

(2) Pentru orice $\pi(u) \in U_G/G$ există o probabilitate simetrică pe G, $\lambda_{\pi(u)}$, astfel încât $\eta_{\pi(u)} = d_*(\lambda_{\pi(u)})$.

(3) Pentru orice $u \in U_G$, $\eta_{\pi(u)} \sim d_*(\nu^u)$.

(4) $\nu_{u,v}$ este concentrată pe G_v^u, şi $\nu_{u,v} \neq 0$ pentru orice u,v ∈ Z, u ~ v.

(5) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe $G_0 = G|_Z$,

$$(u,v) \to \int_{G_0} f(y)\,d\nu_{u,v}(y) \quad [: (r,d)(G_0) \to \overline{R}\ ]$$

este o aplicație boreliană.

(6) Pentru orice f ≥ 0 boreliană pe $G_0 = G|_Z$.

$$\int f(y)\,d\nu(y) = \int \int f(y)\,d\nu_{u,v}(y)\,d\eta(u,v)$$

$$=\int\int\int\int f(y)d\nu_{u,v}(y)d\eta_{\pi(w)}(v)d\eta_{\pi(w)}(u)d\mu(w)$$

(7) $\int f(xy)d\nu_{d(x),v}(y)=\int f(y)d\nu_{r(x),v}(y)$ $\begin{cases}(\forall)\ x\in G|Z\\ (\forall)v\in Z, v\sim r(x)\\ (\forall)f\geq 0 \text{ boreliana}\end{cases}$

(8) $\Delta(x)\int_{G_0} f(yx)d\nu_{u,r(x)}(y)=\int_{G_0} f(y)d\nu_{u,d(x)}(y)$ $\begin{cases}(\forall)\ x\in G|Z\\ (\forall)u\in Z, u\sim r(x)\\ (\forall)f\geq 0 \text{ boreliana}\end{cases}$

(9) $\Delta : G|_Z \to R_+^*$ este morfism strict.

(10) $\int f(y)d\nu_{u,v}(y)=\int f(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)$ $(\forall)$ u,v $\in$ Z, u ~ v.

(11) $\nu^u = \int \nu_{u,v}d\eta_{\pi(u)}(v)$ μ-a.p.t.

unde $\mu_1 = \int \eta_{\pi(u)}d\mu(u)$, $\nu = \int \nu^u d\mu_1(u)$ şi $\Delta=\dfrac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ funcţia modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u\in U_G\}$ şi măsurii cvasi invariante $\mu_1 = \int \eta_{\pi(u)}d\mu(u)$

Demonstraţie. Proprietăţile (1)-(3) sunt îndeplinite de sistemul de probabilităţi $\{\eta_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G/G\}$ construit la începutul secţiunii. Proprietăţile (4) -(10) rezultă direct prin aplicarea lemei 2.4.4. Pentru a demonstra (11), să considerăm două funcţii boreliene nenegative f şi g, f definită pe G şi g definită pe U_G. Avem

Avem

$$\int g(u)\left(\int f(x)d\nu^u(x)\right)d\mu_1(u) = \int g(r(x))f(x)d\nu(x)$$

$$= \int\int\int\int g(r(x))f(x)d\nu_{u,v}(x)d\eta_{\pi(w)}(v)d\eta_{\pi(w)}(u)d\mu(w)$$

$$= \int\int g(u)\left(\int\int f(x)d\nu_{u,v}(x)d\eta_{\pi(w)}(v)\right)d\eta_{\pi(w)}(u)d\mu(w)$$

$$= \int g(u)\left(\int\int f(x)d\nu_{u,v}(x)d\eta_{\pi(u)}(v)\right)d\mu_1(u).$$

Deci $\int f(x)d\nu^u(x)=\int\int f(x)d\nu_{u,v}(x)d\eta_{\pi(u)}(v)$ μ_1-a.p.t. ■

Observaţie 5.3.2. Deoarece G este un grupoid local compact cu bază numărabilă având spaţiul orbitelor U_G/G numărabil separat, rezultă că fiecare orbită [u] este local închisă. Ca urmare, fiecare componentă de tranzitivitate $G|_{[u]}$ este un grupoid local compact cu bază numărabilă. Dacă $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pentru G, atunci $\{\nu^u, u \in [w]\}$este un sistem Haar pentru $G|_{[w]}$ pentru orice orbită [w]. Fie μ o măsură cvasi invariantă pentru $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie $\mu_1 = \int \eta_{\pi(u)} d\mu(u)$, $\nu = \int \nu^u d\mu_1(u)$ şi $\Delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ funcţia modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi măsurii cvasi invariante μ_1 (unde $\{\eta_{\pi(u)}, u \in U_G\}$ este sistemul de măsuri construit la începutul acestei secţiuni).

1. În aceste condiţii $\Delta|_{G|[w]}$ este funcţia modulară a sistemului Haar $\{\nu^u, u \in [w]\}$ pe $G|_{[w]}$ şi măsurii cvasi invariante $\eta_{\pi(w)}$ pentru orice orbită [w]. Într-adevăr, fie

$$\nu_{\pi(w)} = \int \nu^u d\eta_{\pi(w)}, \ w \in U_G,$$

fie g o funcţie boreliană nenegativă pe U_G/G şi f o funcţie boreliană nenegativă pe G. Avem

$$\int g(\pi(u))\left(\int f(x) d\nu_{\pi(u)}(x)\right) d\mu(u) = \int g(\pi(u))\left(\int f(x) d\nu^u(x)\right) d\mu_1(u)$$

$$= \int g(\pi(r(x))) f(x) d\nu(x)$$

$$= \int g(\pi(r(x))) f(x) \Delta(x) d\nu^{-1}(x)$$

$$= \int g(\pi(d(x))) f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\nu(x)$$

$$= \int g(\pi(u))\left(\int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\nu^u(x)\right) d\mu_1(u)$$

$$= \int \int g(\pi(u))\left(\int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\nu^u(x)\right) d\eta_{\pi(w)}(u) d\mu(w)$$

$$= \int g(\pi(w))\left(\int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\nu_{\pi(w)}(x)\right) \mu(w).$$

Deci $\int f(x)d\nu_{\pi(u)}(x) = \int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\nu_{\pi(w)}(x)$ a.p.t., şi în consecinţă $\Delta = \frac{d\nu_{\pi(u)}}{d(\nu_{\pi(u)})^{-1}}$ $\eta_{\pi(u)}$-a.p.t.

2. Dacă (μ, $U_G{*}H$, L) este o reprezentare a grupoidului G (definiţia 5.1.12), atunci ($\eta_{\pi(u)}$, $U_G{*}H|_{[u]}$, $L|_{G|[u]}$) este o reprezentare a lui $G|_{[u]}$. Vom nota cu $L_{\pi(u)}$ reprezentarea indusă de ($\eta_{\pi(u)}$, $U_G{*}H|_{[u]}$, $L|_{G|[u]}$). Această reprezentare poate fi privită şi ca o reprezentare a întregului grupoid G relativ la măsura tranzitivă $\eta_{\pi(u)}$.

Fie L o reprezentare a spaţiului $C_c(G)$. Reprezentarea L este unitar echivalentă cu reprezentarea obţinută prin integrarea unei reprezentări (teorema 5.1.21), notate tot L, de forma:

$$(\mu, U_G{*}H , L) \sim (\mu_1, U_G{*}H , L).$$

unde $\mu_1 = \int \eta_{\pi(u)}d\mu(u) \sim \mu$. Relaţia dintre cele două reprezentări este dată de:

$$\langle L(f)\xi_1, \xi_2 \rangle = \int\int f(x)\langle L(x)\xi_1(d(x)), \xi_2(r(x))\rangle\Delta^{-1/2}(x)d\nu^u(x)d\mu_1(u)$$

unde $f \in C_c(G)$, ξ_1, $\xi_2 \in \int_{U_G}^{\oplus} H(u)d\mu_1(u)$, iar Δ este funcţia modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u \in U_G\}$ şi măsurii cvasi invariante μ_1.

Vom nota tot cu $L_{\pi(u)}$ reprezentarea indusă de ($\eta_{\pi(u)}$, $U_G{*}H|_{[u]}$, $L|_{G|[u]}$) pe spaţiul $C_c(G|_{[u]})$. Deci avem

$$\langle L_{\pi(u)}(f)\xi_1\ \xi_2 \rangle = \int\int f(x)\langle L(x)\xi_1(d(x))\ \xi_2(r(x))\rangle\Delta^{-1/2}(x)d\nu^w(x)d\eta_{\pi(u)}(w)$$

unde $f \in C_c(G|_{[u]})$, ξ_1, $\xi_2 \in \int_{U_G}^{\oplus} H(w)d\eta_{\pi(u)}(w)$, deoarece $\Delta|_{G|[u]}$ este funcţia modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^w, w \in [u]\}$ pe $G|_{[u]}$ şi măsurii cvasi invariante $\eta_{\pi(u)}$.

<u>Notaţie 5.3.3.</u> Pentru fiecare funcţie $f \in C_c(G)$, notăm cu

$\| f \| = \sup\{\| L(f) \|$, L reprezentare a $C_c(G)\}$ - C* norma lui f

$\| f \|_* = \sup\{\| L(f) \|$, L reprezentare a $C_c(G)$ ce corespunde unei măsuri tranzitive$\}$

Evident $\| f \|_* \le \| f \|$ pentru orice $f \in C_c(G)$.

<u>*Lema 5.3.4(Lemma 5 [21]).*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă având spațiul orbitelor U_G/G numărabil separat. Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G. Atunci $\| f \|_* = \| f \|$ pentru orice $f \in C_c(G)$.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că $\| f \|_* \geq \| f \|$ pentru orice $f \in C_c(G)$. Fie $\{\eta_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G/G\}$ un sistem de măsuri cu proprietățile din lema 5.3.1. Fie L o reprezentare a lui $C_c(G)$, care se obține prin integrarea unei reprezentări de forma $(\mu_1, U_G*H\ \ , L)$, unde μ este o măsură cvasi invariantă pe U_G iar $\mu_1 = \int \eta_{\pi(u)} d\mu(u)$. Dacă notăm cu

$$\| \xi \|_{\pi(u)} = \left(\int \|\xi(w)\| d\eta_{\pi(u)}(w)\right)^{1/2} \text{ pentru } \xi \in \int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu_1(u),$$

atunci $\| \xi \|^2 = \int \|\xi\|^2_{\pi(u)} d\mu(u)$. Pentru $f \in C_c(G)$, $\xi_1, \xi_2 \in \int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu_1(u)$, avem

$$\begin{aligned}
&|\langle L(f)\xi_1, \xi_2 \rangle| = \\
&= \left|\int \int f(x) \langle L(x)\xi_1(d(x))\ \xi_2(r(x))\rangle \Delta^{-1/2}(x) d\nu^u(x) d\mu_1(u)\right| \\
&= \left|\int \int \int f(x) \langle L(x)\xi_1(d(x))\ \xi_2(r(x))\rangle \Delta^{-1/2}(x) d\nu^w(x) \eta_{\pi(u)}(w) d\mu(u)\right| \\
&\leq \int \left|\langle L_{\pi(u)}(f)\xi_1\ \xi_2 \rangle\right| d\mu(u) \\
&\leq \int \|L_{\pi(u)}(f)\| \|\xi_1\|_{\pi(u)} \|\xi_2\|_{\pi(u)} d\mu(u) \\
&\leq \| f \|_* \int \|\xi_1\|_{\pi(u)} \|\xi_2\|_{\pi(u)} d\mu(u) \\
&\leq \| f \|_* \left(\int \|\xi_1\|^2_{\pi(u)} d\mu(u)\right)^{1/2} \left(\int \|\xi_2\|^2_{\pi(u)} d\mu(u)\right)^{1/2} \\
&\leq \| f \|_* \|\xi_1\| \|\xi_2\|.
\end{aligned}$$

În consecință $\| f \| \leq \| f \|_*$. ■

Aşa cum am observat mai înainte deoarece G este un grupoid local compact cu bază numărabilă având spațiul orbitelor U_G/G numărabil separat, rezultă că fiecare componentă de tranzitivitate $G|_{[u]}$ este un grupoid local compact cu bază numărabilă. Dacă $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pentru G, atunci $\{\nu^u, u \in [w]\}$este un sistem Haar pentru $G|_{[w]}$ pentru orice orbită [w]. Notăm cu $C^*(G, \nu)$ C^*-algebra asociată grupoidului G înzestrat cu sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, şi cu $\|\cdot\|$ C^*- norma corespunzătoare. Pentru fiecare orbită [u], notăm cu $C^*(G|_{[u]}, \nu_{[u]})$ C^*-algebra asociată grupoidului $G|_{[u]}$ înzestrat cu sistemul Haar $\nu_{[u]} = \{\nu^w, w \in [u]\}$ şi cu $\|\cdot\|_{\pi(u)}$ C^*- norma corespunzătoare.

Putem privi spaţiul

$$\{(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} : (\exists)\ f \in C_c(G) \text{ astfel încât } f|_{G|[u]} = f_{\pi(u)} \text{ pentru orice } [u]\}$$

ca o pre- C^*-algebră cu operaţiile

$$(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} + (g_{\pi(u)})_{\pi(u)} = (f_{\pi(u)} + g_{\pi(u)})_{\pi(u)}$$

$$(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} * (g_{\pi(u)})_{\pi(u)} = (f_{\pi(u)} * g_{\pi(u)})_{\pi(u)}$$

$$\left((f_{\pi(u)})_{\pi(u)}\right)^* = (f^*_{\pi(u)})_{\pi(u)}$$

şi cu norma $\| (f_{\pi(u)})_{\pi(u)} \| = \sup \{\| f_{\pi(u)} \|_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G / G \}$.

<u>Teorema 5.3.5 (Theorem 1 [221).</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă având spaţiul orbitelor U_G/G numărabil separat. Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G. Pentru fiecare orbită [u], notăm cu $C^*(G|_{[u]}, \nu_{[u]})$ C^*-algebra asociată grupoidului $G|_{[u]}$ înzestrat cu sistemul Haar $\nu_{[u]} = \{\nu^w, w \in [u]\}$ şi cu $\|\cdot\|_{\pi(u)}$ C^*- norma corespunzătoare. Atunci C^*-algebra asociată grupoidului G înzestrat cu sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ este izomorfă cu C^*-algebra obţinută prin completarea pre- C^*-algebrei

$$\{(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} : (\exists)\ f \in C_c(G) \text{ astfel încât } f|_{G|[u]} = f_{\pi(u)} \text{ pentru orice } [u]\}$$

în norma $\| (f_{\pi(u)})_{\pi(u)} \| = \sup \{\| f_{\pi(u)} \|_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G / G \}$.

Demonstraţie. Este uşor de demonstrat că *-morfismul

$$f \to (f|_{G|[u]})_{\pi(u)}$$

poate fi prelungit la un izomorfism de C^*-algebre. Este suficient să observăm că

$$\sup \| (f|_{G|[u]})_{\pi(u)} \| = \| f \|_* = \| f \|,$$

unde $\| \cdot \|$ este C^*- norma corespunzătoare lui $C^*(G, \nu)$. ■

Observație 5.3.6 Orice grupoid G local compact cu bază numărabilă, având spațiul orbitelor U_G/G spațiu topologic T_0 în raport cu topologia cât, satisface ipoteza teoremei 5.3.5. În particular grupoizii pentru care graficul relației de echivalență induse de G pe U_G este închis satisfac această ipoteză. În acest caz obținem rezultatul din [21] (Theorem 1).

Teorema 5.3.7. Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă ale cărui orbite sunt mulțimi deschise. Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G. Pentru fiecare orbită [u], notăm cu $C^*(G|_{[u]}, \nu_{[u]})$ C^*-algebra asociată grupoidului $G|_{[u]}$ înzestrat cu sistemul Haar $\nu_{[u]} = \{\nu^w, w \in [u]\}$ şi cu $\| \cdot \|_{\pi(u)}$ C^*- norma corespunzătoare. Atunci C^*-algebra asociată grupoidului G înzestrat cu sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ este izomorfă cu suma directă a C^*-algebrelor $C^*(G|_{[u]}, \nu_{[u]})$, i.e cu C^*-algebra obținută prin completarea pre- C^*-algebrei

$$\{(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} \in \prod_{[u]} C^*(G|_{[u]}, \nu_{[u]}) : (\exists)\ I \text{ finită astfel încât } f_{\pi(u)} = 0 \text{ pentru orice } \pi(u) \notin I\}$$

în norma $\| (f_{\pi(u)})_{\pi(u)} \| = \sup \{\| f_{\pi(u)} \|_{\pi(u)}, \pi(u) \in U_G / G \}$.

Demonstrație. Este suficient să observăm că în cazul unui grupoid cu orbite deschise, suportul unei funcții $f \in C_c(G)$ intersectează doar un număr finit de componente de tranzitivitate şi că orice funcție continuă pe o componentă de tranzitivitate poate fi prelungită (cu zero) prin continuitate la întreg grupoidul. Ca urmare, în acest caz algebrele

$$\{(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} \in \prod_{[u]} C_c(G|_{[u]}) : (\exists)\ I \text{ finită astfel încât } f_{\pi(u)} = 0 \text{ pentru orice } \pi(u) \notin I\}$$

şi

$$\{(f_{\pi(u)})_{\pi(u)} : (\exists)\ f \in C_c(G) \text{ astfel încât } f|_{G|[u]} = f_{\pi(u)} \text{ pentru orice } [u]\}$$

coincid, şi deci şi completatele lor. ■

<u>*Corolar 5.3.8.*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă ale cărui orbite sunt mulțimi deschise. Fie $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar pe G. Fie $\{\eta_{\pi(u)}$, $\pi(u) \in U_G/G\}$ un sistem de măsuri cu proprietățile din lema 5.3.1. Atunci C^*-algebra asociată grupoidului G şi sistemului Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ este *-izomorfă cu suma directă $\sum_{[u]} C^*(G_{e(u)}^{e(u)}) \otimes K(L^2(U_G, \eta_{\pi(u)}))$, unde pentru fiecare orbită [u], $e(u) \in [u]$ este o unitate oarecare, $C^*(G_{e(u)}^{e(u)})$ este C^*-algebra asociată grupului local compact $G_{e(u)}^{e(u)}$, iar $K(L^2(U_G, \eta_{\pi(u)}))$ este algebra operatorilor compacți pe spațiul Hilbert $L^2(U_G, \eta_{\pi(u)})$.

Demonstrație. Aplicăm teorema precedentă şi ținem cont că C^*-algebra asociată grupoidului tranzitiv $G|_{[u]}$ înzestrat cu sistemul Haar $\nu_{[u]} = \{\nu^w, w \in [u]\}$ este *-izomorfă cu $C^*(G_{e(u)}^{e(u)}) \otimes K(L^2(U_G, \eta_{\pi(u)}))$. ∎

<u>*Corolar 5.3.9.*</u> Fie G un grupoid local compact cu bază numărabilă ale cărui orbite sunt mulțimi deschise. Presupunem că G este înzestrat cu două sisteme Haar $\nu_i = \{\nu_i^u, u \in U_G\}$, i=1,2. Atunci C^*-algebrele, $C^*(G, \nu_1)$ şi $C^*(G, \nu_2)$, asociate celor două sisteme Haar sunt *-izomorfe.

Demonstrație. Fiecare dintre cele două C^*-algebre este *-izomorfă cu o sumă directă de forma

$$\sum_{[u]} C^*(G_{e(u)}^{e(u)}) \otimes K(L^2(U_G, \eta_{\pi(u)}^i)),\ i = 1,2.$$

În consecință cele două C^*-algebre sunt *-izomorfe. ∎

5.4. GRUPOIZI LOCAL COMPACȚI PENTRU CARE C*-ALGEBRA ŞI C*-ALGEBRA REDUSĂ SUNT EGALE

Vom demonstra, în cazul tranzitiv, reciproca următorului rezultat: dacă G este un grupoid local compact înzestrat cu un sistem Haar continuu şi G este măsurabil amenabil atunci $C^*(G) = C^*_{red}(G)$ (Proposition 6.1.5/pg. 90 [1]).

Fie G un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă.

Fie $\{\nu^u,\ u \in U_G\}$ un sistem Haar continuu pe G, şi fie μ_0 o probabilitate simetrică pe G astfel încât. $\mu = r_*(\mu_0) = d_*(\mu_0)$ să fie cvasi invariantă pentru sistemul Haar şi astfel încât supp $\mu = U_G$.

Fie $e \in U_G$ o unitate fixată. Aplicând Lemma 1.1/ pg. 102 [47] spaţiilor local compacte cu bază numărabilă G^e şi U_G, şi aplicaţiei continue surjective $d : G^e \to U_G$ rezultă că d are o secţiune boreliană regulată $\sigma : U_G \to G^e$ (i.e. σ este o aplicaţie boreliană cu proprietatea că $d(\sigma(u)) = u$ pentru orice $u \in U_G$, şi $\sigma(K)$ este relativ compactă în G^e pentru orice mulţime compactă $K \subset U_G$).

Modificând Δ pe o mulţime boreliană de măsură nulă, putem presupune că Δ este un morfism strict pe G.

Aplicând lema 2.4.5, rezultă că există o familie $\{\nu_{u,v},\ u, v \in U_G\}$ de măsuri σ-finite pe G cu următoarele proprietăţi:

(1) Fiecare $\nu_{u,v}$ este concentrată pe G^u_v.

(2) Pentru orice funcţie boreliană nenegativă $f : G \to \mathbf{R}$,

$$(u,v) \mapsto \int f\, d\nu_{u,v}\ [: U_G \times U_G \to \overline{R} \text{ este boreliană.}$$

(3) Pentru orice funcţie boreliană nenegativă $f : G \to \mathbf{R}$,

$$\int f(xy)d\nu_{d(x),v}(y) = \int f(y)d\nu_{r(x),v}(y) \qquad (\forall)x \in G,\ (\forall)\ v \in U_G$$

(4) Pentru orice funcţie boreliană nenegativă $f : G \to R$,

$$\Delta(x)\int f(yx)d\nu_{u,r(x)}(y) = \int f(y)d\nu_{u,d(x)}(y) \quad (\forall)x \in G,\ (\forall)\ u \in U_G$$

(5) Pentru orice funcţie boreliană nenegativă $f : G \to \mathbf{R}$,

$$\int f(y)d\nu_{u,v}(y) = \int f(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y) \quad (\forall)\ u,v \in U_G$$

(6) $\nu^u = \int \nu_{u,v}\, d\mu(v)$ pentru μ-a.p.t. $u \in U_G$.

Vom stabili legătura care există între reprezentările grupoidului G şi reprezentările grupurilor sale de izotropie. Vom utiliza definiția reprezentării unui grupoid dată în subcapitolul 5.1.

Lema 5.4.1 (Lemma 1 [18]). Fie H un spațiu Hilbert separabil şi fie L : $G_e^e \to L(H)$ o reprezentare grupului G_e^e. Atunci $\widetilde{L} : G \to \mathrm{Iso}(U_G \times H)$ definită prin:

$$\widetilde{L} = (r(x),\ L(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))),\ d(x))$$

este o reprezentare a grupoidului G. Dacă L_1, L_2 sunt două reprezentări unitar echivalente ale grupului G_e^e, atunci reprezentările $\widetilde{L}_1$, $\widetilde{L}_2$ induse pe grupoidul G sunt de asemenea echivalente.

Demonstrație. Fie $(f_n)_n$ un şir fundamental de secțiuni pentru fibratul trivial $U_G \times H$ (de fapt, $(f_n)_n$ este un şir de funcții boreliene pe U_G, cu valori în H, care separă punctele astfel încât pentru orice u din U_G spațiul închis generat de $\{f_n(u),\ n \in \mathbf{N}\}$ este chiar H; H este înzestrat cu structura boreliană determinată de topologia slabă). Deoarece σ este o aplicație boreliană, rezultă că

$$x \mapsto \left(r(x),\ \left\langle L\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)f_n(d(x)), f_n(r(x))\right\rangle, d(x)\right)$$

este boreliană, şi de aici că $\widetilde{L}$ este boreliană. Este uşor de verificat că $\widetilde{L}$ este un morfism strict.

Fie U : $H_1 \to H_2$ un operator unitar astfel încât $L_2(x)U = UL_1(x)$ (∀) $x \in U_G$. Definim

$$V : U_G \to U_G * B(U_G \times H_1,\ U_G \times H_2) = U_G \times L(H_1, H_2)$$

prin V(u) = (u,U) pentru orice $u \in U_G$. Atunci V este un izomorfism care păstrează fibrele de la $U_G \times H_1$ la $U_G \times H_2$ care intervertește $\widetilde{L}_1$ şi $\widetilde{L}_2$. Astfel $(\mu, U_G \times H_1, \widetilde{L}_1)$ şi $(\mu, U_G \times H, \widetilde{L}_2)$ sunt reprezentări echivalente. ■

Observație 5.4.2. Dacă G este un grupoid tranzitiv şi $(\mu, U_G * H, L)$ este o reprezentare a lui G atunci fibratul $U_G * H$ este izomorf cu un fibrat de tipul $U_G \times H$ (pentru orice reprezentare a unui grupoid, submulțimile lui U_G pentru care dim(H(u)) este constantă sunt invariante). De aceea în cazul tranzitiv putem considera că fibratul oricărei reprezentări este un fibrat trivial.

Lema 5.4.3. Fie $L : G \to Iso(U_G * (U_G \times H))$ o reprezentare a grupoidului G. Atunci $L_e = L|G_e^e$ este o reprezentare a grupului G.

Dacă L_1 şi L_2 sunt două reprezentări echivalente ale grupoidului G atunci reprezentările L_e^1 şi L_e^2 induse pe grupul G_e^e sunt de asemenea echivalente.

Demonstraţie. Evidentă. ■

Observaţie 5.4.4. Dacă G este grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă înzestrat cu un sistem Haar fixat, atunci există o unică clasă de măsuri invariante pe U_G , $[\mu]$. Fie μ o probabilitate cvasi-invariantă pentru sistemul Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$, Δ este funcţia modulară a lui μ., şi $\{\nu_{u.v}, u,v \in U_G\}$ sistemul de măsuri asociat cu proprietăţile de la începutul acestui subcapitol. Notăm

$$\nu_1 = \int \nu^u \, d\mu(u) = \int \int \nu_{u,v} \, d\mu(v) d\mu(u) \text{ şi } \nu_0 = \int \Delta^{-1/2} \, d\nu_1 \, .$$

Dacă $f \in L^1(G,\nu_0)$ are proprietatea că

$$\int \int \left(\int |f(x)| \Delta^{-1/2}(x) d\nu_{u,v}(x) \right)^2 d\mu(v) d\mu(u) < \infty \, .$$

atunci f aparţine $C^*(G,\nu)$, conform propoziţiei 5.2.14.

Definiţie 5.4.5. Pentru fiecare $f \in C_c(G_e^e)$ definim $\Phi(f) : G \to C$ prin

$$\Phi(f)(x) = f\left(\sigma(r(x)) x \sigma(d(x))^{-1}\right) \Delta(x)^{1/2} \Delta(\sigma(d(x)))^{-1}, \, x \in G$$

Deoarece σ este boreliană, rezultă că $\Phi(f)$ este o aplicaţie boreliană.

Lema 5.4.6 (Lemma 7 {18}). Pentru orice $f \in C_c(G_e^e)$ avem $\Phi(f) \in C^*(G,\nu)$.

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că

$$\int \int \left(\int |\Phi(f)(x)| \Delta^{-1/2}(x) d\nu_{u,v}(x) \right)^2 d\mu(v) d\mu(u) < \infty$$

$$\int\int\left(\int |\Phi(f)(x)|\Delta^{-1/2}(x)d\nu_{u,v}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)$$

$$=\int\int\left(\int \left|f\left(\sigma(r(x))x\sigma(d(x))^{-1}\right)\right|\Delta^{-1}(\sigma(d(x)))d\nu_{u,v}(x)\right)d\mu(v)d\mu(u)$$

$$=\int\int\left(\int |f(x)|d\nu_{e,e}(x)\right)^2 d\mu(v)d\mu(u)$$

$$=\left(\int |f(x)|d\nu_{e,e}(x)\right)^2 < \infty. \blacksquare$$

<u>*Lema 5.4.7 (Lemma 8 {18}).*</u> Dacă $\|\Phi(f)\|$ este norma lui $\Phi(f)$ relativ la C^*-algebra $C^*(G, \nu)$ şi $\|f\|$ este norma lui f relativ la C^*- algebra $C^*(G_e^e)$, atunci $\|\Phi(f)\| \le \|f\|$.

Demonstraţie. Fie $\widetilde{L}$ o reprezentare a lui $C_c(G)$ în sensul definiţiei 5.1.15. Există o reprezentare (μ, U_G*H, L) a lui G astfel încât $\widetilde{L}$ să fie echivalentă cu reprezentarea obţinută prin integrarea lui (μ, U_G*H, L) (teorema 5.1.21). Putem considera fibratul U_G*H ca fiind $U_G \times H$. Reprezentarea integrată a lui (μ, U_G*H, L) este definită prin

$$\langle L(g)\xi,\eta\rangle = \int\int g(x)\left\langle \hat{L}(x)\xi(d(x)),\eta(r(x))\right\rangle\Delta(x)^{-1/2}d\nu^u(x)d\mu(u)$$

pentru $g \in C_c(G)$ şi $\xi, \eta \in L^2(U_G, H, \mu)$. Astfel

$$|\langle L(\Phi(f))\xi,\eta\rangle|$$

$$\le \left|\int\int\int \Phi(f)(x)\left\langle\hat{L}(x)\xi(d(x)),\eta(r(x))\right\rangle\Delta(x)^{-1/2}d\nu_{u,v}(x)d\mu(u)d\mu(v)\right|$$

$$= \left|\int\int\int f\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)\Delta(\sigma(v))^{-1}\left\langle\hat{L}(x)\xi(d(x)),\eta(r(x))\right\rangle d\nu_{u,v}(x)d\mu(u)d\mu(v)\right|$$

$$= \left|\int\int\int f(x)\left\langle\hat{L}\left(\sigma(u)^{-1}x\sigma(v)\right)\xi(v),\eta(u)\right\rangle d\nu_{e,e}(x)d\mu(u)d\mu(v)\right|$$

$$= \left|\int\int\int f(x)\left\langle\hat{L}(x)\hat{L}(\sigma(v))\xi(v),\hat{L}(\sigma(u))\eta(u)\right\rangle d\nu_{e,e}(x)d\mu(u)d\mu(v)\right|$$

$$\le\int\int\left|\int f(x)\left\langle\hat{L}(x)\hat{L}(\sigma(v))\xi(v),\hat{L}(\sigma(u))\eta(u)\right\rangle d\nu_{e,e}(x)\right|d\mu(u)d\mu(v)$$

$$\leq \int \int \|f\| \left\| \hat{L}(\sigma(v))\xi(v) \right\| \left\| \hat{L}(\sigma(u))\eta(u) \right\| d\mu(u)d\mu(v)$$

$$\leq \left(\int \|f\| \|\xi(v)\|^2 d\mu(v) \right)^{1/2} \left(\int \|f\| \|\eta(u)\|^2 d\mu(u) \right)^{1/2}$$

$$= \|f\| \|\xi\|_2 \|\eta\|_2$$

Deci avem $\|L(\Phi(f))\| \leq \|f\|$ => $\left\|\tilde{L}(\Phi(f))\right\| \leq \|f\|$ => $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|$. ■

Lema 5.4.8 (Lemma 9 {18}). Dacă $\|\Phi(f)\|$ este norma lui Φ(f) relativ la C^*-algebra $C^*(G)$ şi $\|f\|$ este norma lui f relativ la C^*- algebra $C^*(G_e^e)$, atunci $\|f\| \leq \|\Phi(f)\|$.

Demonstrație. Fie L o reprezentare a lui $L^1(G_e^e)$. Notăm de asemenea cu L reprezentarea de pe grupul G_e^e care induce pe L prin integrare relativ la măsura Haar. Fie $\tilde{L}$ reprezentarea indusă pe G de L descrisă în lema 5.4.1. Atunci

$$\left| \langle L(f)\xi, \eta \rangle \right|$$

$$= \left| \int f(x) \langle L(x)\xi, \eta \rangle d\nu_{e,e}(x) \right|$$

$$= \left| \int \int \int f(x) \langle L(x)\xi, \eta \rangle d\nu_{e,e}(x) d\mu(u) d\mu(v) \right|$$

$$= \left| \int \int \int f\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right) \left\langle L\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)\xi, \eta \right\rangle \Delta(\sigma(u))^{-1} d\nu_{u,v}(x) d\mu(u) d\mu(v) \right|$$

$$= \left| \int \int \int \Phi(f)(x) \left\langle \hat{\tilde{L}}(x)\xi, \eta \right\rangle \Delta(x)^{-1/2} d\nu_{u,v}(x) d\mu(u) d\mu(v) \right|$$

$$= \left| \int \int \Phi(f)(x) \left\langle \hat{\tilde{L}}(x)\xi, \eta \right\rangle \Delta(x)^{-1/2} d\nu^u(x) d\mu(u) \right|$$

$$\leq \|\Phi(f)\| \|\xi\| \|\eta\|$$

Deci avem $\|L(f)\| \leq \|\Phi(f)\|$ => $\|f\| \leq \|\Phi(f)\|$. ■

Lema 5.4.9 (Lemma 10 {18}). $\|f\|_{red} = \|\Phi(f)\|_{red}$.

Demonstrație. Pentru fiecare u $\in U_G$, notăm prin ν_u imaginea lui ν^u prin aplicația $x \to x^{-1}$. Pentru orice funcție boreliană nenegativă g pe G avem

$$\int g(y)d\nu_u(y) = \int g(y^{-1})d\nu^u(y)$$

$$= \int \int g(y^{-1})d\nu_{u,v}(y)d\mu(v)$$

$$\int \int g(y)\Delta(y^{-1})d\nu_{v,u}(y)d\mu(v).$$

Pentru orice unitate $v \in U_G$, orice $\xi \in L^2(G, \nu_v)$ şi $x \in G_v^u$ avem

$$\Phi(f) * \xi(x) =$$

$$= \int \int \Phi(f)(xy)\xi(y^{-1})d\nu_{v,w}(y)d\mu(w)$$

$$= \int \int f(\sigma(r(x))xy\sigma(d(y))^{-1})\Delta(xy)^{1/2}\Delta(\sigma(d(y)))^{-1}\xi(y^{-1})d\nu_{v,w}(y)d\mu(w)$$

$$= \int \int f(\sigma(u)xy\sigma(w)^{-1})\Delta(xy)^{1/2}\Delta(\sigma(w))^{-1}\xi(y^{-1})d\nu_{v,w}(y)d\mu(w)$$

$$= \int \int f(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\sigma(v)y\sigma(w)^{-1})\Delta(xy)^{1/2}\Delta(\sigma(w))^{-1}\xi(y^{-1})d\nu_{v,w}(y)d\mu(w)$$

$$= \int \int f(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}y)\Delta(x\sigma(v)^{-1}y\sigma(w))^{1/2}\Delta(\sigma(w))^{-1}\xi((\sigma(v)^{-1}y\sigma(w))^{-1})d\nu_{e,e}(y)d\mu(w)$$

$$= \Delta(x\sigma(v)^{-1})^{1/2}\int f * \xi_{v,w}(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1})d\mu(w)$$

$$= \Delta(x)^{1/2}\Delta(\sigma(v))^{-1/2}\int f * \xi_{v,w}(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1})d\mu(w)$$

unde

$$\xi_{v,w}(y) = \Delta(y^{-1}\sigma(w))^{1/2}\,\xi(\,(\sigma(v)^{-1}\,y^{-1}\,\sigma(w)\,)^{-1}\,)$$
$$= \Delta(\sigma(w)^{-1}\,y)^{-1/2}\,\xi(\sigma(w)^{-1}\,y\,\sigma(v))^{-1})$$

Se observă că

$$\int |\xi_{v,w}(y)|^2 d\nu_{e,e}(y) =$$

$$= \int \Delta(\sigma(w)^{-1}y)^{-1}|\xi((\sigma(w)^{-1}y\sigma(v)))|^2 d\nu_{e,e}(y)$$

$$= \int \Delta(\sigma(w)^{-1}y\sigma(v))^{-1}\Delta(\sigma(v))|\xi((\sigma(w)^{-1}y\sigma(v)))|^2 d\nu_{e,e}(y)$$

$$= \int \Delta(y)^{-1}|\xi(y)|^2 d\nu_{w,v}(y).$$

În calculele următoare notăm

$\left(\int |\xi(y)|^2 d\nu_v(y)\right)^{1/2} = ||\xi||_2$ şi $\left(\int |\xi_{v,w}(y)|^2 d\nu_{e,e}(y)\right)^{1/2} = ||\xi_{v,w}||_2$.

Avem

$$\int |\Phi(f)*\xi(x)|^2 d\nu_v(x) =$$

$$= \int \Delta(x)\Delta(\sigma(v))^{-1}\left|\int f*\xi_{v,w}\left(\sigma(r(x))x\sigma(v)^{-1}\right)d\mu(w)\right|^2 d\nu_v(x)$$

$$\leq \int \Delta(x)\Delta(\sigma(v))^{-1}\int \left|f*\xi_{v,w}\left(\sigma(r(x))x\sigma(v)^{-1}\right)\right|^2 d\mu(w)d\nu_v(x)$$

$$= \int\int \Delta(\sigma(v))^{-1}\int \left|f*\xi_{v,w}\left(\sigma(r(x))x\sigma(v)^{-1}\right)\right|^2 d\mu(w)d\nu_{u,v}(x)d\mu(u)$$

$$= \int\int \Delta(\sigma(v))^{-1}\int \left|f*\xi_{v,w}\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)\right|^2 d\nu_{u,v}(x)d\mu(w)d\mu(u)$$

$$= \int\int\int \left|f*\xi_{v,w}(x)\right|^2 d\nu_{e,e}(x)d\mu(w)d\mu(u)$$

$$\leq \int\int \|f\|_{red}^2\|\xi_{v,w}\|_2^2 d\mu(w)d\mu(u)$$

$$= \|f\|_{red}^2 \int\int\int \Delta(y)^{-1}|\xi(y)|^2 d\nu_{w,v}(y)d\mu(w)d\mu(u)$$

$$= \|f\|_{red}^2 \int\int |\xi(y)|^2 d\nu_v(y)d\mu(u)$$

$$= \|f\|_{red}^2 \int |\xi(y)|^2 d\nu_v(y)$$

$$= \|f\|_{red}^2 \|\xi\|_2^2$$

De aici rezultă că $||\Phi(f)*\xi||_2 \leq ||f||_{red}\, ||\xi||_2$ şi de aceea $||\Phi(f)||_{red} \leq ||f||_{red}$.

Pentru demonstra inegalitatea opusă, considerăm ξ_e, $\eta_e \in L^2(G_e^e, \nu_{e,e})$ şi observăm că

$$\int f*\xi_e(x)\overline{\eta_e(x)}d\nu_{e,e}(x)$$

$$= \int\int\int f*\xi_e(x)\overline{\eta_e(x)}d\nu_{e,e}(x)d\mu(w)d\mu(u)$$

$$= \int\int\int \Delta(\sigma(v))^{-1} f*\xi_e\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)\overline{\eta_e\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)}d\nu_{u,v}(x)d\mu(w)d\mu(u)$$

Pe de altă parte

$$\Delta(\sigma(v))^{-1/2}\int f*\xi_e\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)\overline{\eta_e\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)}d\mu(w)=$$

$$=\Delta(\sigma(v))^{-1/2}\int\int f\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}y\right)\xi_e\left(y^{-1}\right)d\nu_{e,e}(y)d\mu(w)$$

$$=\Delta(\sigma(v))^{-1/2}\int\int f\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}y\sigma(w)\sigma(w)^{-1}\right)\xi_e\left(y^{-1}\right)d\nu_{e,e}(y)d\mu(w)$$

$$=\Delta(\sigma(w))^{-1}\int\int \Delta(y)^{1/2}f\left(\sigma(u)xy\sigma(w)^{-1}\right)\xi\left(y^{-1}\right)d\nu_{v,w}(y)d\mu(w)$$

$$=\Delta(x)^{-1/2}\ \Phi(f)*\xi(x)$$

unde

$$\xi(y) = \xi_e(\ (\sigma(d(y))\ y^{-1}\ \sigma(r(y))^{-1})^{-1}\ )\ \Delta(\sigma(d(y)))^{-1/2}\ \Delta(y)^{1/2}$$
$$= \xi_e(\sigma(r(y))\ y\ \sigma(d(y))^{-1})\ \Delta(\sigma(d(y)))^{-1/2}\ \Delta(y)^{1/2}$$

Se observă că

$$\int |\xi(y)|^2 d\nu_v(y)$$

$$=\int\int |\xi(y)|^2\Delta(y)^{-1}d\nu_{w,v}(y)d\mu(w)$$

$$=\int\int \left|\xi_e\left(\sigma(r(y))y\sigma(d(y))^{-1}\right)\right|^2\Delta(\sigma(d(y)))^{-1}d\nu_{w,v}(y)d\mu(w)$$

$$=\int\int \left|\xi_e\left(\sigma(w)y\sigma(v)^{-1}\right)\right|^2\Delta(\sigma(v))^{-1}d\nu_{w,v}(y)d\mu(w)$$

$$=\int\int |\xi_e(y)|^2 d\nu_{e,e}(y)d\mu(w)$$

$$=\|\xi_e\|_2^2$$

De asemenea dacă notăm

$$\eta(y) = \eta_e(\sigma(r(y))\ y\ \sigma(d(y))^{-1})\ \Delta(\sigma(d(y)))^{-1/2}\ \Delta(y)^{1/2}$$

atunci

$$\int |\eta(y)|^2 d\nu_v(y) = \int\int |\eta_e(y)|^2 d\nu_{e,e}(y)d\mu(w)$$
$$= \|\eta_e\|_2^2$$

Astfel obținem

$$\int f*\xi_e(x)\overline{\eta_e(x)}d\nu_{e,e}(x)=$$

$$=\int\int\int \Delta(\sigma(v))^{-1} f * \xi_e\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)\overline{\eta_e\left(\sigma(u)x\sigma(v)^{-1}\right)}d\nu_{u,v}(x)d\mu(w)d\mu(u)$$

$$=\int\int \Delta(x)^{-1}\Phi(f) * \xi(x)\overline{\eta(x)}d\nu_{u,v}(x)d\mu(u)$$

$$=\int \Phi(f) * \xi(x)\overline{\eta(x)}d\nu_v(x)$$

Deoarece

$$\langle f * \xi_e, \eta_e\rangle_{L^2\left(G_e^e, \nu_{e,e}\right)} = \langle \Phi(f) * \xi, \eta\rangle_{L^2\left(G_v, \nu_v\right)}$$

rezultă că

$$\left|\langle f * \xi_e, \eta_e\rangle_{L^2\left(G_e^e, \nu_{e,e}\right)}\right| \le \|\Phi(f)\|_{red}^2 \|\xi\|_2^2 \|\eta\|_2^2$$

$$= \|\Phi(f)\|_{red}^2 \|\xi_e\|_2^2 \|\eta_e\|_2^2$$

În consecință, $||f||_{red} \le ||\Phi(f)||_{red}$. ■

<u>*Propoziție 5.4.10 (Theorem 10 [18]).*</u> Fie G un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$. Dacă $C^*(G,\nu)=C^*_{red}(G,\nu)$, atunci G este măsurabil amenabil.

Demonstrație. Din $C^*(G,\nu)=C^*_{red}(G,\nu)$ rezultă că $\|g\|_{red} = \|g\|$ pentru orice g din $C^*(G)$. Fie $f \in C_c(G_e^e)$. Avem

$$\|f\|_{red} = \|\Phi(f)\|_{red} = \|\Phi(f)\| = \|f\|$$

Deci $C^*(G_e^e)=C^*_{red}(G_e^e)$. Egalitatea $C^*(G_e^e)=C^*_{red}(G_e^e)$ implică faptul că G_e^e este un grup amenabil. G este amenabil pentru că este un grupoid tranzitiv cu grupurile de izotropie amenabile. ■

5.5. REPREZENTĂRI AMENABILE DE GRUPOIZI BORELIENI

Vom defini o noțiune de amenabilitate pentru reprezentările unitare ale unui grupoid. Grupoizii amenabili vor fi caracterizați prin amenabilitatea tuturor reprezentărilor lor. Vom demonstra un analog al "proprietății de anulare" a unei mediei invariante pe un grupoid local-compact cu grupurile de izotropie necompacte, în versiune necomutativă. Toate acestea extind rezultatele din cazul grupurilor local-compacte prezentate în [5].

Notații 5.5.1.

Fie G un grupoid borelian , { ν^u , u $\in$ U_G } un sistem Haar pe G, μ o probabilitate cvasi invariantă asociată acestui sistem Haar. Notăm cu $\nu = \int \nu^u \, d\mu(u)$ și

cu $\Delta = \dfrac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ funcția modulară.

Fie $U_G * H$ un fibrat Hilbert analitic, și $(f_n)_n$ un șir fundamental de secțiuni pentru acest fibrat. Notăm cu $\int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu(u)$ mulțimea :

$$\{ \xi : U_G \to \bigcup_{u \in U_G} H(u) \ : \xi \text{ secțiune măsurabilă și } \int \|\xi(u)\|^2 d\mu(u) < \infty \}$$

(ξ secțiune măsurabilă <=> $\xi(u) \in H(u)$ $(\forall)$ u $\in$ U_G și $u \to \langle \xi(u), f_n(u) \rangle$ măsurabilă $(\forall)$ n). Evident, $\int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu(u)$ este spațiu Hilbert cu produsul scalar :

$$\langle f, g \rangle = \int \langle f(u), g(u) \rangle d\mu(u) \ , \quad f,g \in \int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu(u).$$

Notăm cu $B(U_G * H)$ mulțimea:

$$\left\{ A : U_G \to \bigcup_{u \in U_G} \{T : H(u) \to H(u) \text{ liniar și mărginit}\} \text{ cu proprietățile} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1)\ A(u) : H(u) \to H(u) \\ 2)\ u \mapsto \langle A(u) f_n(u), f_m(u) \rangle \text{ măsurabilă } (\forall)\ n,m \\ 3)\ \| u \mapsto \| A(u) \| \|_{\infty} < \infty \end{array} \right\}$$

Un element A al acestei mulțimi dă naștere unui operator decompozabil de la $\int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu(u)$ la $\int_{U_G}^{\oplus} H(u) d\mu(u)$ care va fi notat tot cu A:

$$A\xi(u) = A(u)\xi(u)\ ,\ \xi \in \int_{U_G}^{\oplus} H(u)d\mu(u).$$

Aceşti operatori comută cu operatorii de înmulţire cu funcţii din $L^{\infty}(U_G)$. Reciproc, orice operator liniar şi mărginit A : $\int_{U_G}^{\oplus} H(u)d\mu(u) \to \int_{U_G}^{\oplus} H(u)d\mu(u)$ care comută cu operatorii de înmulţire cu funcţii din $L^{\infty}(U_G)$ este dat de un element al spaţiului $B(U_G*H)$.

Pentru un spaţiu Hilbert H notăm cu B(H) spaţiul operatorilor liniari şi mărginiţi pe H.

Este cunoscută echivalenţa dintre amenabilitatea grupoidului (G,ν,μ) şi existenţa unei familii $\{ m^u , u \in U_G \}$ de stări m^u pe $L^{\infty}(G,\nu^u)$ astfel încât

(*) (a) $u \mapsto m^u(\varphi)$ este măsurabilă $(\forall)\ \varphi \in L^{\infty}(G,\nu)$

(b) $m^{d(x)}(\varphi(x\,\cdot)) = m^{r(x)}(\varphi)$ $(\forall)\ \varphi \in L^{\infty}(G,\nu^{r(x)})$ ν-a.p.t.

Vom introduce o noţiune de amenabilitate pentru o reprezentare unitară oarecare a grupoidului G.

<u>*Definiţie 5.5.2 (Definition 2 [20]).*</u> Reprezentarea unitară (U_G*H, π,μ) grupoidului G se numeşte *amenabilă* dacă există o familie invariantă de stări $\{ M^u , u \in U_G \}$ pe $B(U_G*H)$, i.e.

(1) $M^u \in B(H(u))^*$, $M^u \geq 0$, $M^u(I) = 1$

(2) $u \mapsto M^u(A(u))$ măsurabilă $(\forall)\ A \in B(U_G*H)$

(3) $M^{r(x)}(\pi(x)A\pi(x^{-1})) = M^{d(x)}(A)$, $(\forall)\ A \in B(H(d(x)))$ ν-a.p.t.

<u>*Teoremă 5.5.3(Theorem 3 [20]).*</u> Fie (U_G*H, π,μ) o reprezentare unitară a grupoidului G.

1) Dacă H(u) este finit dimensional μ-a.p.t. $u \in U_G$, atunci π este amenabilă.

2) Dacă (U_G*H, π,μ) conţine o subreprezentare amenabilă (U_G*K, π,μ), atunci (U_G*H, π,μ) este amenabilă.

((U_G*K, π,μ) subreprezentare a lui(U_G*H, π,μ) <=>

- K(u) subspațiu închis al lui H(u) pentru orice u $\in U_G$,
- (u $\to$ P(u)) $\in$ B(U_G*H), unde P(u) proiectorul asociat lui K(u),
- $\pi(x)(K(d(x)) \subset K(r(x))$ pentru ν-a.p.t. x $\in$G.)

Demonstrație. 1) Definim $M^u(A)=\dfrac{1}{\dim(H(u))}\mathrm{Tr}(A)$ pentru orice A $\in$ B(H(u)) şi pentru μ-a.p.t. u $\in U_G$. Atunci

$M^{r(x)}(\pi(x)A\pi(x^{-1}))=\dfrac{1}{\dim(H(r(x)))}\mathrm{Tr}(\pi(x)A\pi(x^{-1}))=\dfrac{1}{\dim(H(r(x)))}\mathrm{Tr}(A)$. Pe de altă parte, deoarece $\pi(x)$ este un operator unitar de la H(d(x)) la H(r(x)) rezultă că dim(H(d(x))) = dim (H(r(x))) , şi deci $M^{r(x)}(\pi(x)A\pi(x^{-1}))=M^{d(x)}(A)$.

2) Dacă { M^u , u $\in U_G$ } este o familie invariantă de stări pe B(U_G*K) definim $\widetilde{M}^u(A)=M^u(P(u)A|K(u))$ pentru orice A $\in$ B(H(u)) şi pentru orice u $\in U_G$. Se verifică uşor că { $\widetilde{M}^u$, u $\in U_G$ }este o familie invariantă de stări pe B(U_G*H).

<u>*Teoremă 5.5.4 (Theorem 4 [20]).*</u> Fie (U_G*H, π,μ) o reprezentare unitară amenabilă a grupoidului G cu proprietatea că pentru orice u $\in U_G$ nu există nici un subspațiu închis finit dimensional al lui H(u) care să fie π(x)-invariant pentru orice x $\in G_u^u$. Fie { M^u , u $\in U_G$ } este o familie invariantă de stări pe B(U_G*H). Atunci pentru μ-a.p.t. u $\in U_G$ rezultă $M^u(A)=0$ pentru orice A $\in$ B(H(u)) cu A operator compact.

Demonstrație. Fie u $\in U_G$ fixat , şi fie K(H(u)) spațiul operatorilor compacți pe H(u). Fie Φ(u) = $M^u|K(H(u))$ $\in$ K(H(u))*. Atunci există un operator nuclear S(u) pe H(u) astfel încât

$$\Phi(u)(A)=\mathrm{Tr}(S(u)A)\ , A\in K(H(u)).$$

Avem S(u) $\geq$ 0 deoarece Φ(u) $\geq$ 0. Presupunem prin absurd că S(u) $\neq$ 0. Atunci S(u) are o valoare proprie nenulă. Fie E(u) subspațiul propriu corespunzător acestei valori proprii. Deoarece familia de stări { M^u , u $\in U_G$ } este invariantă rezultă că S(u)π(x) =

$\pi(x)S(u)$ pentru orice $x \in G_u^u$, şi de aici rezultă că $E(u)$ este $\pi(x)$-invariant pentru orice $x \in G_u^u$. Aceasta este o contradicţie, şi deci $S(u) = 0$, ceea ce implică $M^u \big|K(H(u)) = 0$.

Observaţie 5.4.5 Teorema de mai sus poate fi interpretată ca un rezultat analog cu următorul: Dacă grupoidul local-compact cu bază numărabilă (G,ν,μ) are μ-aproape toate grupurile de izotropie necompacte şi funcţia modulară Δ mărginită pe o vecinătate simetrică a spaţiului unităţilor U_G, şi dacă m este o medie invariantă pe G ce provine dintr-o medie aproximativă complet invariantă, atunci $m(f) = 0$ (μ-a.p.t.) pentru orice funcţie $f : G \to \mathbf{C}$ continuă care se anulează la infinit.

Teoremă 5.5.6 (Theorem 6 [20]). Pentru grupoidul cu măsură (G,ν,μ) următoarele condiţii sunt echivalente:

(1) (G,ν,μ) este amenabil.

(2) Orice reprezentare unitară (U_G*H, π,μ) a lui G este amenabilă.

(3) Reprezentarea regulată stângă Reg_μ este amenabilă .

Demonstraţie . (1) => (2) . Fie $\{ m^u , u \in U_G \}$este o familie de stări cu proprietăţile **(*)** , şi (U_G*H, π,μ) o reprezentare unitară a lui G. Alegem un element S $\in B(U_G*H)$ cu $S(u) \geq 0$ şi $\|S(u)\|_1 = 1$ pentru orice $u \in U_G$. Pentru fiecare $u \in U_G$ şi fiecare $A \in B(H(u))$ definim $\varphi_A^u : G^u \to C$ prin $\varphi_A^u(x) = Tr(A\pi(x)S(d(x))\pi(x^{-1}))$, $x \in G$. Atunci avem

$$\left|\varphi_A^u(x)\right| \leq \|A\pi(x)S(d(x))\pi(x^{-1})\|_1 \leq \|\pi(x^{-1})A\pi(x)\| \|S(d(x))\|_1 \leq \|A\|$$

şi în consecinţă $\varphi_A^u \in L^\infty(G, \nu^u)$. Pentru fiecare $u \in U_G$ definim $M^u : B(H(u)) \to \mathbf{C}$, prin

$$M^u(A) = m^u(\varphi_A^u) \text{ , } A \in B(H(u)).$$

Verificăm invarianţa familiei de stări construite.

$$M^{d(x)}(A) = m^{d(x)}\left(y \mapsto Tr(A\pi(y)S(d(y))\pi(y^{-1}))\right)$$

$$=m^{r(x)}\left(y\mapsto \operatorname{Tr}\left(A\pi\left(x^{-1}y\right)S\left(d\left(x^{-1}y\right)\right)\pi\left(\left(x^{-1}y\right)^{-1}\right)\right)\right)$$
$$=m^{r(x)}\left(y\mapsto \operatorname{Tr}\left(A\pi\left(x^{-1}\right)\pi(y)S(d(y))\pi\left(y^{-1}\right)\pi(x)\right)\right)$$
$$=m^{r(x)}\left(\varphi^{r(x)}_{\pi(x)A\pi\left(x^{-1}\right)}\right)=M^{r(x)}\left(\pi(x)A\pi\left(x^{-1}\right)\right)$$

pentru ν-a.p.t. $x \in G$ şi $A \in B(H(d(x)))$.

Implicaţia (2) => (3) este trivială.

Demonstrăm (3) => (1). Pentru fiecare $u \in U_G$ fie T^u_φ operatorul de înmulţire pe $L^2(G,\nu^u)$ prin $\varphi \in L^\infty(G,\nu^u)$. Avem $T^u_1 = 1$, $T^u_\varphi \geq 0$ dacă $\varphi \geq 0$, şi

$$\operatorname{Re} g_\mu(x)T^{d(x)}_\varphi \operatorname{Re} g_\mu\left(x^{-1}\right)=T^{r(x)}_{{}_x\varphi},\ \varphi\in L^\infty\left(G,\nu^{d(x)}\right).$$

Pentru $u \in U_G$ şi $\varphi \in L^\infty(G, \nu^u)$ definim $m^u(\varphi) = M^u(T^u_\varphi)$. Invarianţa familiei de stări $\{m^u, u \in U_G\}$ rezultă din

$$m^{r(x)}\left({}_x\varphi\right)=M^{r(x)}\left(T^{r(x)}_{{}_x\varphi}\right)=M^{r(x)}\left(\operatorname{Re} g_\mu(x)T^{d(x)}_\varphi \operatorname{Re} g_\mu\left(x^{-1}\right)\right)=M^{d(x)}\left(T^{d(x)}_\varphi\right)=m^{d(x)}(\varphi)$$

pentru orice $\varphi \in L^\infty(G,\nu^{r(x)})$ şi ν-a.p.t. $x \in G$.

5.6. C* -SISTEME DINAMICE GRUPOIDALE

Noţiunea de C^*-sistem dinamic grupoidal a fost introdusă de Masuda în [52]. În acest subcapitol G este un grupoid topologic local-compact cu bază numărabilă, $\left\{\nu^u\ \mu\in U_G\right\}$ este un sistem Haar continuu fixat, iar μ o măsură quasi-invariantă fixată. Notăm $\nu=\int \nu^u d\mu(u)$ şi $\Delta=\dfrac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ funcţia modulară.

A este o C^*- algebră, H este un spaţiu Hilbert cu proprietatea că A este *-izomorfă cu *- subalgebră a lui B(H) (mulţimea operatorilor liniari şi mărginiţi pe H), iar $\pi : A \to B(H)$ este *- morfism injectiv.

<u>Definiţie 5.6.1</u> Se numeşte C^*- sistem dinamic grupoidal (sau C^* sistem grupoidal) un triplet (A, G, ρ) unde A este o C^*- algebră, G un grupoid topologic

local-compact cu bază numărabilă pentru care există un sistem Haar continuu, şi $\rho : G \to Aut(A)$ este un morfism de grupoizi continuu(in sensul ca $x \mapsto \rho_x(a)$ $[:G \to A]$continuă oricare ar fi a $\in$ A; pe A se consideră topologia normei) (Definition 2.1/pg. 960 [52]).

Se notează cu

$$C_c(G,A) = \{f: G \to A, \text{ f continuă cu suport compact}\}.$$

Pentru f şi g $\in C_c(G,A)$ definim:

$$f \tilde{*} g(x) = \int \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)g(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$f^{\#}(x) = \rho_x\left(f\left(x^{-1}\right)^*\right)$$

<u>Propoziţie 5.6.2.</u> Cu aceste operaţii $C_c(G,A)$ devine *- algebră topologică.

Demonstraţie. Pentru fiecare $x \in G$ funcţia

$$y \mapsto \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)g(y) \ \left[: \ G^{r(x)} \to A\right]$$

este continuă cu suport compact, deci integrabilă în raport cu $\nu^{r(x)}$. $f \tilde{*} g(x)$ este nenul dacă şi numai dacă există $y \in G^{r(x)}$ astfel încât. $f\left(y^{-1}x\right)$ şi $g(y)$ sunt nenule. Deci $supp\left(f \tilde{*} g\right) \subset supp(f)supp(g)$. Continuitatea aplicaţiei $f \tilde{*} g$ rezultă aplicând un raţionament analog cu cel folosit de J. Renault în [9] 1.1/pg.48. Demonstrăm că $\tilde{*}$ este asociativă. Fie $f, g, h \in C_c(G,A)$.

$$f \tilde{*} \left(g \tilde{*} h\right)(x) = \int \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)g \tilde{*} h(y)d\nu^{r(x)}(y).$$

$$= \int \int \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\rho_z\left(g\left(z^{-1}y\right)\right)h(z)d\nu^{\overset{=r(x)}{r(y)}}(z)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \int \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\rho_z\left(g\left(z^{-1}y\right)\right)h(z)d\nu^{\overset{=r(z)}{r(x)}}(y)d\nu^{r(x)}(z)$$

$$= \int \int \rho_{zy}\left(f\left(y^{-1}z^{-1}x\right)\right)\rho_z\left(g(y)\right)h(z)d\nu^{d(z)}(y)d\nu^{r(x)}(z)$$

$$= \int \int \rho_z\left(\rho_y\left(f\left(y^{-1}z^{-1}x\right)\right)\left(g(y)\right)\right)h(z)d\nu^{d(z)}(y)d\nu^{r(x)}(z)$$

$$= \int \rho_z \left(\int \rho_y \left(f\left(y^{-1}z^{-1}x\right)\right)\left(g(y)\right) d\nu^{d(z)}(y) \right) h(z) d\nu^{r(x)}(z)$$

$$= \int \rho_z \left(f \tilde{*} g\left(z^{-1}x\right)\right) h(z) d\nu^{r(x)}(z)$$

$$= \left(f \tilde{*} g\right) \tilde{*} h(x)$$

Se observă că $f^{\#}$ este continuă şi că $\operatorname{supp} f^{\#} = \left(\operatorname{supp} f\right)^{-1}$. Deci $f^{\#} \in C_c(G, A)$.

$$f^{\#\#}(x) = \rho_x \left(f^{\#}\left(x^{-1}\right)^* \right) = \rho_x \left(\rho_{x^{-1}} \left(f(x)^* \right)^* \right) = \rho_x \left(\rho_{x^{-1}} \left(f(x) \right) \right) = f(x)$$

$$\left(f \tilde{*} g\right)^{\#}(x) = \rho_x \left(f \tilde{*} g(x^{-1})^* \right)$$

$$= \rho_x \left(\left(\int \rho_y \left(f\left(y^{-1}x^{-1}\right)\right) g(y) d\nu^{r(x^{-1})}(y) \right)^* \right)$$

$$= \left(\int \rho_{xy} \left(f\left(y^{-1}x^{-1}\right)\right) \rho_x g(y) d\nu^{d(x)}(y) \right)^*$$

$$= \left(\int \rho_y \left(f\left(y^{-1}\right)\right) \rho_x \left(g\left(x^{-1}y\right)\right) d\nu^{r(x)}(y) \right)^*$$

$$= \int \left(\rho_y \left(f\left(y^{-1}\right)\right) \rho_x \left(g\left(x^{-1}y\right)\right)\right)^* d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \rho_x \left(g\left(x^{-1}y\right)^* \right) \rho_y \left(f\left(y^{-1}\right)^* \right) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \rho_y \left(\rho_{y^{-1}x} \left(g\left(\left(y^{-1}x\right)^{-1}\right)^* \right) \right) f^{\#}(y) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \rho_y \left(g^{\#}\left(y^{-1}x\right)\right) f^{\#}(y) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= g^{\#} \tilde{*} f^{\#}(x).$$

Arătăm că operaţiile definite sunt continue (relativ la topologia limită inductivă de pe $C_c(G, A)$). Dacă $f_n \to f$ şi $g_m \to g$, atunci există mulţimile compacte K şi L astfel încât $\operatorname{supp} f_m \subset K$ şi $\operatorname{supp} g_m \subset L$. Rezultă $\operatorname{supp} f_n \tilde{*} g_m \subset KL$.

$$\left\| f \tilde{*} g(x) - f_n \tilde{*} g_m(x) \right\| \le \int \left\| \rho_y \left(f\left(y^{-1}x\right)\right) g(y) - \rho_y \left(f_n\left(y^{-1}x\right)\right) g_m(y) \right\| d\nu^{d(x)}(y)$$

$$\le \int \left\| \rho_y \left(f\left(y^{-1}x\right) - f_n\left(y^{-1}x\right)\right) \right\| \, \| g(y) \| \, d\nu^{r(x)}(y) +$$

$$+ \int \left\| \rho_y \left(f_n\left(y^{-1}x\right)\right) \right\| \, \| g(y) - g_m(y) \| \, d\nu^{r(x)}(y)$$

$$\leq \int \left\| f\left(y^{-1}x\right) - f_n\left(y^{-1}x\right) \right\| \, || \, g(y) \, || \, d\nu^{r(x)}(y) + \int \left\| f_n\left(y^{-1}x\right) \right\| \, || \, g(y) - g_m(y) \, || \, d\nu^{r(x)}(y)$$

Deci $f_n \,\widetilde{*}\, g_m$ converge uniform la $f \,\widetilde{*}\, g$ pe KL.

Pentru fiecare n $\mathrm{supp}\left(f_n^{\#}\right) \subset K^{-1}$, iar din

$$\begin{aligned} \left\| f_n^{\#}(x) - f(x) \right\| &= \left\| \rho_x\left(f_n(x^{-1})^*\right) - \rho_x\left(f(x^{-1})^*\right) \right\| \\ &\leq \left\| f_n(x^{-1})^* - f(x^{-1})^* \right\| \\ &= \left\| f_n(x^{-1}) - f(x^{-1}) \right\| \end{aligned}$$

rezultă că $f_n^{\#}$ converge uniform la f^* pe K^{-1}. ■

<u>Propoziție 5.6.3(Proposition 2.1.[14])</u> Algebra $C_c(G, A)$ admite o unitate aproximativă la stânga pentru topologia indusă de pe $L^p(G, A, \lambda)$, $p \geq 1$, λ măsură Radon pozitivă pe G. Dacă C^*- algebra A are unitate atunci $C_c(G, A)$ admite o unitate aproximativă la stânga pentru topologia limită inductivă.

Demonstrație. Fie $\left(U_\alpha\right)_\alpha$ un sistem fundamental de vecinătăți deschise, simetrice, d-relativ (şi r-relativ) compacte ale lui U_G. (În [68] Jean Renault demonstrează că în cazul în care G este local-compact cu U_G paracompact un astfel de sistem există). Presupunem $U_\alpha \subset U_{1\,\forall\alpha}$ şi considerăm $\left(K_\alpha\right)_\alpha$ un şir de submulțimi compacte ale lui U_G crescător la U_G. Deoarece G este normal rezultă că oricare ar fi α există o mulțime deschisă U în G astfel încât $U_G \subset U \subset \overline{U} \subset U_\alpha$. Faptul că U_α este r-relativ compactă implică U r-relativ compactă. Fie g_a o funcție continuă, nenegativă, cu suport compact conținut în U_α şi cu proprietatea că $g_\alpha|_{\overline{U} \cap r^{-1}(K_\alpha)} \equiv 1$.

Pentru $u \in K_\alpha$ avem:

$$\begin{aligned} \int g_\alpha(x) d\nu^u(x) &\geq \int 1_{U \cap r^{-1}(K_\alpha)} d\nu^u(x) \\ &= \int 1_U(x) 1_{K_\alpha}\left(r(x)\right) d\nu^u(x) \\ &= 1_{K_\alpha}(u) \int 1_U(x) d\nu^u(x) \end{aligned}$$

$$=\nu^{u}\left(U \cap G^{u}\right)>0$$

(deoarece U este deschisă).

Fie h_{α} o funcție continuă cu suport compact, nenegativă, definită pe U_G cu proprietatea că $h_{\alpha}(u)=\dfrac{1}{\int g_{\alpha}(x) d\nu^{u}(x)} \quad \forall u \in K_{\alpha}$.

Definim $f_{\alpha}: G \rightarrow R,\ f_{\alpha}(x)=h_{\alpha} \circ d(x) g_{\alpha}(x^{-1})$. Atunci f_{α} este continuă cu suport compact $\subset U_{\alpha}^{-1}=U_{\alpha}$ şi pentru $u \in K_{\alpha}$ avem:

$$\int f_{\alpha}(x^{-1}) d\nu^{u}(x)=\int h_{\alpha} \circ d(x^{-1}) g_{\alpha}(x) d\nu^{u}(x)=h_{\alpha}(u) \int g_{\alpha}(x) d\nu^{u}(x)=1 .$$

Deci pentru $x \in d^{-1}(K_{\alpha})$ avem:

$$\int f_{\alpha}\left(y^{-1} x\right) d\nu^{r(x)}(y)=\int f_{\alpha}\left(y^{-1}\right) d\nu^{d(x)}(y)=1 .$$

Fie $\left(u_{\beta}\right)_{\beta}$ o unitate aproximativă pentru C^{*}- algebra A

$$\left(0 \leq u_{\beta} \leq 1,\ \alpha \leq \beta \Rightarrow u_{\alpha} \leq u_{\beta}\right).$$

Definim:

$$F_{\alpha, \beta}: G \rightarrow A,\ F_{\alpha, \beta}(y)=f_{\alpha}(y) \rho_{y}(u_{\beta}) \text{ pentru orice } y \in G$$

$F_{\alpha, \beta}$ este continuă cu suport compact conținut în U_α..

Pentru $f \in C_{c}(G, A)$ şi α cu proprietatea că $d(\operatorname{supp} f) \subset K_{\alpha}$ avem:

$$\left\|F_{\alpha, \beta} \tilde{*} f(x)-f(x)\right\| \leq$$

$$\leq\left\|F_{\alpha, \beta} \tilde{*} f(x)-\rho_{x}\left(u_{\beta}\right) f(x)\right\|+\left\|\rho_{x}\left(u_{\beta}\right) f(x)-f(x)\right\|$$

$$=\left\|\int \rho_{y}\left(F_{\alpha, \beta}\left(y^{-1} x\right)\right) f(y) d\nu^{r(x)}(y)-\int \rho_{y}\left(F_{\alpha, \beta}\left(y^{-1} x\right)\right) f(x) d\nu^{r(x)}(y)\right\|+$$

$$+\left\|\rho_{x}\left(u_{\beta}\right) f(x)-f(x)\right\|$$

deoarece

$$\int \rho_{y}\left(F_{\alpha, \beta}\left(y^{-1} x\right)\right) d\nu^{r(x)}(y)=\int \rho_{y}\left(f_{\alpha}\left(y^{-1} x\right) \rho_{y^{-1} x}(u_{\beta})\right) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$=\int f_{\alpha}\left(y^{-1} x\right) \rho_{y}\left(\rho_{y^{-1} x}(u_{\beta})\right) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int f_\alpha\left(y^{-1}x\right)d\nu^{r(x)}(y)\rho_x\left(u_\beta\right)$$

$$= \rho_x\left(u_\beta\right) \text{ pentru } x \in \text{supp } f \subset d^{-1}\left(K_a\right)$$

Funcţia $f : G \to A$ fiind continuă cu suport compact, rezultă f "uniform continuă" la dreapta . Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există α''_ε astfel încât

$$\forall u \in U_G \Rightarrow \left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon \ \forall x, y \in G^u \text{ cu } y^{-1}x \in U_{\alpha'} \ \forall \alpha' \geq \alpha''_\varepsilon \left(U_{\alpha''_\varepsilon} \subset U_\alpha\right)$$

Atunci

$$\left\|\int \rho_y\left(F_{\alpha',\beta}\left(y^{-1}x\right)\right)f(y)d\nu^{r(x)}(y) - \int \rho_y\left(F_{\alpha',\beta}\left(y^{-1}x\right)\right)f(x)d\nu^{r(x)}(y)\right\|$$

$$= \left\|\int \rho_y\left(F_{\alpha',\beta}\left(y^{-1}x\right)\right)\left(f(y) - f(x)\right)d\nu^{r(x)}(y)\right\|$$

$$\leq \int \left\|\rho_y\left(F_{\alpha',\beta}\left(y^{-1}x\right)\right)\right\|\left\|\left(f(y) - f(x)\right)\right\|d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int f_{\alpha'}\left(y^{-1}x\right)\left\|\rho_x\left(u_\beta\right)\right\|\left\|\left(f(y) - f(x)\right)\right\|d\nu^{r(x)}(y)$$

$$\leq \int f_{\alpha'}\left(y^{-1}x\right)\left\|\left(f(y) - f(x)\right)\right\|d\nu^{r(x)}(y)$$

Dacă $y^{-1}x \in U_{\alpha'}$, atunci

$$f_{\alpha'}\left(y^{-1}x\right)\left\|f(y) - f(x)\right\| \leq \varepsilon f_{\alpha'}\left(y^{-1}x\right).$$

Iar dacă $y^{-1}x \notin U_{\alpha'}$, atunci

$$f_{\alpha'}\left(y^{-1}x\right)\left\|f(y) - f(x)\right\| = 0 = 0\varepsilon \leq \varepsilon f_{\alpha'}\left(y^{-1}x\right).$$

Deci

$$\left\|\int \rho_y\left(F_{\alpha',\beta}\left(y^{-1}x\right)\right)f(y)d\nu^{r(x)}(y) - \int \rho_y\left(F_{\alpha',\beta}\left(y^{-1}x\right)\right)f(x)d\nu^{r(x)}(y)\right\|$$

$$\leq \varepsilon\int f_{\alpha'}(y^{-1}x)d\nu^{r(x)}(y) = \varepsilon$$

pentru $x \in d^{-1}\left(K_{\alpha'}\right) \supset \overline{U_1K}$, $K = \text{supp } f$. Deoarece

$$\text{supp } \left(x \to \left\|F_{\alpha',\beta} \tilde{*} f(x) - \rho_x\left(u_\beta\right)f(x)\right\|\right) \subset U_{\alpha'}K \cup K \subset U_{\alpha'}K \subset U_1K \subset \overline{U_1K}$$

rezultă

$$\int \left\|F_{\alpha,\beta} \tilde{*} f(x) - \rho_x\left(u_\beta\right)f(x)\right\|^p d\lambda\left(x \leq \varepsilon^p \lambda\left(\overline{U_1K}\right)\right) < \infty.$$

Pe de altă parte

$$\left\|\rho_x\left(u_\beta\right)f(x)-f(x)\right\|=\left\|u_\beta\rho_{x^{-1}}\left(f(x)\right)-\rho_{x^{-1}}\left(f(x)\right)\right\|\xrightarrow{\beta}0\quad\forall x$$

şi din

$$\left\|\rho_x\left(u_\beta\right)f(x)-f(x)\right\|^p\leq\left\|u_\beta\rho_{x^{-1}}\left(f(x)\right)\right\|^p+\left\|\rho_{x^{-1}}\left(f(x)\right)\right\|^p\leq 2\left\|f(x)\right\|^p$$

rezultă că $\int\left\|\rho_x\left(u_\beta\right)f(x)-f(x)\right\|^p d\lambda(x)\to 0$. Prin urmare,

$$\int\left\|F_{\alpha,\beta}\tilde{*}f(x)-f(x)\right\|^p d\lambda(x)\to 0.$$

Dacă A are unitate 1, luăm $u_\beta=1\ \forall\beta$ şi notăm $F_{\alpha,\beta}$ cu $F_\alpha=f_\alpha 1$.

Atunci

$$\left\|F_{\alpha'}\tilde{*}f(x)-f(x)\right\|\leq\int f_{\alpha'}(y^{-1}x)\left\|f(y)-f(x)\right\|^p d\nu^{r(x)}(y)\leq\varepsilon\ \forall\alpha'\geq\alpha''_\varepsilon$$

şi deci $F_{\alpha'}*f\to f$ uniform pe $\overline{U_1K}$, de unde rezultă $\{F_\alpha\}$unitate aproximativă pe A cu topologia limită inductivă. ■

Lema 5.6.4. Pentru fiecare $u\in U_G$ considerăm

$$\Pi_u:C_c(G,A)\to\mathsf{B}\left(L^2\left(G,\nu^u,H\right)\right)$$

definit prin

$$\left(\Pi_u(f)\xi\right)(x)=\int_{G^u}\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y),\ \xi\in L^2\left(G,\nu^u,H\right),\ f\in C_c(G,A)$$

Atunci Π_u este *- morfism.

A se consideră identificată cu $\Pi(A)\subset\mathsf{B}(H)$. De fapt

$$\left(\Pi_u(f)\xi\right)(x)=\int_{G^u}\Pi\left(\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y),\ \xi\in L^2\left(G,\nu^u,H\right),\ f\in C_c(G,A)$$

Demonstraţie. Arătăm că

$$\Pi_u(f)\in\mathsf{B}\left(L^2\left(G,\nu^u,H\right)\right)\forall f\in C_c(G,A),\ \forall u\in U_G.$$

Pentru $\xi,\eta\in L^2\left(G^u,\nu^u,H\right)$, avem

$$|<\Pi_u(f)\xi,\eta>|=\left|\int_{G^u}<\int_{G^u}\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y),\eta(x)>d\nu^u(x)\right|$$

$$\leq\int_{G^u}\int_{G^u}\left|<\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y),\eta(x)>\right|d\nu^u(y)d\nu^u(x)$$

$$\le \int_{G^u}\int_{G^u}\left\|\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\right\|\left\|\xi(y)\right\|\left\|\eta(x)\right\|d\nu^u(y)d\nu^u(x)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^u}\left\|f\left(y^{-1}x\right)\right\|\left\|\xi(y)\right\|\left\|\eta(x)\right\|d\nu^u(y)d\nu^u(x)$$

$$\le \left(\int\int_{G^u}\left\|f\left(y^{-1}x\right)\right\|\left\|\eta(x)\right\|^2 d\nu^u(y)d\nu^u(x)\right)^{1/2}\left(\int\int\left\|f\left(y^{-1}x\right)\right\|\left\|\xi(y)\right\|^2 d\nu^u(y)d\nu^u(x)\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\int\left\|\eta(x)\right\|^2\int_{G^u}\left\|f\left(y^{-1}x\right)\right\|d\nu^u(y)d\nu^u(x)\right)^{1/2}\left(\int\left\|\xi(y)\right\|^2\int\left\|f\left(y^{-1}x\right)\right\|d\nu^u(x)d\nu^u(y)\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\int\left\|\eta(x)\right\|^2\int_{G^u}\left\|f\left(y^{-1}\right)\right\|d\nu^{d(x)}(y)d\nu^u(x)\right)^{1/2}\left(\int\left\|\xi(y)\right\|^2\int\left\|f(x)\right\|d\nu^{d(y)}(x)d\nu^u(y)\right)^{1/2}$$

$$\le \left\|f\right\|_I\left(\int\left\|\eta(x)\right\|^2 d\nu^u(x)\right)^{1/2}\left(\int\left\|\xi(y)\right\|^2 d\nu^u(y)\right)^{1/2}$$

$$\le \left\|f\right\|_I\left\|\xi\right\|_2\left\|\eta\right\|_2$$

unde $\left\|f\right\|_I = \max\left\{\sup_{u\in U_G}\int\left\|f(y)\right\|d\nu^u(y),\ \sup_{u\in U_G}\int\left\|f\left(y^{-1}\right)\right\|d\nu^u(y)\right\}$.

Deci

$$\left\|\Pi_u(f)\right\| \le \left\|f\right\|_I.$$

Arătăm că $\begin{cases}\Pi_u(f)\Pi_u(g) = \Pi_u(f \,\tilde{*}\, g)\\ \Pi_u(f^{\#}) = \Pi_u(f)^*\end{cases}$

Într-adevăr

$$\left(\Pi_u(f)\Pi_u(g)\xi\right)(x) = \int_{G^u}\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\left(\Pi_u(g)\xi\right)(y)d\nu^u(y)$$

$$= \int_{G^u}\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\int_{G^u}\rho_z\left(g\left(z^{-1}y\right)\right)\xi(z)d\nu^u(z)d\nu^u(y)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^u} < \xi(y), \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)^*\right)\eta(x) > d\nu^u(y)d\nu^u(x)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^{d(z)}}\rho_{zy}\left(f\left(y^{-1}z^{-1}x\right)\right)\rho_z\left(g(y)\right)\xi(z)d\nu^{d(z)}(y)d\nu^u(z)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^{d(z)}}\rho_z\left(\rho_y\left(f\left(y^{-1}z^{-1}x\right)\right)g(y)\right)\xi(z)d\nu^{d(z)}(y)d\nu^u(z)$$

$$= \int_{G^u}\rho_z\left(\int_{G^{d(z)}}\rho_y\left(f\left(y^{-1}z^{-1}x\right)\right)g(y)d\nu^{d(z)}(y)\right)\xi(z)d\nu^u(z)$$

$$= \int_{G^u}\rho_z\left(f \,\tilde{*}\, g(z^{-1}x)\right)\xi(z)d\nu^u(z)$$

$$= \left(\Pi_u\left(f \,\tilde{*}\, g\right)\xi\right)(x)$$

şi

$$< \Pi_u(f)\xi, \eta >= \int_{G^u} < \int_{G^u} \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y), \eta(x) > d\nu^u(x)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^u} < \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y), \eta(x) > d\nu^u(y)d\nu^u(x)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^u} < \xi(y), \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)^*\right)\eta(x) > d\nu^u(y)d\nu^u(x)$$

$$= \int_{G^u}\int_{G^u} < \xi(y), \rho_x\left(f^{\#}\left(y^{-1}x\right)\right)\eta(x) > d\nu^u(x)d\nu^u(y)$$

$$= \int_{G^u} < \xi(y), \int_{G^u} \rho_x\left(f^{\#}\left(y^{-1}x\right)\right)\eta(x)d\nu^u(x) > d\nu^u(y)$$

$$=< \xi, \Pi_u\left(f^{\#}\right)\eta >$$

■

Lema 5.6.5. Dacă $f \in C_c(G, A)$ şi $\Pi_u(f) = 0$, atunci $f(x) = 0$ pentru orice x din G^u.

Demonstrație. Fie $\xi_{\alpha,l} \in L^2\left(G^u, \nu^u, H\right)$, $\xi_{\alpha,l} = f_\alpha(x)l$ unde $\{f_\alpha\}$ este o unitate aproximativă la dreapta pentru $C_c(G, A)$, iar l un element din H. Dacă $\Pi_u(f) = 0$, atunci

$$\Pi_u(f)\xi = 0 \ \forall \xi \in L^2\left(G^u, \nu^u, H\right)$$

$$\Pi_u(f)\xi_{\alpha,l} = 0 \ \forall \alpha, l$$

Dar

$$\Pi_u(f)\xi_{\alpha,l}(x) = \int_{G^u} \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi_{\alpha,l}(y)d\nu^u(y)$$

$$= \int_{G^u} \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)f_\alpha(y)d\nu^u(y)l$$

$$= f * f_\alpha(x)l.$$

Deci $\Pi_u(f)\xi_{\alpha,l} = 0 \ \forall l$ implică $f * f_\alpha(x) = 0 \ \forall x$. Pe de altă parte

$$\int \left|f(x) - f * f_\alpha(x)\right| d\nu^u(x) \xrightarrow{\alpha} 0.$$

În consecință, $\int |f(x)| d\nu^u(x) = 0$ şi f fiind continuă rezultă $f(x) = 0 \ \forall x \in G^u$. ■

<u>Definiție 5.6.6</u> $\|f\| \overset{def}{=} \sup_{u\in G}\|\Pi_u(f)\|$

Din lema precedentă rezultă că $\|\ \|$ este normă, iar din:

$$\left\|f \tilde{*} g\right\| \overset{def}{=} \sup_{u\in G}\left\|\Pi_u(f \tilde{*} g)\right\| \le \sup_{u\in G}\|\Pi_u(f)\|\|\Pi_u(g)\| \le \|f\|\|g\|$$

$$\left\|f^{\#}f\right\| = \|f\|^2$$

rezultă că $\|\ \|$ este normă de C^*- algebră.

Notăm cu $A\times_\rho G$ sau $C^*(A,G,\rho)$ C^*- algebra obținută prin completarea lui $C_c(G,A)$ în C^*- norma $\|\ \|$ definită mai sus (Definition 2.2/pg. 960 [52]).

Dacă A = **C**, atunci aplicația bijectivă R: $C_c(G, A) \to C_c(G)$ definită prin

$$R(f)(x) = f(x^{-1}) \text{ pentru orice } x \in G,$$

poate fi extinsă la un izomorfism de C^*-algebre de la $C^*(\mathbf{C},G,I)$ la $C^*_{red}(G)$ (C^*-algebra redusă asociată lui G şi sistemului Haar fixat).

<u>Teorema 5.6.7 .</u>(Proposition 2.5/pg. 962 [52])

1. Dacă $\rho,\sigma: G\to Aut(A)$ sunt coomoloage în sensul că există o aplicație continuă $\tau: U_G \to Aut(A)$ cu proprietatea că $\rho_y = \tau_{r(y)}\circ\sigma_y\circ\tau^{-1}_{d(y)}$ $\forall y\in G$, atunci $A\times_\rho G \cong A\times_\sigma (G)$.
2. Dacă $\rho,\sigma: G\to Aut(A)$ sunt echivalente în sensul că există o aplicație $u: G\to A\bigcap U(H)$ (unde $U(H)$este mulțimea operatorilor unitari din B(H) şi $A\subset \mathsf{B}(H)$) cu proprietățile:

$$x\mapsto u_x a,\ x\mapsto a u_x \text{ continuu } \forall a\in A$$

$$\rho_x(a) = u_x\sigma_x(a)u_x^* \quad a\in a, x\in G$$

$$u_{xy} = u_x\sigma_x(u_y)\ \forall(x,y)\in G^{(2)}$$

Atunci $A\times_\rho G \cong A\times_\sigma G$.

Demonstrație. Notăm $\tilde{*}_\rho,(\#,\rho)$ şi $\tilde{*}\sigma,(\#,\sigma)$ convoluția şi involuția din $C_c(G,A)$ relativ la acțiunile ρ şi σ respectiv.

1. Definim $\Phi : C_c(G,A) \to C_c(G,A)$ prin:

$$\Phi(f)(x) = \tau_{r(x)}^{-1}(f(x)),\ f \in C_c(G,A)$$

$$\left(\Pi_u^\sigma(\Phi(f))\xi\right)(x) = \int_{G^u} \sigma_y\left(\Phi(f)\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y)$$

$$= \int \sigma_y\left(\tau_{d(y)}^{-1}\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y)$$

$$= \int \tau_{r(y)}^{-1}\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y)$$

$$= \tau_u^{-1}\left(\int \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\xi(y)d\nu^u(y)\right)$$

$$= \tau_u^{-1}\left(\Pi_u^\rho(f)\xi(x)\right)$$

Rezultă $\left\|\Pi_u^\sigma(\Phi(f))\xi\right\| = \left\|\Pi_u^\rho(f)\xi\right\|$ şi $\|\Phi(f)\|_\sigma = \|f\|_\rho$. În plus avem

$$\Phi\left(f \mathbin{\widetilde{*}_\rho} g\right)(x) = \tau_{r(x)}^{-1}\left(\int \rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)g(y)d\nu^{r(x)}(y)\right)$$

$$= \int \tau_{r(x)}^{-1}\left(\rho_y\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)g(y)\right)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \sigma_y \circ \tau_{d(x)}^{-1}\left(f\left(y^{-1}x\right)\right)\tau_{r(x)}^{-1}\left(g(y)\right)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \sigma_y\left(\Phi(f)\left(y^{-1}x\right)\right)\Phi(g)(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \Phi(f) \mathbin{\widetilde{*}_\sigma} \Phi(g)(x)$$

$$\Phi(f)^{(\#,\sigma)}(y) = \sigma_y\left(\Phi(f)(y^{-1})^*\right)$$

$$= \sigma_y\left(\tau_{d(y)}^{-1}\left(f(y^{-1})^*\right)\right)$$

$$= \tau_{r(y)}^{-1} \circ \rho_y\left(f(y^{-1})^*\right)$$

$$= \tau_{r(y)}^{-1}\left(f^{(\#,\rho)}(y)\right)$$

$$= \Phi\left(f^{(\#,\rho)}\right)(y)$$

În consecinţă Φ este izomorfism de *-algebre $\left(\Phi^{-1}(f)(x) = \tau_{r(x)}\left(f(x)\right)\right)$.

2. Definim $\psi : C_c(G,A) \to C_c(G,A)$ prin

$$\psi(f)(x) = u_x f(x) \quad f \in C_c(G,A)$$

Aplicaţia ψ este o bijecţie $\left(\psi^{-1}(f)(x) = u_x^* f(x)\right)$. Pentru orice $u \in U_G$ definim

$$U_u : L^2(G^u, \nu^u, H) \to L^2(G^u, \nu^u, H)$$

prin

$$(U_u\xi)(x) = u_x(\xi(x)) \text{pentru orice } x \in G^u \text{ şi orice } \xi \in L^2(G^u, \nu^u, H).$$

Deoarece

$$\|(U_u\xi)(x)\|^2 = \|u_x(\xi(x))\|^2 = \|\xi(x)\|^2 \text{ (deoarece } u_x \text{ este unitar)}$$

U_u corect definit. Iar din

$$< U_u\xi, \eta >= \int < u_x(\xi(x)), \eta(x) > d\nu^u(x) = \int < \xi(x), u_x^*(\eta(x)) > d\nu^u(x)$$

rezultă $(U_u^*\eta)(x) = u_x^*(\eta(x))$. Deci $U_u U_u^* = U_u^* U_u = I$ şi în consecinţă U_u unitar.

Pentru $f \in C_c(G, A)$ şi $\xi \in L^2(G^u, \nu^u, H)$ avem

$$\Pi_u^\rho(\psi(f))(\xi)(x) = \int \rho_y(\psi(f)(y^{-1}x))\xi(y)d\nu^u(u)$$

$$= \int \rho_y(u_{y^{-1}x} f(y^{-1}x))\xi(y)d\nu^u(u)$$

$$= \int u_y\sigma_y(u_{y^{-1}x} f(y^{-1}x))U_y^*\xi(y)d\nu^u(u)$$

$$= \int u_y\sigma_y(u_{y^{-1}x})\sigma_y(f(y^{-1}x))U_y^*\xi(y)d\nu^u(u)$$

$$= \int u_{yy^{-1}x}\sigma_y(f(y^{-1}x))U_y^*\xi(y)d\nu^u(u)$$

$$= u_x\left(\int \sigma_y(f(y^{-1}x))U_y^*\xi(y)d\nu^u(u)\right)$$

$$= u_x(\Pi_u^\sigma(f)(U_u^*\xi)(x))$$

$$= U_u\Pi_u^\sigma(f)U_u^*\xi(x).$$

Obţinem $\|\Pi_u^\rho(\psi(f))\| = \|\Pi_u^\sigma(f)\|$ şi $\|\psi(f)\|_\rho = \|f\|_\sigma$.

Pe de altă parte

$$\psi(f) \mathbin{\widetilde{*}_\rho} \psi(g)(x) = \int \rho_y(\psi(f)(y^{-1}x))\psi(y)(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int \rho_y(u_{y^{-1}x} f(y^{-1}x))u_y g(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int u_y\sigma_y(u_{y^{-1}x} f(y^{-1}x))u_y^* u_y g(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int u_y \sigma_y \left(u_{y^{-1}x} f(y^{-1}x) \right) u_y^* u_y g(y) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= \int u_x \sigma_y \left(f(y^{-1}x) \right) g(y) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= u_x \int \sigma_y \left(f(y^{-1}x) \right) g(y) d\nu^{r(x)}(y)$$

$$= u_x \circ f \mathbin{\tilde{*}_\sigma} g(x)$$

$$= \psi\left(f \mathbin{\tilde{*}_\sigma} g \right)(x).$$

şi

$$\psi(f)^{(\#,\rho)}(x) = \rho_x \left(\psi(f)(x^{-1})^* \right)$$

$$= \rho_x \left(u_{x^{-1}} f(x^{-1})^* \right)$$

$$= u_x \sigma_x \left(f(x^{-1})^* u_{x^{-1}}^* \right) u_x^*$$

$$= u_x \sigma_x \left(f(x^{-1})^* \right) \sigma_x \left(u_{x^{-1}}^* \right) u_x^*$$

$$= u_x \sigma_x \left(f(x^{-1})^* \right) \left(u_x \sigma_x \left(u_{x^{-1}} \right)^* \right)$$

$$= u_x \sigma_x \left(f(x^{-1})^* \right) \left(u_{xx^{-1}} \right)^*$$

$$= u_x \sigma_x \left(f(x^{-1})^* \right)$$

$$= \psi\left(f^{(\#,\sigma)} \right)(x).$$

Am folosit faptul că $u_{xx^{-1}} = I$ (dacă facem x=y=v în relația $u_{xy} = u_x \sigma_x(u_y)$ obținem $u_v = u_v \sigma_v(u_v)$ echivalent $u_v = u_v u_v$ echivalent $u_v = I$ pentru orice v). Deci ψ este un izomorfism de *-algebre. ■

Prezentăm în continuare legătura dintre C^*- sistemele dinamice asociate unui grupoid G care provine din acțiunea unui grup g pe o mulțime S (grupoid acțiune) şi C^*- sistemele dinamice asociate grupului g.

Fie S o mulțime, g un grup care acționează la dreapta pe S şi

$$S \times g \ni (s, x) \mapsto sx \in S$$

acțiunea. $G = S \times g$ înzestrat cu operațiile din 1.2 (3):

$$(s, x)(sx, y) := (s, xy)$$

$$(s, x)^{-1} := (sx, x^{-1})$$

devine grupoid. Dacă g este grup local-compact, S spațiu topologic local-compact şi acțiunea este continuă, atunci $G = S \times g$ este grupoid topologic local compact iar sistemul de măsuri

$$\{\, \nu^u = \delta_u \times \lambda \,, u \in S\},$$

unde δ_u este măsura Dirac în u, λ este o măsură Haar la stânga pentru g, este un sistem Haar la stânga pentru G. O măsură μ pe U_G este cvasi-invariantă pentru sistemul Haar $\{\, \nu^u = \delta_u \times \lambda \,, u \in S\}$ dacă şi numai dacă este cvasi-invariantă pentru acțiunea lui g pe S, i.e. $\mu(Ex) = 0 <=> \mu(E) = 0$, unde E este o submulțime a lui S, iar

$$Ex = \{sx \in S \mid s \in E\}.$$

Notăm cu $C_c(S, A)$ spațiu funcțiilor continue cu suport compact definite pe S cu valori în A şi cu $C_0(S, A)$ spațiu funcțiilor continue care se anulează la infinit, definite pe S cu valori în A

<u>Lema 5.6.8.</u> Dacă G este grupoidul descris mai sus şi (A, G, ρ) este un C^*-sistem dinamic grupoidal atunci $(C_0(S, A), g, \sigma)$ este C^*- sistem dinamic asociat grupului g, unde $\sigma : g \to Aut(C_0(S, A))$ este definit prin

$\sigma_x(f)(s) = \rho_{(s,x)}(f(sx))$ pentru orice $s \in S$, orice $f \in C_0(S,A)$ şi orice $x \in g$.

Demonstrație. Este uşor de observat că pentru orice $x \in g$, aplicația

$$f \mapsto \rho_{(\cdot,x)}(f(\cdot\, x)) \quad [: C_0(S, A) \to C_0(S, A)]$$

este corect definită şi că este *- morfism.

Pentru $x_1, x_2, \in g,\ s \in S,\ f \in C_0(S, A)$ avem

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_1 x_2}(f)(s) &= \rho_{(s, x_1 x_2)}(f(s(x_1 x_2))) \\
&= \rho_{(s,x_1)(sx_1, x_2)}(f((sx_1)x_2)) \\
&= \sigma_{x_1}(\sigma_{x_2}(f))(s) \\
&= \sigma_{x_1} \circ \sigma_{x_2}(f)(s)
\end{aligned}$$

iar dacă e este unitatea grupului g, atunci

$$\sigma_e(f)(s) = \rho(s,e)(f(se)) = \rho(s,e)(f(s)) = f(s)$$

deoarece $(s,e) \in U_G$ şi $(s,x) \mapsto \rho(s,x)$ este morfism de grupoizi. De aici rezultă că

$$\sigma_x \circ \sigma_{x^{-1}} \equiv \sigma_{xx^{-1}} = \sigma_{x^{-1}x} = \sigma_{x^{-1}} \circ \sigma_x = \sigma_e = \mathrm{Id}_{C_0(S,A)}$$

şi deci *- morfismul σ_x este *- automorfism al C^*- algebrei $C_0(S,A)$.

Vom demonstra în continuare continuitatea aplicației

$$x \mapsto \sigma_x [: g \to \mathrm{Aut}(C_0(S,A))].$$

Pentru $x \in g$ avem

$$\begin{aligned}
\|\sigma_x(f) - f\| &= \sup_{s\in S} \|\rho_{(s,x)}(f(sx)) - f(s)\| \\
&\le \sup_{s\in S} \|\rho_{(s,x)}(f(sx)) - f(sx)\| + \sup_{s\in S} \|f(sx) - f(s)\| \\
&= \sup_{t\in S} \|\rho_{(tx^{-1},x)}(f(t)) - f(t)\| + \sup_{s\in S} \|f(sx) - f(s)\|.
\end{aligned}$$

Presupunem $f \in C_c(S,A)$ şi fixăm $\varepsilon > 0$. Mulțimea

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon &= \left\{x : \left\|\rho_{(tx^{-1},x)}(f(t)) - f(t)\right\| < \varepsilon \quad \forall t \in S\right\} \\
&= \left\{x : \left\|\rho_{(tx^{-1},x)}(f(t)) - f(t)\right\| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathrm{supp}(f)\right\}
\end{aligned}$$

este deschisă şi conține pe e pentru că

$$(t,x) \mapsto \rho_{(tx^{-1},x)}(f(t)) - f(t)$$

este continuă şi supp(f) este compactă.

Dacă K_ε este o vecinătate compactă a lui e în g cu proprietatea că $V_\varepsilon \subset K_\varepsilon$ atunci mulțimea

$$\begin{aligned}
W_\varepsilon &= \{x \in V_\varepsilon : \|f(sx) - f(s)\| < \varepsilon \quad \forall s \in S\} \\
&= \{x \in V_\varepsilon : \|f(sx) - f(s)\| < \varepsilon \quad \forall s \in \mathrm{supp}(f) \cdot K_\varepsilon^{-1}\}
\end{aligned}$$

este deschisă şi conține e. Rezultă că pentru orice ε există $U_\varepsilon = V_\varepsilon \cap W_\varepsilon$ deschisă astfel încât $e \in U_\varepsilon$ şi $\|\sigma_x(f) - f\| < 2\varepsilon$ pentru orice $x \in U_\varepsilon$.

Dacă $f \in C_0(S, A)$ atunci există $h \in C_c(S, A)$ astfel încât $\|f - h\| < \varepsilon$ şi există U_ε vecinătate deschisă a unităţii din g astfel încât $\|\sigma_x(h) - h\| < \varepsilon$ pentru orice $x \in U_\varepsilon$..

Deci

$$\begin{aligned}\|\sigma_x(f) - f\| &\leq \|\sigma_x(h) - \sigma_x(f)\| + \|\sigma_x(h) - h\| + \|h - f\| \\ &\leq \|\sigma_x(h) - h\| + 2\|h - f\| \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

■

Teorema 5.6.9 Dacă G = S × g este grupoidul asociat acţiunii

$$(s, x) \mapsto sx \quad [: S \times g \to S]$$

şi (A, G, ρ) un C^*- sistem dinamic grupoidal, iar $(C_0(S, A), g, \sigma)$ este C^*- sistemul dinamic descris de lema 5.6.8 atunci

$$A \times_\rho G \cong C_0(S, A) \times_\sigma g$$

(izomorfism de C^*- algebre).

Demonstraţie. Considerăm

$$\Phi : C_c(G, A) \to C_c(g, C_c(S, A)) \subset C_c(g, C_0(S, A))$$

$$\Phi(f)(x)(s) = f(s, x) \text{ pentru orice } x \in g \text{ şi orice } s \in S.$$

Φ este o aplicaţie corect definită şi bijectivă.

Notăm cu $\tilde{*}_\rho, (\#, \rho)$ şi $\tilde{*}_\sigma, (\#, \sigma)$ convoluţia şi involuţia pe $C_c(G, A)$, respectiv $C_c(g, C_0(S, A))$ (spaţiu funcţiilor continue cu suport compact definite pe g cu valori în $C_0(S, A)$) relativ la acţiunile ρ, respectiv σ. De asemenea pentru orice $s \in U_G$, notăm cu Π_s^ρ reprezentarea corespunzătoare lui ρ, şi cu Π^σ reprezentarea indusă de σ.

Pentru $f \in C_c(G, A)$ şi $\xi \in L^2(G^s, \delta_s \times \lambda, H)$ avem

$$\begin{aligned}[\Pi_s^\rho(f)\xi](s, x) &= \int_{G^s} \rho_{(t,y)}\left(f\left((t, y)^{-1}(s, x)\right)\right)\xi(t, y)d\delta_s \times \lambda(t, y) \\ &= \int_g \rho_{(t,y)}\left(f\left(sy, y^{-1}x\right)\right)\xi(s, y)d\lambda(y)\end{aligned}$$

$$= \int_g \rho_{(t,y)}\left(\Phi(f)\left(y^{-1}x\right)(sy)\right)\xi(s,y)d\lambda(y)$$

$$= \left[\left(\Pi^\sigma(\Phi(f)\xi)\right)(x)\right](s).$$

Deci

$$\|f\| = \sup_{s\in S}\left\|\Pi_s^\rho(f)\right\|_{L^2\left(G^s,\delta_s\times\lambda,H\right)} = \left\|\Pi^\sigma(\Phi(f))\right\|_{L^2\left(g,L^2(S,H)\right)} = \|\Phi(f)\|.$$

Pentru $f_1, f_2 \in C_c(G,A)$ avem

$$f_1 \,\tilde{*}_\rho\, f_2(s,x) = \int \rho_{(t,y)}\left(f_1\left((t,y)^{-1}(s,x)\right)\right)f_2(t,y)d\delta_s\times\lambda(t,y)$$

$$= \int_g \rho_{(s,y)}\left(f_1\left(sy,y^{-1}x\right)\right)f_2(s,y)d\lambda(y)$$

$$= \int_g \rho_{(s,y)}\left(\Phi(f_1)\left(y^{-1}x\right)(sy)\right)\Phi(f_2)(y)(s)d\lambda(y)$$

$$= \int_g \sigma_y\left(\Phi(f_1)\left(y^{-1}x\right)\right)(s)\Phi(f_2)(y)(s)d\lambda(y)$$

$$= \int_g \sigma_y\left(\Phi(f_1)\left(y^{-1}x\right)\right)\Phi(f_2)(y)d\lambda(y)(s)$$

$$= \left[\Phi(f_1)\,\tilde{*}_\sigma\,\Phi(f_2)(x)\right](s)$$

şi în consecinţă

$$\left[\Phi\left(f_1 \,\tilde{*}_\rho\, f_2\right)(x)\right](s) = f_1 \,\tilde{*}_\rho\, f_2(s,x) = \left[\Phi(f_1)\,\tilde{*}_\sigma\,\Phi(f_2)(x)\right](s)$$

$$\Phi\left(f_1 \,\tilde{*}_\rho\, f_2\right) = \Phi(f_1)\,\tilde{*}_\sigma\,\Phi(f_2).$$

Pentru $f \in C_c(G,A)$ avem:

$$f^{(\#,\rho)}(s,x) = \rho_{(s,x)}\left(f\left((s,x)^{-1}\right)^*\right)$$

$$= \rho_{(s,x)}\left(f\left(sx,x^{-1}\right)^*\right)$$

$$= \left(\rho_{(s,x)}\left(\Phi(f)\left(x^{-1}\right)(sx)^*\right)\right)$$

$$= \left(\sigma_x\left(\Phi(f)\left(x^{-1}\right)\right)(s)\right)^*$$

$$= \sigma_x\left(\Phi(f)\left(x^{-1}\right)^*\right)(s)$$

$$= \left[\Phi(f)^{(\#,\sigma)}(x)\right](s).$$

Deci

$$\left[\Phi^{(\#,\rho)}(x)\right](s) = f^{(\#,\rho)}(s,x) = \left[\phi(f)^{(\#,\sigma)}\right](x)(s)$$

$$\Phi\left(f^{(\#,\rho)}\right) = \Phi(f)^{(\#,\sigma)}.$$

Ca urmare Φ este un *- morfism bijectiv care poate fi extins la $A \times_{\rho} G$, iar din faptul că $C_c(g, C_c(S, A))$ generează $C_0(S, A) \times_{\sigma} g$ rezultă că

$$A \times_{\rho} G \approx C_0(S, A) \times_{\rho} g.$$

■

În [52] Masuda a obținut caracterizarea C^*- algebrei reduse asociate grupoidului produs semi-direct. Dacă grupoidul G acționează la stânga pe S și

$$r: S \to U_G,\ \rho : G{*}S \to S,$$

determină acțiunea (definiția 1.20), atunci $S^{op}{*}G$ are o structură de grupoid (numit produs semi-direct) cu operațiile sunt definite prin

$$(s_1, x_1)(x_1^{-1}s_1, x_2) := (s_1, x_1x_2)$$

$$(s, x)^{-1} := (x^{-1}s, x^{-1}).$$

Spațiul unităților lui $S^{op}{*}G$ se identifică cu S prin aplicația s $\leftrightarrow$ (s , r(s)). Convenim să notăm acest grupoid ce provine din acțiunea $\rho : G{*}S \to S$ a grupoidului G pe mulțimea S prin $S \times_{\rho} G$.

În cazul topologic pe lângă condițiile algebrice, pentru acțiunea la stânga $(x,s) \mapsto xs$ [: $G{*}S \to S$] a grupoidului topologic G pe spațiul topologic S se impune continuitatea (pe spațiul G∗S se consideră topologia indusă de $G \times S$) și, în plus, aplicația $r : S \to U_G$ să fie continuă și deschisă. Dacă S și G sunt local compacte, atunci este ușor de observat că produsul semi-direct $S \times_{\rho} G$ este grupoid topologic local compact. Dacă $\{\nu^u, u \in U_G\}$ este un sistem Haar (continuu) pe G, atunci $\{\delta_s \times \nu^{r(s)}, s \in S\}$ este un sistem Haar (continuu) pe $S \times_{\rho} G$.

Teorema 5.6.10. Fie G un grupoid local compact înzestrat cu un sistem Haar (continuu) $\{\nu^u, u \in U_G\}$. Fie S un spațiu topologic local-compact şi $\rho : G*S \to S$ o acțiune continuă. Atunci

$$C^*_{red}(S \times_\rho G) \cong C_0(S) \times_\sigma G \text{ (izomorfism de } C^*\text{- algebre),}$$

unde $\sigma : G \to C_0(S)$ este definit prin

$$\sigma_x(f)(s) = f(\tilde{\rho}(x^{-1}, s)) \text{ pentru orice } s \in S \text{ şi orice } x \in G,$$

cu $\tilde{\rho}$ o prelungire continuă a lui ρ la G × S. (Lemma 2.7/pg. 964 [52]).

Demonstrație. Considerăm

$$\Phi : C_c(S \times G) \to C_c(G, C_C(S)) \subset C_c(G, C_0(S))$$

definit prin

$$\Phi(f)(x)(s) = f(s, x) \text{ pentru orice } x \in G \text{ şi orice } s \in S.$$

Notăm cu $\tilde{*}_\rho, (\#, \rho)$ şi $\tilde{*}_\sigma, (\#, \sigma)$ convoluția şi involuția pe $C_c(S \times G)$, respectiv pe $C_c(G, C_0(S))$. Pentru orice $(s,u) \in S \times U_G$ notăm cu $\Pi^\rho_{(s,u)}$ reprezentarea asociată grupoidului $S \times_\rho G$ şi pentru orice u ∈ U_G notăm cu Π^σ_u reprezentarea corespunzătoare grupoidului G şi morfismului σ.

Pentru $f \in C_c(S \times_\rho G)$ şi $\xi \in L^2(S \times_\rho G, \delta_s \times \nu^{r(s)})$ avem

$$\begin{aligned}
[\Pi^\rho_{(s,u)}(f)\xi](s,x) &= \int_{S \times G^u} f((t,y)^{-1}(s,x))\xi(t,y)\delta_s \times \nu^{r(s)}(t,y) \\
&= \int_{G^u} f((s,y)^{-1}(s,x))\xi(s,y)d\nu^{r(s)}(y) \\
&= \int_{G^u} f((\rho(y^{-1},s), y^{-1})(s,x))\xi(s,y)d\nu^{r(s)}(y) \\
&= \int_{G^u} f(\rho(y^{-1},s), y^{-1}x)\xi(s,y)d\nu^{r(s)}(y) \\
&= \int_{G^u} \Phi(f)(y^{-1}x)(\rho(y^{-1},s))\xi(s,y)d\nu^{r(s)}(y) \\
&= [\Pi^\sigma_u(\Phi(f))\xi](x)(s)
\end{aligned}$$

Deci $\|f\|_{C^*(S \times_\rho G)} = \|f\|_{C_0(S) \times_\sigma G}$.

Pentru $f_1, f_2 \in C_c(S \times G)$ avem

$$\left(f_1 \tilde{*}_\rho f_2\right)(s,x) = \int_{S\times G^u} f_1\left((t,y)^{-1}(s,x)\right) f_2(t,y)\, d\left(\delta_s \times \nu^{r(s)}\right)(t,y)$$

$$= \int_{G^u} f_1\left((s,y)^{-1}(s,x)\right) f_2(s,y)\, d\nu^{r(s)}(y)$$

$$= \int_{G^u} f_1\left(\rho\left(y^{-1},s\right), y^{-1}x\right) f_2(s,y)\, d\nu^{r(s)}(y)$$

$$= \int_{G^u} \Phi(f_1)\left(y^{-1}x\right)\left(\rho\left(y^{-1},s\right)\right)\Phi(f_2)(y)(s)\, d\nu^{r(s)}(y)$$

$$= \Phi(f_1) \tilde{*}_\sigma \Phi(f_2)(x)(s)$$

În consecință

$$\Phi\left(f_1 \tilde{*}_\rho f_2\right)(x)(s) = \left(f_1 \tilde{*}_\rho f_2\right)(s,x) = \Phi(f_1) \tilde{*}_\sigma \Phi(f_2)(x)(s)$$

$$\Phi\left(f_1 \tilde{*}_\rho f_2\right) = \Phi(f_1) \tilde{*}_\sigma \Phi(f_2).$$

Pentru $f \in C_c(S \times G)$, avem

$$f^{(\#,\rho)}(s,x) = \overline{f\left((s,x)^{-1}\right)}$$

$$= \overline{f\left(\rho\left(x^{-1},s\right), x^{-1}\right)}$$

$$= \overline{\Phi(f)\left(x^{-1}\right)\left(\rho\left(x^{-1},s\right)\right)}$$

$$= \sigma_x\left(\overline{\Phi(f)x^{-1}}\right)(s)$$

$$= \sigma_x\left(\overline{\Phi(f)\left(x^{-1}\right)}\right)(s)$$

$$= \Phi(f)^{(\#,\sigma)}(x)(s)$$

Deci

$$\Phi\left(f^{(\#,\rho)}\right)(x)(s) = f^{(\#,\rho)}(s,x) = \Phi(f)^{(\#,\sigma)}(x,s)$$

$$\Phi\left(f^{(\#,\rho)}\right) = \Phi(f)^{(\#,\sigma)}.$$

Ca urmare aplicația Φ poate fi extinsă la un *- izomorfism. ■

Observație 5.6.11. Dacă S este un spațiu topologic compact atunci

$$C^*\left(S \times_\rho G\right) \cong C(S) \times_\sigma G.$$