INTRODUCERE

Grupurile apar de obicei ca structuri naturale pentru mulțimile de permutări ce păstrează operațiile fundamentale ale unor obiecte matematice. Astfel de permutări sunt numite “automorfisme”. În cazul unei familii de obiecte izomorfe două câte două, modul în care obiectele se leagă între ele nu poate fi pus în evidență considerând ca mulțime a “automorfismelor” automorfismele corespunzătoare unui singur obiect, ci toate izomorfismele corespunzătoare fiecărei perechi de obiecte ale familiei. Sistemul rezultat va avea o structură de grupoid. Fireşte, ca şi în cazul grupurilor, grupoizii pot să rezulte şi în alte moduri nelegate de “automorfisme”.

Pentru a ilustra conceptul de grupoid să luăm un exemplu care generalizează grupul de permutări ale unei mulțimi S. Fie G = Inj(S) mulțimea funcțiilor injective definite pe submulțimi ale lui S cu valori în S. Pentru f în Inj(S) se notează cu D(f) domeniul lui f şi cu R(f) = f(D(f)) imaginea lui f. Dacă f, g $\in$ Inj(S) şi D(f) = R(g), atunci funcția f poate fi compusă g. Astfel compunerea este o lege de compoziție parțială pe Inj(S), cu domeniul de definiție $G^{(2)} = \{(f,g) : D(f) = R(f)\}$ Această lege de compoziție parțială, numită înmulțire parțială, are proprietăți care seamănă oarecum cu cele ale legii de compoziție a unui grup: înmulțirea parțială este asociativă; dacă pentru fiecare submulțime $A \subset S$ notăm cu id_A funcția identică pe A, id_A se comportă ca un element neutru; fiecare element $f \in Inj(S)$ admite un invers $f^{-1}: R(f) \to S$ şi $ff^{-1} = id_{R(f)}$, $f^{-1}f = id_{D(f)}$. Abstractizarea acestor proprietăți conduce la noțiunea de grupoid. De fapt, un grupoid G este o categorie mică în care fiecare morfism este izomorfism. Mulțimea obiectelor sau a unităților se notează cu U_G. Pentru fiecare u, v $\in U_G$ şi fiecare morfism din G, x de la v la u, notăm r(x) = u şi d(x) = v. Pe fiecare u $\in U_G$ îl identificăm cu morfismul identic corespunzător şi astfel, privim U_G ca pe o submulţime a lui G. Pentru două unităţi u, v $\in U_G$ notăm cu G^u mulţimea $r^{-1}(u)$, cu G_u mulţimea $d^{-1}(u)$ şi cu G_v^u mulţimea $r^{-1}(u) \cap d^{-1}(v)$. Se observă că G_u^u este un grup pentru orice u $\in U_G$. Aceste grupuri sunt numite grupuri de izotropie ale grupoidului G.

Evident noţiunea de grupoid generalizează noţiunea de grup. Există însă şi alte structuri algebrice ce pot fi privite ca grupoizi. Astfel orice mulţime este un grupoid în care două elemente x şi y se pot compune dacă şi numai dacă sunt egale şi xx = x, iar aplicaţia de inversare este aplicaţia identică. Relaţiile de echivalenţă induc grupoizi: două elemente (u,v) şi (s,t) ale graficului unei relaţii de echivalenţă pot fi compuse dacă şi numai dacă v = s şi (u,v)(v,t) = (u,t), iar $(u,v)^{-1} = (v,u)$.

Grupoizii au fost introduşi de către H. Brandt [9]. C Ehresmann [34] a adăugat structuri suplimentare (topologice şi diferenţiabile) grupoizilor şi i-a introdus ca instrument în geometria diferenţială. Lucrările lui Brown, Hardy, Higgins şi alţii ([12],[13]) sunt referinţe pentru teoria grupoizilor topologici, iar [43] pentru teoria algebrică a grupoizilor. În analiză, G. Mackey a utilizat grupoizii sub numele de grupuri virtuale în studiul acţiunilor ergodice ale grupurilor. Din acest punct de vedere grupoizii pot fi priviţi ca o generalizare a acţiunii unui grup pe o mulţime. Fie g un grup local compact cu bază numărabilă şi h o măsură Haar pe g; presupunem că (S, μ) este un spaţiu standard, cu măsură finită, pe care g acţionează astfel încât μ este invariantă, şi în plus, acţiunea $(s, x) \to sx : S \times g \to S$ este măsurabilă. Spaţiul cu măsură $(S \times g, \mu \times h)$ devine grupoid cu măsură cu spaţiul unităţilor (sau obiectelor) S, dacă definim înmulţirea parţială prin (s, x)(sx, y) = (s, xy) şi inversul lui (s, x) prin $(s, x)^{-1} = (sx, x^{-1})$. Pentru f şi g, funcţii cu anumite proprietăţi pe $S \times g$, Dixmier [30] şi Glimm [37] au utilizat următorul produs de convoluţie:

$$f * g(s,x) = \int f(s,y) g\left(sy, y^{-1}x\right) dh(y) ,$$

care se reduce, atunci când S este format dintr-un singur punct, la produsul uzual de convoluţie pentru grupurile local compacte. Grupoizii introduşi de Mackey generalizează pe cei descrişi de acţiunile unor grupuri. Ei sunt înzestraţi prin definiţie cu o familie de măsuri care satisfac o anumită condiție de cvasi invarianță. Aceste măsuri generalizează măsurile obținute în cazul acțiunii unui grup prin produsul dintre o măsură μ pe S cu o măsură din clasa măsurii Haar a grupului g. În cazul general încercarea de a defini convoluția utilizând familii de măsuri cvasi invariante eşuează deoarece lipseşte o proprietate de invarianță specială pe care o are măsura $\mu \times h$, invarianță ce face ca produsul definit de Dixmier şi Glimm să fie asociativ. În [41] P. Hahn a demonstrat existența unei măsuri σ-finite în clasa de măsuri cu care este înzestrat un grupoid în sensul lui Mackey, măsură care este "invariantă la translații". Această măsură Haar pentru grupoizi are multe dintre proprietățile măsurii Haar pentru grupuri, la care se reduce în cazul în care grupoidul este grup. Aceste proprietăți au fost utilizate în [42] pentru a defini produsul de convoluție al funcțiilor definite pe un grupoid cu măsură general. Convoluția şi funcția modulară asociată unei măsuri Haar i-au permis lui P. Hahn [41] să definească algebre grupoidale pentru grupoizi. În subcapitolul 3.2. al acestei lucrări construim algebre grupoidale care au anumite proprietăți de invarianță la schimbarea măsurii Haar.

Există cazuri în care nu este convenabil să se fixeze o măsură sau o clasă de măsuri pe un grupoid. În [26] Alain Connes a introdus noțiunea alternativă de măsură transversă pe un grupoid. Unul dintre avantajele măsurilor transverse este modul în care sunt transportate de morfismele stricte. Se ridica următoarea întrebare: în ce măsură cele două categorii de grupoizi sunt compatibile (cea a lui Mackey cu clase de măsuri fixate şi morfisme nestricte şi cea a lui Connes cu măsuri transverse şi morfisme stricte). În [64] Arlan Ramsay a răspuns pozitiv la această întrebare, cu ajutorul unei topologii construite pe un grupoid cu măsură. Pentru a construi această topologie, Ramsay a extins la grupoizi următorul rezultat al lui Mackey [48]: Fie G un grup borelian analitic şi fie μ o măsură σ-finită, boreliană, cvasi invariantă pe G. Atunci există o topologie pe G relativ la care G devine grup topologic local compact. Această topologie generează structura boreliană dată şi este unic determinată de acest fapt. În plus, măsura Haar pentru grupul local compact obținut este echivalentă cu μ. În cazul grupoizilor Ramsay a demonstrat că un grupoid cu măsură G (în sensul lui Mackey) poate fi înzestrat cu o topologie local compactă (eventual trecând la o contracţie neesenţială a grupoidului) astfel încât structura boreliană a lui G să fie generată de această topologie şi G să fie grupoid topologic.

J. Renault [68] a introdus şi studiat C^*-algebrele generate de algebrele de convoluţie pe un grupoid local compact înzestrat cu un sistem Haar (continuu), fără să utilizeze clase invariante de măsuri. Sistemul Haar pe un grupoid local compact reprezintă analogul măsurii Haar pe un grup local compact, şi este necesar pentru definirea produsului de convoluţie. Acest analog constă dintr-un sistem de măsuri indexate după spaţiul unităţilor grupoidului şi care îndeplinesc condiţii de invarianţă şi continuitate. Rezultatul lui Ramsay [64] a arătat că grupoizii cu măsură pot fi presupuşi înzestraţi cu topologii local compacte. Însă, nu orice grupoid local compact admite un sistem Haar (continuu), necesar pentru a defini produsul de convoluţie, şi de asemenea sistemele Haar nu sunt neapărat unice. Condiţia de continuitate impusă sistemului Haar are consecinţe topologice impunând ca aplicaţiile r şi să fie deschise. Pe de altă parte această condiţie de continuitate este crucială în construcţia C^*-algebrei asociate grupoidului ([78], p. 116). Deci grupoizilor pentru care aplicaţiile de proiecţie r şi d nu sunt deschise, nu li se poate asocia o C^*-algebra (în sensul lui Renault). A.K. Seda a stabilit în [75], [76] şi [77] rezultate referitoare la continuitatea, existenţa şi "unicitatea" sistemelor Haar pe grupoizi local compacţi, pe care le vom extinde în 2.3 şi 2.4. Seda a arătat că dacă pentru fiecare unitate u aplicaţia $r|_{G_u}:G_u\rightarrow U_G$ este deschisă, atunci condiţia de continuitate impusă unui sistem Haar este o consecinţă a condiţiei de invarianţă. Condiţia, $r|_{G_u}:G_u\rightarrow U_G$ deschisă, utilizată de Seda pentru a arăta continuitatea sistemelor Haar poate fi interpretată ca o condiţie de local tranzitivitate a grupoidului. Cazul opus al grupoizilor total intranzitivi a fost tratat de Renault, care a arătat că un fibrat grupal G admite un sistem Haar continuu dacă şi numai dacă $r: G \rightarrow U_G$ este deschisă (Lemma 1.3/ pg. 6 [70]). În subcapitolul 2.3 al acestei lucrări vom demonstra o teoremă din care se pot obţine aceste două cazuri extreme drept cazuri particulare.

Algebrele de convoluţie asociate unui grupoid joacă un rol major în domeniul geometriei necomutative. În acest domeniu se pleacă de la observaţia că orice C^*-algebră comutativă este *-izomorfă cu o algebră de funţii continue pe un spaţiu local compact. În multe situații spațiul este complet determinat de algebra de funcții continue definite pe spațiul respectiv. Există însă şi cazuri în care utilizarea topologiei nu conduce la obținerea de informații utile. În [28] Alain Connes exemplifică o astfel de situație considerând covorul lui Penrose ca spațiu topologic X. Din punct de vedere topologic X nu poate fi distins de un punct, deşi geometric este diferit de un punct. Prin analogie cu cazul comutativ, C^*-algebrele necomutative sunt interpretate ca algebre de funcții pe un spațiu necomutativ (ca de exemplu X de mai sus). Spațiile necomutative pot fi caracterizate deseori ca spațiul orbitelor unui grupoid. Spațiu orbitelor poate fi un spațiu patologic din punct de vedere topologic. De aceea pentru studiul spațiului respectiv se utilizează (pe post de algebră de funcții pe spațiu necomutativ) C^*-algebra asociată grupoidul din care provine spațiul orbitelor. Pentru exemplificare considerăm cazul unui spațiu topologic format din două intervale, $\{1\}\times[0,1]$ şi $\{2\}\times[0,1]$ având identificate perechile de puncte (1,x), (2,x) pentru orice $x \neq 1/2$. Acest spațiu este determinat de relația de echivalență definită pe $(\{1\}\times[0,1]) \times (\{2\}\times[0,1])$ prin $(i,x) \sim (j,y)$ dacă şi numai dacă $i = j$ (=1,2) şi $x=y$ sau $i \neq j$ şi $x = y \neq 1/2$. Ca spațiu topologic nu este separat (Hausdorff). Dacă încercăm să caracterizăm acest spațiu prin funcțiile continue definite pe el, atunci punctele (1,1/2) şi (2,1/2) nu pot fi distinse. Din punct de vedere al funcțiilor continue spațiul nu poate fi distins de intervalul [0,1]. Putem însă considera că acest spațiu este spațiul orbitelor grupoidului G generat de relația de echivalență descrisă mai sus şi îi putem asocia o algebră de convoluție. Algebra de convoluție asociată lui G pot fi privită ca algebra matricelor de funcții continue pe intervalul [0,1]:

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} f((1,x),(1,x)) & f((1,x),(2,x)) \\ f((1,x),(1,x)) & f((2,x),(2,x)) \end{pmatrix}$$

care pentru x=1/2 au formă diagonală. Privit în acest fel spațiul poate fi distins de intervalul [0,1], deoarece în cazul intervalului algebra de convoluție asociată grupoidului corespunzător este algebra comutativă a funcțiilor continue definite pe [0,1] care nu este izomorfă cu algebra de matrice de mai sus.

Grupoizii ca generalizări ale grupurilor, mulțimilor, relațiilor de echivalență şi acțiunilor grupurilor pe mulțimi permit o reformulare unificată a acestor concepte.

Obiectul central al acestei lucrări sunt algebrele de convoluție asociate unui grupoid. Rezultatele originale ale acestei lucrării se găsesc în subcapitolele 2.3, 2.4, 3.2, 4.1, 4.3, 5.2 (**b** şi **c**), 5.3, 5.4, 5.5. Celelalte subcapitole au un caracter expozitoriu prezentând definițiile, notațiile şi rezultatele folosite (fără demonstrații). Prezentăm pe scurt conținutul fiecărui capitol şi enunțăm rezultatele mai importante obținute.

Capitolul 1 este dedicat prezentării noțiunilor algebrice legate de grupoizi, utilizate în această lucrare. În capitolul 2 sunt expuse rezultate referitoare la măsurile invariante pe grupoizi. În 2.1 sunt prezentate noțiunile de grupoid borelian şi grupoid cu măsură în sensul lui Mackey (fără condiția de ergodicitate) şi sunt enunțate rezultatele lui Hahn referitoare la existența măsurii Haar pentru astfel de grupoizi. În 2.2 sunt prezentați grupoizii topologici, cu cazul lor particular, grupoizii local triviali, precum şi noțiunea de sistem Haar (continuu) pe un grupoid local compact introdusă de Renault în [68]. În aceste două subcapitole este folosit termenul de cvasi invarianță cu două sensuri diferite. Aceasta nu generează confuzii deoarece în 2.1 cvasi invarianța se referă la măsuri pe grupoid în timp ce în 2.2 se referă la măsuri pe spațiul unităților. În 2.3 şi 2.4 îmbunătățim rezultatele lui Seda, Westman şi Renault legate de continuitatea şi existența sistemelor Haar. În subcapitolul 2.3 prin sistem pre-Haar (definiția 2.3.6) se înțelege o familie de măsuri (pozitive) boreliene $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ cu următoarele proprietăți:

(1) ν^u concentrată pe G^u pentru orice $u \in U_G$

(2) Pentru orice $x \in G$ şi orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to \mathbf{C}$

$$\int f(xy)d\nu^{d(x)}(y) = \int f(y)d\nu^{r(x)}(y)$$

(3) Pentru orice mulțime compactă $K \subset G$

$$\sup_{u \in U_G} \nu^u(K) < \infty \quad (\Leftrightarrow \sup_{u \in r(K)} \nu^u(K) < \infty)$$

Vom demonstra că grupoizii local compacți cu bază numărabilă admit sisteme pre-Haar ce au proprietatea că supp(ν^u) = G^u. Mai mult, vom arăta că pentru grupoizii cu orbite deschise orice sistem pre-Haar este continuu, i.e. pentru orice funcție continuă cu suport compact $f : G \to C$ funcția

$$u \mapsto \int f(y)d\nu^u(y)[: U_G \to C]$$

este continuă. Acesta înseamnă că pentru grupoizii cu orbite deschise sistemul pre-Haar este în fapt sistem Haar.

Utilizând existența a sistemelor Haar (continue) pe un anumit tip de grupoizi şi un rezultat al lui J. Westman [81] referitor la grupoizii care admit sisteme Haar (continue) obținem că aplicația r asociată unui grupoid local compact cu bază numărabilă, cu proprietatea că toate orbitele sunt mulțimi deschise, este o aplicație deschisă.

În secțiunea **d** a subcapitolului 2.3 stabilim o proprietate de continuitate a unui sistem invariant de măsuri pe un grupoid local compact cu bază numărabilă. Utilizând această proprietate arătăm că pentru fiecare $u \in U_G$ aplicația $r_u : G_u \to [u]$, $r_u(x) = r(x)$ este deschisă. În consecință, rezultă că orice grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă este "principal" (Definition 1.18/pg. 27 [46]). Pentru astfel de grupoizi K. Mackenzie a arătat că: Dacă G este un grupoid "principal", H este un grupoid topologic şi $F : G \to H$ este un morfism algebric care este continuu în fiecare unitate u din U_G, atunci F este continuu pe întreg grupoidul G (Proposition 1.21/pg. 30 [46]). În partea a doua a acestei secțiuni arătăm că dacă G este un grupoid local compact cu bază numărabilă, cu aplicația $r : G \to U_G$ deschisă, şi care are proprietatea că din continuitatea unui morfism mărginit, $F : G \to (\mathbf{R},+)$, în fiecare u din U_G rezultă continuitatea lui F pe G, atunci G admite un sistem Haar (continuu). De fapt se arată că pentru ca un sistem pre-Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ care are în plus, proprietatea că există o funcție analitică, $h : G \to [0, 1]$, cu $\nu^u(h) = 1$ pentru orice $u \in U_G$, să fie continuu este suficient ca toate morfismele de tipul $x \overset{F_f}{\mapsto} \int f(y)d\nu^{d(x)} - \int f(y)d\nu^{r(x)}(y)\ [:G \to \mathbf{R}]$ să fie continue, unde $f : G \to R$ este o funcție continuă cu suport compact. Aceste morfisme însă, conform propoziției 2.3.8, sunt continue în fiecare u din U_G. În consecință, dacă G este tranzitiv sau are orbite deschise atunci ele sunt continue pe întreg grupoidul. Pe de altă parte, dacă G este un fibrat de grupuri (grupoid total intranzitiv) atunci toate morfismele de tipul F_f sunt identic egale cu zero. În ambele cazuri se obține continuitatea sistemului Haar. Cele două cazuri corespund rezultatelor obținute de A.K. Seda (Theorem 2/pg. 430 [76]) şi J. Renault (Lemma 1.3/ pg. 6 [70]).

În secțiunea **e** din 2.3. arătăm că pentru orice grupoid G local compact cu bază numărabilă înzestrat cu un sistem pre-Haar, există o contracție (reducere) $G|_L$ cu proprietatea că se poate înlocui topologia indusă de G pe $G|_L$ cu o topologie local compactă în raport cu care sistemul pre-Haar devine continuu. Această contracție $G|_L$ este o reducere neesențială în raport cu orice măsură tranzitivă pe spațiul unităților. Dacă toate orbitele grupoidului sunt local închise, atunci contracția $G|_L$ poate fi aleasă să coincidă cu G. În consecință, dându-se un sistem pre-Haar pe un grupoid G, putem înlocui topologia de pe G (trecând eventual la o contracție a grupoidului) astfel încât sistemul pre-Haar să poată fi văzut ca un sistem Haar, şi ca urmare putem construi C^*-algebra asociată acestui sistem.

Orice grupoid G defineşte o relație de echivalență pe spațiul unităților U_G:

$$u \sim v \iff \text{există } x \in G \text{ astfel încât } r(x) = u \text{ şi } d(x) = v.$$

Graficul acestei relații de echivalență, înzestrat cu produsul şi aplicația de inversare asociate în mod obişnuit unei relații de echivalență, devine un grupoid R denumit grupoidul principal asociat lui G. Dacă G este un grupoid topologic, atunci putem înzestra R cu topologia produs indusă de pe $U_G \times U_G$. Dacă topologia lui G este local compactă, atunci topologia produs pe R este local compactă dacă şi numai dacă R este o submulțime local închisă în $U_G \times U_G$. Pe de altă parte, dacă înzestrăm R cu topologia produs, existența unui sistem Haar pe G nu implică neapărat existența uni sistem Haar pe R. În secțiunea **f** din 2.3. vom înzestra R cu topologia cât indusă de aplicația

$$\theta : G \to U_G \times U_G$$

definită prin

$$\theta(x) = (r(x), d(x)), \text{ pentru orice } x \in G.$$

Această topologie conține mulțimile a căror imagine inversă prin θ este deschisă ca submulțime a lui G. Vom demonstra că dacă restricția aplicației r la fibratul grupurilor de izotropie:

$$G' = \{x : r(x) = d(x)\}$$

este o aplicaţie deschisă, atunci R înzestrat cu topologia cât este un grupoid local compact şi existenţa unui sistem Haar pe G este echivalentă cu existenţa unui sistem Haar pe R.

În 2.4 demonstrăm proprietăţi suplimentare pentru sistemul de măsuri obţinut prin aplicarea teoremei de structură a măsurii Haar (Theorem 4.4/pg. 23 [41]), proprietăţi ce sunt utilizate în următoarele subcapitole. De asemenea arătăm că dacă G este un grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă, există o corespondenţă biunivocă între clasele de sisteme Haar $[\{\nu^u,\ u\in U_G\}]$ cu supp $\nu^u = G^u$ $(\forall)$ $u \in U_G$ şi clasele de măsuri pe U_G, $[\mu_0]$, cu supp $\mu_0 = U_G$. ($\{\nu_1^u,\ u\in U_G\} \sim \{\nu_2^u,\ u\in U_G\}$ <=> $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ $d_*(\nu_1^u)$ -a.p.t.).

În 3.1 se prezintă pe scurt produsul de convoluţie pe un grupoid şi algebrele de convoluţie asociate în două situaţii: în cazul în care pe grupoid se fixează o clasă invariantă de măsuri [42] şi în cazul în care se fixează un sistem Haar [68]. În 3.2 construim alte două *- algebre Banach, $L_{1,\infty}\left(\{\nu^u\},\tilde{\lambda}\right)$ şi $L^{1,\infty}\left(\{\nu^u\},\tilde{\lambda}\right)$ constând în clase de funcţii pe un grupoid <u>tranzitiv</u> G înzestrat cu o măsură Haar $(\nu,\tilde{\lambda})$. Pentru aceste *-algebre Banach înmulţirea este produsul de convoluţie şi involuţia este dată prin $f^*(y)=\overline{f(y^{-1})}\Delta(y^{-1})$, unde Δ este o anumită funcţie modulară asociată sistemului Haar $\{\nu^u, u\in U_G\}$ şi probabilităţii cvasi invariante $\tilde{\lambda}$. Demonstrăm că dacă avem două sisteme Haar pe G, $\nu_1=\{\nu_1^u,\ u\in U_G\}$ şi $\nu_2=\{\nu_2^u,\ u\in U_G\}$, cu probabilităţile cvasi invariante $\tilde{\lambda}_1$ şi $\tilde{\lambda}_2$ corespunzătoare, atunci $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\},\tilde{\lambda}_1\right)$ şi $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\},\tilde{\lambda}_2\right)$ sunt *-izomorfe ca spaţii Banach cu involuţie (dar nu neapărat ca algebre!). Dacă $\{\nu_1^u,\ u\in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u,\ u\in U_G\}$ admit aceeaşi probabilitate cvasi invariantă $\tilde{\lambda}$ (<=> $\nu_1^u \sim \nu_2^u$ a.p.t.), atunci $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\},\tilde{\lambda}\right)$, $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\},\tilde{\lambda}\right)$, şi de asemenea $L^{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\},\tilde{\lambda}\right)$, $L^{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\},\tilde{\lambda}\right)$ sunt *-algebre Banach izomorfe. Mai mult, vom vedea că un anumit izomorfism de spaţii Banach cu involuţie de la $L_{1,\infty}\left(\{\nu_1^u\},\tilde{\lambda}_1\right)$ la $L_{1,\infty}\left(\{\nu_2^u\},\tilde{\lambda}_2\right)$ este un izomorfism de algebre dacă şi numai dacă $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ (aceasta înseamnă că $\{\nu_1^u, u \in U_G\}$ şi $\{\nu_2^u, u \in U_G\}$ admit aceeaşi probabilitate cvasi invariantă $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$, deci $\int \nu_1^u d\tilde{\lambda}(u) \sim \int \nu_2^u d\tilde{\lambda}(u)$).

Grupoizii amenabili au fost definiţi de J. Renault în [68]. Conceptul de amenabilitate, ca şi în cazul grupurilor local compacte cu bază numărabilă, poate fi descris în multe moduri echivalente. Amenabilitatea pentru grupoizi este prezentată detaliat în [1]. În 4.1 se introduc spaţiile de funcţii necesare pentru definirea aplicaţiilor amenabile. În afara spaţiilor de funcţii utilizate în [1] introducem încă un spaţiu şi demonstrăm o proprietate de densitate a acestui spaţiu. Această proprietate este utilizată în 4.2 pentru a arăta că se poate întări condiţia de normalizare impusă unei medii aproximative slab invariantă. Definiţiile echivalente pentru aplicaţiile amenabile şi grupoizii amenabili stabilite în [1] sunt prezentate în 4.2. În 4.3 demonstrăm o proprietate de anulare a mediilor invariante, ce extinde la grupoizi următorul rezultat din cazul grupurilor local compacte (21.2. [59]): dacă G este un grup local compact necompact şi m este o medie invariantă pe $L^\infty(G)$, atunci $m(\varphi) = 0$ pentru orice funcţie φ continuă pe G care se anulează la infinit.

În 5.1 sunt expuse pe scurt construcţiile C^* - algebrei şi C^* -algebrei reduse asociate unui grupoid local compact, construcţii care se găsesc în [68] şi [56]. Definiţia C^*-algebrei depinde de alegerea unui sistem Haar pe grupoid. Dar definiţia unei reprezentări pe grupoid nu depinde. În cazul grupurilor măsura Haar este esenţial unică, dar în cazul general al grupoizilor sistemele Haar nu sunt unice. Subcapitolul 5.2. conţine consideraţii asupra modului în care C^*-algebra asociată unui grupoid depinde de sistemul Haar ales. În secţiunea **a** din 5.2. este prezentată noţiunea de echivalenţă Morita precum şi rezultatul obţinut de Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams (Theorem 2.8/p. 10 [57]) conform căruia la sisteme Haar diferite pe un grupoid G corespund C^*-algebre Morita echivalente în sens tare. Acesta este dealtfel singurul rezultat referitor la independenţa C^*-algebrei asociate unui grupoid de sistemul Haar considerat. Se pune întrebarea dacă C^*-algebrele asociate cu două sisteme Haar diferite sunt *-izomorfe. Aceasta este încă o problemă deschisă. În cazul grupoizilor tranzitivi răspunsul este afirmativ, aşa cum arată un rezultat obținut tot de Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams (Theorem 3.1/p. 16 [57]). În secțiunea **b** din 5.2. se arată că în cazul grupoizilor G tranzitivi cu bază numărabilă $C^*(G, \nu) = M^*(G, \nu)$, unde $C^*(G, \nu)$ este C^*-algebra asociată de Renault sistemului Haar ν, iar $M^*(G, \nu)$ este C^*-algebra asociată de Ramsay şi Walter în [67] sistemului Haar ν. În secțiunea c din 5.2. reobținem rezultatul lui Paul Muhly, Jean Renault şi Dana Williams (Theorem 3.1/p. 16 [57]) privind independența de sistemul Haar a C^*-algebrei asociate unui grupoid tranzitiv local compact cu bază numărabilă, punând explicit în evidență izomorfismul dintre C^*-algebrele asociate la două sisteme Haar diferite.

Un rezultat din [1] stabileşte că dacă G este un grupoid topologic local-compact, înzestrat cu un sistem Haar $\nu = \{\nu^u, u \in U_G\}$ şi dacă G este măsurabil amenabil atunci $C^*(G) = C^*_{red}(G)$. Reciproca acestei teoreme constituie o problemă deschisă. În 5.4 demonstrăm că, în cazul tranzitiv, reciproca acestei teoreme este adevărată.

În subcapitolul 5.5 introducem o noțiune de amenabilitate pentru reprezentările unitare ale unui grupoid, generalizând astfel noțiunea similară din cazul grupurilor local compacte, introdusă de Bekka în [5]. Grupoizii amenabili sunt caracterizați prin amenabilitatea tuturor reprezentărilor lor. De asemenea demonstrăm un analog, în versiune necomutativă, al "proprietății de anulare" a unei mediei invariante pe un grupoid local-compact cu grupurile de izotropie necompacte.

În subcapitolul 5.6 prezentăm noțiunea de C^*-sistem dinamic grupoidal şi construcția C^*-algebrei asociate dată de Masuda în [52].