

NR CONTRACT: 34682/24.06.2005

TIP PROGRAM: At

COD CNCIS: 127

AN DE DERULARE: II (2005)

Valoare totală grant (an II de derulare): 80 000 mii lei

Denumirea Proiectului: ABORDAREA NOȚIUNILOR DE SIMETRIE ȘI SPAȚIU DIN PERSPECTIVA GRUPOIZILOR

Director de proiect: conf. dr. Mădălina Roxana Buneci

Universitatea Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

Sinteza lucrării

1. Obiectivele științifice prevăzute

Studiul mediilor invariante pe grupuri a fost început de J. von Neumann în 1929. Începând de atunci s-au demonstrat multe proprietăți echivalente cu existența unei medii invariante pe un grup local compact. Day a introdus denumirea de grupuri amenabile pentru grupurile cu aceste proprietăți. Această noțiune remarcabilă a fost extinsă și în alte ramuri ale matematicii: există semi-grupuri amenabile, algebre Banach amenabile, C^* -algebre amenabile, grupuri cuantice amenabile, etc. Extinderea de la grupuri la grupoizii a conceptului de amenabilitate îi aparține lui J. Renault (*A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, **793**, 1980). Acest concept a fost studiat detaliat de către C. Anantharaman-Delaroche și J. Renault în *Amenable Groupoids*, Monographie de L'Enseignement Mathematique **36**, Geneve, 2000. În aceasta monografie sunt studiate diferite noțiuni de amenabilitate, atât pentru grupoizii măsurabili cât și pentru a grupoizii local compacți. Sunt stabilite condiții necesare și suficiente pentru amenabilitate, demonstrația echivalenței anumitor condiții fiind încă o problemă deschisă. De exemplu, C. Anantharaman-Delaroche și J. Renault au arătat că dacă grupoidul este amenabil (relativ la orice măsură c -invariantă), atunci C^* -algebra și C^* -algebra redusă asociate grupoidului sunt egale. Reciproca acestei teoreme constituie o problemă deschisă.

Obiectivul principal al acestui proiect (pentru anul al II-lea de derulare) a fost determinarea unor condiții echivalente cu amenabilitatea în contextul grupoizilor local compacți, cu accent pe legătura cu morfismele, reprezentările și C^* -algebrele asociate.

Un obiectiv secundar al acestui proiect este legat de acumularea de către cei doi studenți din proiect (C. Cercel și A. Dincă) a noi cunoștințe în ceea ce privește conceptul de simetrie din perspectiva grupoizilor, precum și a unor noțiuni matematice (avansate) folosite în grafica pe calculator.

2. Principalele rezultate științifice

În monografia menționată în secțiunea anterioară C. Anantharaman-Delaroche și J. Renault introduc noțiunea de aplicație echivariantă amenabilă și definesc grupoizii amenabili prin amenabilitatea aplicației r (range map) asociate. Referitor la aplicațiile

amenabile am obținut în acest proiect două rezultate. Primul dintre ele se găsește în lucrarea:

M. Buneci, *Amenable equivariant maps defined on a groupoid*, în curs de apariție în Proceedings of the Operator Algebras and Mathematical Physics conference, Sinaia, June 26-July 4, 2003, Theta Foundation

lucrare ce a fost doar îmbunătățită și scrisă în formă finală în acest an de derulare a proiectului, trimiterea ei spre publicare (într-o primă formă) realizându-se în 2004. În lucrare am arătat echivalența dintre amenabilitatea unei aplicații definite pe un grupoid și amenabilitatea unui produs semidirect. De asemenea, lucrarea conține o variantă de extindere la grupoizi a binecunoscutului rezultat al lui Pier (21.2, *Amenable locally compact group*, Wiley, New York, 1984) din cazul grupurilor: Dacă G este un grup amenabil local compact dar necompact, atunci orice medie invariantă pe $L^\infty(G)$ se anulează pe funcțiile continue care se anulează la infinit. În cazul grupoizilor rezultatul stabilit este: Dacă (G, λ, μ) este un grupoid local compact cu măsură în care μ -aproape toate grupurile de izotropie nu sunt compacte și cu proprietatea că aplicația $\theta: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta(x) = (r(x), d(x))$ este amenabilă, atunci orice medie invariantă (indusă de o medie aproximativă tare invariantă) pentru θ se anulează pe toate funcțiile continue cu suport compact. Un analog necomutativ al acestui rezultat încheie această lucrare.

Al doilea rezultat privind condițiile necesare și suficiente ca o aplicație să fie amenabilă se găsește în

M. Buneci, *Amenable map and semi-direct products*, trimisă pentru Proceedings of the 9th National Conference of the Romanian Mathematical Society, Lugoj, May, 2005.

și este stabilit în următorul context. Fie G un grupoid cu măsură, S și T două G -spații boreliene și $\pi: T \rightarrow S$ o aplicație G -echivariantă boreliană. Am arătat că dacă π este amenabilă, atunci S este un G -spațiu amenabil. Reciproc, dacă S este un G -spațiu amenabil și dacă există o aplicație G -echivariantă $\rho: T \rightarrow G$ (nu neapărat amenabilă), atunci π este amenabilă. Pentru obținerea acestui rezultat am definit un o reprezentare analoagă reprezentării regulate și am stabilit legătura dintre amenabilitate acestei reprezentări și amenabilitatea aplicației echivariante.

În lucrarea

M. Buneci, *A notion of open generalized morphism that carries amenability*, trimisă pentru Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2005). Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. **10**(2005).

se extinde noțiunea de morfism (ca relație) introdusă de Zakrzewski pentru grupoizii diferențiali (*Quantum and Classical pseudogroups II*. Comm. Math. Phys. **134** (1990), 371-395) la cazul grupoizilor local compacti. De asemenea se reformulează această noțiune în termeni de acțiuni ale grupoizilor. Principalul rezultat al lucrării este

introducerea unei noțiuni de morfism deschis (în sens generalizat) care transportă amenabilitatea. Diferența principală față de noțiunea de corespondență (pereche de acțiuni ce satisfac anumite condiții) folosită de C. Anatharaman-Delaroche și J. Renault este că renunțăm pentru una dintre acțiuni la condiția de a fi proprie, dar cerem ca cealaltă acțiune să fie obținută prin translație (multiplicare).

Reformularea în termeni de acțiuni și extinderea în contextul grupoizilor local compacți a noțiunii de morfism (ca relație) introdusă de Zakrzewski s-a dovedit interesantă și prin reflectarea ei în C^* -algebrele asociate grupoizilor. Astfel în prezentarea făcută la

4th International Conference on Analysis and Quantum, April 9-11, 2005
(Mathematics Institute of LMU, Munich, Germany)

s-a arătat că având un morfism între doi grupoizi Γ și G local compacți cu bază numărabilă, amenabili, înzestrați cu sisteme Haar, morfism care satisface în plus o condiție de compatibilitate cu sistemele Haar, se poate construi un morfism de la C^* -algebra asociată lui Γ la algebra multiplicatorilor C^* -algebrei asociate lui G (Γ și G fiind amenabili, C^* -algebrele uzuale și reduse coincid). La

Operator Algebras and Mathematical Physics Conference, București (România),
July 10-17, 2005

s-a prezentat posibilitatea de a defini diverse categorii de grupoizi amenabili precum și legătura cu algebrele de operatori asociate.

În lucrarea *C^* -algebras and amenable groupoids* (care este în curs de finalizare) am stabilit condiții în care un morfism în sens generalizat definește o C^* -normă. De asemenea, în cazul grupoizilor amenabili, am stabilit condiții pentru care C^* -algebra definită de această C^* -normă coincide cu C^* -algebra uzuală. Rezultate parțiale din această lucrare au fost prezentate la

Conferința Națională de Analiză Matematică și Aplicații, Craiova (Romania), 22-24 septembrie, 2005.

În lucrarea

M. Buneci, *Isomorphic groupoid C^* -algebras associated with different Haar systems*. New York J. Math. **11**, 225-245 (2005).

am construit o C^* -algebră asociată unui grupoid local compact independentă de sistemul Haar. Pentru grupoizii local tranzitivi această nouă C^* -algebră coincide cu C^* -algebra uzuală. Ca o consecință, se regăsește (într-o variantă mai generală) rezultatul lui Muhly, Renault și Williams privind izomorfismul dintre C^* -algebrele asociate unor sisteme Haar diferite pe un grupoid local compact tranzitiv. Spre deosebire de abordarea lui Muhly, Renault și Williams, izomorfismul dintre C^* -algebrele asociate unor sisteme Haar diferite este explicit pus în evidență. În cazul grupoizilor proprii principali această nouă C^* -algebră conține C^* -algebra uzuală. De asemenea, s-a arătat că în cazul unui grupoid propriu principal înzestrat cu două sisteme Haar ale căror descompuneri induc fibrate

Hilbert cu "baze" continue, C^* -algebrele uzuale (introduse de Renault) asociate celor două sisteme Haar sunt $*$ -izomorfe. Lucrarea a fost trimisă spre publicare în 2004, și a fost acceptată pentru publicare în 2005 după adăugarea unor exemple care să clarifice clasa de grupoizi cu care se lucrează .

3. Dezvoltarea resursei umane

Proiectul a determinat lărgirea orizontului matematic, având în vedere că tema propusă este la intersecția mai multor domenii ale matematicii (analiza funcțională, teoria măsurii, teoria categoriilor, teoria reprezentărilor). Deși o parte din activitățile din proiect s-ar fi desfășurat și în absența finanțării, existența acesteia a permis o mai bună documentare și valorificare/diseminare a rezultatelor. O parte din fondurile din acest proiect au fost destinate mobilităților (participări la manifestări științifice interne și internaționale), urmărindu-se pe de o parte îmbunătățirea documentării, iar pe de altă parte creșterea capacității de comunicare, de prezentare a ideilor și rezultatelor. De asemenea participarea la conferințe interdisciplinare a oferit posibilitatea discutării cu experți din alte domenii și găsirea unor noi domenii în care tema propusă ar putea avea aplicații.

Studentii Alina Dincă și Constantin Cercel (membri ai echipei acestui proiect) au acumulat cunoștințe noi de grafică pe calculator prin participarea la școala de vară 13th Summer School for Image Processing (30 iunie-8 iulie, Szeged, Hungary). La competiția care s-a organizat în cadrul acestei școli de vară proiectul la care au lucrat ei împreună cu Csaba Domokos, László Papp (Universitatea din Szeged, Ungaria) și Adrian Ulges (Technical University of Kaiserslautern, Germania) a obținut premiul întâi.

5. Mobilități (vizite de studiu , participări la manifestări științifice interne și internaționale în concordanță cu tematica grantului)

1. M. Buneci - 4th International Conference on Analysis and Quantum, April 9-11, 2005 (Mathematics Institute of LMU, Munich, Germany)-Titlul comunicării: *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*.
2. M. Buneci -A IX-a conferință națională a Societății de Științe Matematice din România, Lugoj, 6-7 mai, 2005- Titlul comunicării: *Amenable map and semi-direct products*.
3. C. Cercel și A. Dincă - Zilele Tehnice Studentești, Timișoara, 16-22 mai, 2005.
4. C. Cercel și A. Dincă - 13th Summer School for Image Processing (June 30-July 8, Szeged, Hungary).
5. M. Buneci - Operator Algebras and Mathematical Physics Conference, București (România), July 10-17, 2005- Titlul comunicării: *Groupoid categories*

6. M. Buneci - ICTAMI 2005 (International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics), Albac (România), September 15-18, 2005- Titlul comunicării: *A notion of open generalized morphism that carries amenability*.

7. M. Buneci - Conferința Națională de Analiză Matematică și Aplicații, Craiova (Romania), 22-24 septembrie, 2005- Titlul comunicării: *C^* -algebras and amenable groupoids*.

6. Lista lucrărilor realizate în proiect (At 127)

Lucrări apărute în 2005:

1. M. Buneci, *Morphisms which are continuous on a neighborhood of the base of a groupoid*. Studia Sci. Math. Hungar, **42**(3), 281-292 (2005). [ISSN 0081-6906] (acceptată pentru publicare în 2004)
2. M. Buneci, *Isomorphic groupoid C^* -algebras associated with different Haar systems*. New York J. Math. **11**, 225-245 (2005). [ISSN 1076-9803].

Lucrări în curs de apariție

3. M. Buneci, *Amenable equivariant maps defined on a groupoid*, în curs de apariție în Proceedings of the Operator Algebras and Mathematical Physics conference, Sinaia, June 26-July 4, 2003, Theta Foundation

Lucrări acceptate pentru publicare

4. M. Buneci, *An application of Mackey's selection lemma*, acceptată pentru publicare în Studia Universitatis Babes-Bolyai, Matematica.

Lucrări trimise spre publicare:

5. M. Buneci, *Amenable map and semi-direct products*, trimisă pentru Proceedings of the 9th National Conference of the Romanian Mathematical Society, Lugoj, May, 2005.
6. M. Buneci, *A notion of open generalized morphism that carries amenability*, trimisă pentru Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2005). Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. **10**(2005). [ISSN 1582-5329].

In pregătire

7. M. Buneci, *C*-algebras and amenable groupoids*
8. M. Buneci, *Noțiuni matematice folosite în grafica pe calculator*

7. Alte lucrări (legate de tematica grantului)

9. M. Buneci și V. Ungureanu, *Symmetry groupoids associated to a labeled graph*, Proceedings of 2nd the International Scientific Conference Economy and Globalization, June 3-4, 2005, Targu-Jiu (Romania), Ed. Universitaria, Craiova, 2005, 373-376. [ISBN 973-742-094-2].
10. M. Buneci și V. Ungureanu, *Coloring of graphs-an approach using symmetry*, Proceedings of the 2nd International Scientific Conference Economy and Globalization, June 3-4, 2005, Targu-Jiu (Romania), Ed. Universitaria, Craiova, 2005, 393-398. [ISBN 973-742-094-2].

8. Concluzii

Obiectivele propuse au fost îndeplinite, după cum rezultă din secțiunile precedente. De asemenea au fost deschise direcții de cercetare noi ce vor fi dezvoltate în proiecte viitoare. Participarea la manifestările științifice internaționale a dus la sporirea contactelor academice având efect benefic asupra unor colaborări viitoare.

Târgu-Jiu, 28 septembrie 2005

Director de proiect,
Conf. dr. Mădălina Roxana Buneci