

NR CONTRACT: 33346/29.06.2004

TIP PROGRAM: At

COD CNCSIS: 127

AN DE DERULARE: I (2004)

Valoare totală grant: 42 000 mii lei

Denumirea Proiectului: ABORDAREA NOȚIUNILOR DE SIMETRIE ȘI SPAȚIU DIN PERSPECTIVA GRUPOIZILOR

Director de proiect: lector dr. Mădălina Roxana Buneci

Universitatea Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

Sinteza lucrării

1. Stadiul actual al cunoașterii în domeniu

Geometria necomutativă (inventată de A. Connes) este un domeniu nou în matematică cu o dezvoltare rapidă ce leagă între ele diverse ramuri ale matematicii și fizicii. Ideea de bază în geometria necomutativă este de a trata anumite clase de algebre necomutative pe post de spații (în sens geometric) și de a extinde instrumentele matematicii comutative (topologie, geometrie, analiză, algebră comutativă) în acest nou context. În geometria clasică spațiul este considerat ca fiind o mulțime de puncte înzestrată cu o structură suplimentară (de exemplu, structură topologică dată printr-o familie de mulțimi deschise sau structura diferențiabilă dată prin intermediul unui atlas). În cazul clasic fiecărui spațiu local compact (Hausdorff) X i se poate asocia C^* -algebra (comutativă) $C(X)$ a funcțiilor continue care se anulează la infinit. Binecunoscutul rezultat Gelfand-Naimark stabilește reciproca: dându-se o C^* -algebra comutativă A se poate construi un spațiu local compact (Hausdorff) X astfel încât $A = C(X)$. Punctele lui X sunt caracterizate de idealele maximale ale lui A (sau echivalent de caracterele lui A), și deci se poate reconstrui structura geometrică a lui X plecând de la A . Abordarea bazată pe geometria necomutativă presupune regăsirea geometriei unui spațiu plecând de la o C^* -algebră necomutativă. Prin analogie cu cazul comutativ, C^* -algebrele necomutative sunt interpretate ca algebre de funcții pe un spațiu necomutativ. Este important de menționat că există două interpretări diferite privind relația dintre spațiile necomutative și C^* -algebrele asociate. Una presupune că spațiile determină algebrele (până la un izomorfism) și algebrele determină spațiile. Cealaltă (propusă inițial de Connes) presupune că geometria este determinată de clase de C^* -algebre Morita echivalente. În sens tare (definiție introdusă de M. Rieffel în *Induced representations of C^* -algebras*, Adv. in Math. **13**(1974), 176-254 și în *Strong Morita equivalence of certain transformation group C^* -algebras*, Math. Ann. **222**(1976), 7-22, pe baza noțiunii de C^* -modul Hilbert). Cu alte cuvinte această a doua abordare presupune că C^* -algebre neizomorfe, dar Morita echivalente în sens tare descriu același spațiu necomutativ.

Geometria necomutativă oferă instrumente pentru studiul unor spații patologice din punct de vedere topologic. În *Noncommutative Geometry* (Academic Press, 1994) Alain Connes exemplifică o astfel de situație considerând covorul lui Penrose ca spațiu

topologic X . Din punct de vedere topologic X nu poate fi distins de un punct, deși geometric este diferit de un punct. Algebrele de convoluție asociate unui grupoid joacă un rol major în domeniul geometriei necomutative. Spațiile necomutative pot fi caracterizate deseori ca spațiul orbitelor unui grupoid. Spațiul orbitelor poate fi un spațiu patologic din punct de vedere topologic. De aceea pentru studiul spațiului respectiv se utilizează (pe post de algebră de funcții pe spațiu necomutativ) C^* -algebra asociată grupoidului din care provine spațiul orbitelor.

Pentru definirea produsului de convoluție este necesar un analog al măsurii Haar pe grupurile local compact. Acest analog consta dintr-un sistem de măsuri indexate după spațiul unităților grupoidului și care îndeplinesc condiții de invarianță și continuitate. Un rezultat al lui Ramsay (din *Topologies on measured groupoids*, J. Functional Analysis **47** (1982), 314-343) arată ca grupoizii cu măsură pot fi presupuși înzestrați cu topologii local compacte. Însă, nu orice grupoid local compact admite un sistem Haar (continuu), și de asemenea sistemele Haar nu sunt neapărat unice. Condiția de continuitate impusă sistemului Haar are consecințe topologice (aplicațiile de proiecție ale grupoidului trebuie să fie deschise). Pe de altă parte această condiție de continuitate este crucială în construcția C^* -algebrei asociate grupoidului (după cum a arătat Seda în *On the continuity of Haar measure on topological groupoids*, Proc. Amer. Math. Soc., **96** (1986), 115-120). Deci grupoizilor pentru care aplicațiile de proiecție nu sunt deschise, nu li se poate asocia o C^* -algebră (în sensul lui Renault). A.K. Seda a stabilit rezultate referitoare la continuitatea, existența și unicitatea sistemelor Haar pe grupoizi local compacti. Seda a arătat (în *A continuity property of Haar systems of measures*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **89** IV (1975), 429-433) ca dacă grupoidul este local tranzitiv, atunci condiția de continuitate impusă unui sistem Haar este o consecință a condiției de invarianță. Cazul opus al grupoizilor total intranzitivi a fost tratat de Renault (în *The ideal structure of groupoid crossed product C^* -algebras*, J. Operator Theory, **25** (1991), 3-36.), care a arătat că un fibrat grupal G admite un sistem Haar continuu dacă și numai dacă aplicația lui de proiecție este deschisă.

2. Obiectivele științifice prevăzute

Obiectivul de bază al acestui proiect (pentru anul I de derulare) a fost studiul modului în care C^* -algebra asociată unui grupoid depinde de sistemul Haar ales. Acest studiu este relevant datorită rolului C^* -algebrelor asociate grupoizilor în geometria necomutativă, unde grupoizii reprezintă o sursă de spații necomutative. Nu se cunoaște dacă C^* -algebrele asociate cu două sisteme Haar diferite sunt sau nu $*$ -izomorfe. Singurul rezultat asupra independenței C^* -algebrei de sistemul Haar este cel al lui Muhly, Renault și Williams (din *Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras*, J. Operator Theory **17**(1987), 3-22) conform căruia la sisteme Haar diferite corespund C^* -algebre Morita echivalente în sens tare. Tot Muhly, Renault și Williams au arătat că C^* -algebra $C^*(G)$ asociată unui grupoid tranzitiv local compact G (înzestrat cu un sistem Haar) este izomorfă cu $C^*(H) \otimes K(L^2(G^{(0)}, \mu))$, unde H este un grup de izotropie a grupoidului, $G^{(0)}$ este spațiul unităților, μ este o măsura Radon cu suportul egal cu $G^{(0)}$, $C^*(H)$ este C^* -algebra asociată grupului H , iar $K(L^2(G^{(0)}, \mu))$ este algebra operatorilor compacți pe $L^2(G^{(0)}, \mu)$. Pentru a demonstra aceasta teorema ei au arătat mai întâi ca $C^*(G)$ și $C^*(H)$ sunt Morita echivalente în sens tare via un C^* -modul Hilbert X_1 . În consecință, $C^*(G)$

este *-izomorfă cu algebra de imprimitivitate a lui X_1 . Apoi au construit un alt C^* -modul Hilbert X_2 peste $C^*(H)$ a cărei algebră de imprimitivitate este $C^*(H) \otimes K(L^2(G^{(0)}, \mu))$ pentru o anumită măsura μ . De aici a rezultat izomorfismul dintre $C^*(G)$ și $C^*(H) \otimes K(L^2(G^{(0)}, \mu))$ și mai mult a rezultat independența de sistemul Haar.

Scopul principal al acestui proiect, în primul an de derulare, a constat în determinarea unor clase mai generale de grupoidi pentru care C^* -algebrele asociate cu două sisteme Haar diferite să fie *-izomorfe. Abordare propusă (utilizarea structurii sistemelor Haar) este diferită de cea a lui Muhly, Renault și Williams. Mai precis, este vorba despre utilizarea descompunerilor sistemelor Haar în raport cu grupoidul principal asociat sau descompuneri mai fine. Studiul sistemelor Haar și a descompunerilor sistemelor Haar pe un grupoid aduce informații suplimentare asupra topologiei grupoidului.

Un obiectiv secundar al acestui proiect a fost familiarizarea studenților cu felul în care grupoidii pot măsura simetria, și de ai încuraja să aplice acest concept în grafica pe calculator.

3. Rezultate științifice

Studiul continuității sistemelor Haar și a continuității descompunerilor sistemelor Haar în raport cu grupoidul principal asociat a condus la obținerea unui răspuns negativ la o întrebare pusă de Kirill Mackenzie (în *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, LMS Lecture Note Ser., vol. **124**, Cambridge Univ. Press, 1987): Fiind dat un morfism $\varphi : G \rightarrow H$ de grupoidi topologici, continuitatea lui φ pe o vecinătate a bazei lui G , atrage după sine continuitatea lui φ în orice punct din G ? Mai mult, s-au caracterizat grupoidii pentru care problema pusă de Mackenzie are răspuns pozitiv (mai precis, s-a demonstrat că dacă G este un grupoid în care fiecare orbită conține cel puțin două elemente și dacă aplicațiile de proiecție asociate lui G sunt deschise, atunci continuitatea oricărui morfism φ de grupoidi topologici într-o vecinătate a bazei lui G atrage după sine continuitatea lui φ pe G , dacă și numai dacă G este local tranzitiv). Aceste rezultate se găsesc în lucrarea :

M. Buneci, *Morphisms that are continuous on a neighborhood of the base of a groupoid*, în curs de apariție în *Studia Sci. Math. Hungar.*

Un alt rezultat obținut în acest proiect este construcția unei C^* -algebre asociate unui grupoid local compact care să fie independentă de sistemul Haar. Pentru grupoidii local tranzitivi această nouă C^* -algebră coincide cu C^* -algebra uzuală (introdusă de Renault în *A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, **793**, 1980). Ca o consecință, se regăsește (într-o variantă mai generală) rezultatul lui Muhly, Renault și Williams privind izomorfismul dintre C^* -algebrele asociate unor sisteme Haar diferite pe un grupoid local compact tranzitiv. Spre deosebire de abordarea lui Muhly, Renault și Williams, izomorfismul dintre C^* -algebrele asociate unor sisteme Haar diferite este explicit pus în evidență. În cazul grupoidilor proprii principali această nouă C^* -algebră conține C^* -algebra uzuală. De asemenea, s-a arătat că în cazul unui grupoid propriu principal înzestrat cu două sisteme Haar ale căror descompuneri induc fibrate Hilbert cu "baze" continue, C^* -algebrele uzuale (introduse de Renault) asociate celor două sisteme Haar sunt *-izomorfe. Aceste rezultate se găsesc în lucrarea :

M. Buneci, *Isomorphic groupoid C^* -algebras associated with different Haar systems*, trimisă la New York J. Math.

O prezentare a acestor rezultate precum și a faptului că noua C^* -algebră construită poate fi privită ca o subalgebră a C^* -algebrei introduse de A. Ramsay și M. E. Walter (în *Fourier-Stieltjes algebras of locally compact groupoids*, J. Functional Analysis **148** (1997), 314-367) s-a făcut prin intermediul posterului

"*Groupoid C^* -algebras which are independent of the Haar systems*" prezentat de M. Buneci la 4 ECM (Fourth European Congress of Mathematics), Stockholm, 27 iunie - 2 iulie 2004.

Punerea în evidență a unor clase particulare de grupoizi pentru care noua C^* -algebră construită și C^* -algebra uzuală (introdusă de Renault) coincid a fost punctul principal al comunicării

M. Buneci, *C^* -algebras associated to groupoids with proper orbit space*, comunicare la OT20 (20th International Conference on Operator Theory), Timișoara, 30 iunie-5 iulie 2004.

Construcția C^* -algebrei independente de sistemul Haar s-a făcut plecând de la o secțiune $\sigma : G^{(0)} \rightarrow G^F$ a aplicației $d_F : G^F \rightarrow G^{(0)}$, $d_F(x) = x^{-1}x$, unde F este o submulțime a spațiului unităților care conține exact un element din fiecare orbită. Dacă d_F este deschisă se pot demonstra o serie de proprietăți ale descompunerilor sistemelor Haar și ale C^* -algebrelor asociate. În

M. Buneci, *An application of Mackey's selection lemma*, trimisă spre publicare pentru Proceedings of ICNODEA-2004 (International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications), Cluj Napoca (Romania), 24-27 august 24-27 2004.

s-a demonstrat că dacă restricția aplicației de proiecție r a grupoidului la fibratul grupurilor de izotropie este deschisă, atunci d_F este deschisă dacă și numai dacă d_F admite o secțiune regulată (un invers la dreapta care transportă mulțimile compacte în mulțimi relativ compacte în G^F).

Un obiectiv secundar al acestui proiect a fost familiarizarea studenților (din echipă) cu felul în care grupoizii pot măsura simetria. Am realizat împreună două lucrări. În

M. Buneci, C. Cercel, A. Dincă, *A program for obtaining the symmetry groupoid associated to a labeled graph*, Proceedings of the International Scientific Conference "Economy and Globalization", June 4-5, 2004, Târgu-Jiu, România, 289-294

s-au asociat diverși grupoizi unui graf orientat etichetat pornind de la construcția grupoidului simetric definit de Stewart, M. Golubitsky and M. Pivato (în *Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks*, SIAM J. Appl. Dynam. Sys. **2** (4) (2003) 609-646). De asemenea s-a realizat un program în C pentru determinarea elementelor ce aparțin grupoizilor introduși în lucrare.

În lucrarea

M. Buneci, C. Cercel, A. Dincă, V. Ungureanu, *Groupoids and Coloring of Graphs*, acceptată pentru Proceedings of ICTAMI 2004 (International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics) September 16-18, 2004, Thessaloniki (Greece), (dar neprezentată la conferință).

s-au definit doi grupoizi de simetrie asociați unui graf orientat colorat (cu noduri colorate) și s-au caracterizat diverse moduri de colorare a grafului cu ajutorul grupoizilor de simetrie introduși.

În concluzie, s-au obținut rezultate parțiale privind rezolvarea problemei deschise (Este sau nu C^* -algebra asociată unui grupoid local compact independentă (până la un $*$ -izomorfism) de sistemul Haar ?) care constituie scopul principal al acestui proiect. De asemenea, s-a reușit să se dea un răspuns (negativ) la o problemă ridicată de Mackenzie în 1987, și să se caracterizeze grupoizii pentru care întrebarea pusă de Mackenzie are răspuns afirmativ. Studenții din echipă au fost încurajați să înțeleagă și să aplice în domeniul lor de interes concepte matematice noi, și să participe la manifestări științifice.

4. Mobilități (vizite de studiu , participări la manifestări științifice interne și internaționale in concordanță cu tematica grantului)

1. C. Cercel și A. Dincă, premiul II. la sesiunea de comunicări științifice StudIT 26 - 28 martie 2004, Universitatea de Vest Timișoara .
2. M. Buneci, C. Cercel, A. Dincă, International Scientific Conference "Economy and Globalization", June 4-5, 2004, Târgu-Jiu- titlul comunicării: *A program for obtaining the symmetry groupoid associated to a labeled graph*
3. M. Buneci, 4 ECM (Fourth European Congress of Mathematics), Stockholm, June 27 -July 2 2004 - Poster: *Groupoid C^* -algebras which are independent of the Haar systems.*
4. M. Buneci, OT20 (20th International Conference on Operator Theory), Timișoara, June 30 -July 5 2004-Titulul comunicării: *C^* -algebras associated to groupoids with proper orbit space*
5. A. Dincă, Summer School for Image Processing 2004, July 05 - 15 2004, Graz, Austria.
6. M. Buneci, ICNODEA-2004 (International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications), Cluj Napoca (Romania), August 24-27 2004 -Poster : *An application of Mackey's selection lemma.*
7. M. Buneci, Analysis and Applied Mathematics Summer School, Rome, University "La Sapienza", September 20-24, 2004.

5. Lista lucrărilor realizate în proiect

1. M. Buneci, C. Cercel, A. Dincă, *A program for obtaining the symmetry groupoid associated to a labeled graph*, Proceedings of the International Scientific Conference "Economy and Globalization", June 4-5, 2004, Târgu-Jiu, România, 289-294
2. M. Buneci, *Morphisms that are continuous on a neighborhood of the base of a groupoid*, în curs de apariție în *Studia Sci. Math. Hungar.*
3. M. Buneci, *Isomorphic groupoid C^* -algebras associated with different Haar systems*, trimisă la *New York J. Math.*
4. M. Buneci, *An application of Mackey's selection lemma*, trimisă spre publicare pentru Proceedings of ICNODEA-2004 (International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications), Cluj Napoca (Romania), 24-27 august 24-27 2004.
5. M. Buneci, *C^* -algebras associated to groupoids with proper orbit space*, în pregătire.

6. Alte lucrări acceptate pentru publicare (legate de tematica grantului)

1. M. Buneci, *Necessary and sufficient conditions for the continuity of a pre-Haar system at a unit with singleton orbit*, în curs de apariție în *Quasigroups and Related Systems*.
2. M. Buneci, *Amenable equivariant maps defined on a groupoid*, în curs de apariție în Proceedings of of the Operator Algebras and Mathematical Physics conference, Sinaia, June 26-July 4, 2003 (eds. O. Bratteli, R.Longo, H. Siedentop), Theta Foundation.

Târgu-Jiu, 27 septembrie 2004

Director de proiect,
Lector dr. Mădălina Roxana Buneci