

NR CONTRACT: 2987/11.10.2005

Programul:	Cercetare de Excelenta
Modul: II	Proiecte de Dezvoltare a Resurselor Umane pentru Cercetare
Tipul proiectului:	Proiecte de cercetare de excelenta pentru tinerii cercetători
Cod proiect:	ET 65/2005

Valoarea totala a proiectului este de 80000 RON

Valoarea totala a proiectului in 2005 este de 12500 RON

ETAPA (din Anexa II): unică (finală a anului 2005)

VALOARE FAZA: 12500 RON

Denumirea Proiectului: MORFISME GENERALIZATE DE GRUPOIZI

Director de proiect:

conf. dr. Mădălina Roxana Buneci- Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

Membrii echipei de cercetare:

lector drd. Novac Claudiu Chiriac- Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

asistent drd. Dragoș Pătru Covei - Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

lector dr. Sorin-Mirel Stoian- Univ. Petroșani

Sinteza lucrării

1. Obiectivele științifice prevăzute

Ideea lui Alain Connes de a asocia o C^* -algebra $C^*(G)$ unui grupoid G joacă un rol important nu doar în geometria necomutativă ci și în fizică. În geometria necomutativă, $C^*(G)$ înlocuiește un spațiu cât patologic printr-un spațiu necomutativ potrivit, în timp ce în fizică, $C^*(G)$ dă algebra observabilelor unui sistem cuantic ale cărui simetrii sunt exprimate prin G . Se pune următoarea întrebare: este aplicația $G \rightarrow C^*(G)$ functorială?. Mai precis, care este noțiunea potrivită de morfism de grupoizi și care noțiune de C^* -categorie trebuie utilizată? Este cunoscut faptul că noțiunea standard de homomorfism de grupoizi (o aplicație ce satisface condiții evidente de compatibilitate cu structura grupoidului) nu poate fi utilizată. Argumentarea se bazează pe faptul că în cazul grupurilor C^* -functorul ar fi covariant, în timp ce în cazul spațiilor C^* -functorul ar fi contravariant.

Scopul acestui proiect este de a introduce noțiuni de morfisme de grupoizi (în sens generalizat) pentru a obține aplicații functoriale de la categorii de grupoizi (înzestrați cu diverse structuri) la categorii corespunzătoare de C^* -algebre.

Pentru anul 2005 obiectivul principal al acestui proiect este introducerea unei noțiuni noi de morfism de grupoizi în contextul local-compact Hausdorff, plecând de la noțiunea de morfism ca relație introdusă de Zakrzewski în contextul grupoizilor algebrici și diferențiali. Scopul introducerii noilor morfisme este definirea unei categorii de grupoizi local-compacți care să facă posibilă construirea unui functor covariant de la aceasta categorie la o C^* -categorie potrivită în sensul lui Woronowicz.

2. Principalele rezultate științifice

Principalul rezultat obținut se găsește în lucrarea:

M. Buneci și P. Stachura, *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*, arXiv: math.OA/05101613 (31 pagini).

Noțiunea de morfism de grupoizi local compacți, care a fost introdusă, poate fi privită ca o extindere a noțiunii de morfism ca relație introdusă de Zakrzewski în cazul algebric-*Quantum and Classical pseudogroups I*. Comm. Math. Phys. **134** (1990), 347-370. Spre deosebire de lucrările lui Zakrzewski, în acest proiect morfismele sunt definite în termeni de acțiuni de grupoizi- un morfism de la un grupoid Γ la un grupoid G este dat de o acțiune la stânga a lui Γ pe G care comută cu multiplicarea pe G (privită ca acțiune la dreapta a lui G pe G). Aplicațiile moment ale acțiunilor considerate nu sunt presupuse surjective și nici deschise. De asemenea, acțiunile la stânga nu sunt presupuse proprii, și nici libere. Aceasta face ca noțiunea de morfism utilizată să fie diferită de diversele noțiuni de corespondențe utilizate de M. Macho-Stadler și M. O'uchi (*Correspondences and groupoids*. Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry si Physics, Publicaciones de la RSME, **3** (2000), 233-238), C. Anantharaman-Delaroche și J. Renault (*Amenable Groupoids*. Monographie de L'Enseignement Mathematique **36**, Geneve, 2000) sau de J.L. Tu (*Non-Hausdorff Grupoizi, Proper Actions si K-Theory*. Documenta Math.**9** (2004) 565-597). Totodată noțiunea de morfism introdusă (care nu presupune că acțiunea este proprie și nici tranzitivă de-a lungul fibrelor) este distinctă de cea de "bibundle" a lui N.P. Landsman (*Operator algebras si Poisson manifolds associated to groupoids*. Comm. Math. Phys. **222** (2001), 97-116). În plus, noțiunea utilizată de Landsman este definită în contextul particular al grupoizilor Lie. În cazul grupoizilor Lie problema dependenței de sistemele Haar nu se pune, deoarece pe grupoizii Lie există o modalitate canonică de alegere a unui sistem Haar, pe când în cazul general local compact nu există nici o proprietate de unicitate evidentă sau vreo posibilitate de alegere canonică a sistemului Haar. Structura topologică a grupoizilor considerați în acest proiect și sistemele Haar cu care s-au presupus înzestrați au impus introducerea unor condiții suplimentare (de compatibilitate cu sistemele Haar). S-a obținut astfel o categorie de grupoizi local compacți Hausdorff înzestrați cu sisteme Haar.

De asemenea s-a introdus o nouă C^* -algebră asociată unui grupoid local compact generalizându-se construcția făcută de P. Stachura în cazul grupoizilor diferențiabili. Modalitatea în care s-a construit această C^* -algebră a făcut posibilă stabilirea ușoară a legăturii dintre ea și C^* -algebrele obișnuite asociate grupoizilor local compacți: C^* -algebra construită este inclusă în C^* -algebra redusă și conține C^* algebra universală. Dacă grupoidul este (măsurabil) amenabil toate aceste algebre coincid. S-a mai arătat că pentru un grupoid cu spațiul orbitelor propriu, C^* -norma introdusă și C^* -norma universală coincid pe mulțimea funcțiilor pozitive continue cu suport compact.

Compatibilitatea morfismelor cu sistemele Haar a fost utilizată pentru a construi un functor covariant de la categoria grupoizilor local compacți Hausdorff înzestrați cu sisteme Haar la o C^* -categorie în sensul lui Woronowicz.

Colaborarea cu P. Stachura pentru realizarea acestei lucrări precum și motivațiile introducerii acestei noțiuni de morfism care decurg din fizica cuantică (ce vor fi prezentate în lucrare) se datorează și grantului HPRN-CT-2002-0277 (în cadrul

programului internațional Postdoctoral Training Program "Analysis and Quantum", finanțat în FP5). Acesta este motivul pentru care pe lucrare se precizează suport parțial din grantul MedC-ANCS ET65/2005 și parțial din grantul HPRN-CT-2002-0277.

Un alt rezultat obținut în acest proiect (în 2005) este caracterizarea spectrului și a razei spectrale pentru operatorii universal mărginiți (pe spații local convexe). Lucrarea

S. Stoian, *Spectral sets for universally bounded operators*, arXiv: math.FA/0511671 (23 pagini).

are drept scop studierea operatorilor mărginiți pe spații local convexe și în particular caracterizarea spectrului și a razei spectrale pentru operatorii universal mărginiți. Teoria spectrală pentru operatorii mărginiți definiți pe spații Banach reprezintă modelul pentru rezultatele obținute în această lucrare. Astfel, dacă $T \in Q_{\mathbf{P}}(X)$ raza \mathbf{P} -spectrală, notată $r_{\mathbf{P}}(T)$ este considerată ca fiind raza de mărginire în sensul lui Allan. Având în vedere particularitățile algebrei $Q_{\mathbf{P}}(X)$ raza \mathbf{P} -spectrală satisface majoritatea proprietăților razei de mărginire a unui element dintr-o algebră m -convexă.

Este demonstrat că dacă T este un operator mărginit în $Q_{\mathbf{P}}(X)$ iar X este un spațiu local convex semicomplet, atunci $|\sigma(Q_{\mathbf{P}}, T)| = r_{\mathbf{P}}(T)$ și pentru orice $|\lambda| > r_{\mathbf{P}}(T)$ seria

Neumann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ este convergentă în $Q_{\mathbf{P}}(X)$ la $R(\lambda, T)$. Folosind egalitățile

$$\sigma_{\text{lm}}(T) = \sigma(Q, T) = \sigma(T),$$

se arată că

$$r_{\text{lm}}(T) = |\sigma(T)| = |\sigma_{\text{lm}}(T)| = |\sigma(Q, T)|,$$

acesta reprezentând principalul rezultat care permite studiul mulțimii spectrale a unui operator local mărginit T pe un spațiu local convex semicomplet. Ca și în cazul Banach se arată că mulțimea spectrală $\sigma(T)$ este compactă, iar mulțimea rezolventă $\rho(T)$ este domeniul de analiticitate al rezolventei.

În etapa următoare a acestui proiect intenționăm să arătăm ca fiecare morfism de grupoizi de la Γ la G (în sensul precizat la începutul acestei secțiuni) induce o C^* -seminormă pe algebra funcțiilor continue cu suport compact $C_c(\Gamma)$ și să studiem la ce revine caracterizarea spectrului și a razei spectrale pentru operatorii universal mărginiți pe $C_c(\Gamma)$.

Un alt grup de rezultate obținute în 2005 în acest proiect este îmbunătățirea modelului Eddington în care intervine operatorul lui Laplace cu aplicare în modelele staționare radial simetrice și modelul M.C. Pelissier (unde sunt modelate fenomene fizice prin operatorul general p -laplacian). Aceste rezultate se găsesc în lucrările:

1. D. Covei, *A few results about the p -Laplace's operator*, acceptată pentru publicare în Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2005). *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.* No. **10**(2005). [ISSN 1582-5329].
2. D. Covei, *Existence of positive solutions to a semilinear problems*, prezentată la .International Conference Several aspects of biology, chemistry, informatics, mathematics and physics, Oradea, noiembrie 2005.

3. D. Covei, *Existence and uniqueness of positive solutions to a quasilinear elliptic problem in \mathbf{R}^N* acceptată spre publicare în Electronic Journal of Differential Equations [ISSN 1072-6691].

Din cele de mai sus rezultă că obiectivele propuse au fost îndeplinite, obținându-se și rezultate suplimentare. Timpul scurt pentru această etapă nu a permis publicarea/redactarea în vederea trimiterii spre publicare în jurnale a tuturor rezultatelor.

3. Dezvoltarea resursei umane

Abordarea temei propuse în această etapă a necesitat combinarea unor elemente de analiză funcțională (în particular, teoria algebrelor de operatori) cu analiză matematică, și teoria categoriilor. De asemenea, rezultatele obținute au aplicații potențiale în fizica și geometria necomutativă. Ca urmare, proiectul a determinat lărgirea orizontului matematic. Pentru aprofundarea cunoștințelor în domeniile precizate mai sus (precum și pentru armonizarea cunoștințelor membrilor echipei), începând din luna octombrie 2005, la Departamentul de Matematică al Universității Constantin Brâncuși se desfășoară (săptămânal) un seminar despre *Algebre de convoluție asociate grupoizilor și aplicații*. În cadrul acestui seminar au fost prezentate (de M. Buneci) următoarele teme:

1. Grupoizii ca generalizări ale grupurilor, relațiilor de echivalență, mulțimilor, și acțiunilor grupurilor pe mulțimi.
2. Grupoizi topologici și grupoizi borelieni (standard și analitici)
3. Măsuri pe grupoizi. Sistemul Haar pe grupoizi-analogul măsurii Haar pe grupurile local compacte
4. Convoluția pe grupoizi. Algebra funcțiilor continue cu suport compact definite pe un grupoid.
5. Reprezentări de grupoizi (în fibrare Hilbert)
6. Legătura dintre reprezentările grupoidului și cele ale algebrei funcțiilor continue cu suport compact.
7. Instrumente ale geometriei necomutative. Cum intervin grupoizii în geometria necomutativă.

O mică parte din fondurile din această etape au fost destinate mobilităților (participări la manifestări științifice desfășurate în țară), urmărindu-se pe de o parte îmbunătățirea documentării, iar pe de altă parte creșterea capacității de comunicare, de prezentare a ideilor și rezultatelor.

4. Mobilități (vizite de studiu , participări la manifestări științifice interne și internaționale în concordanță cu tematica grantului)

- 1) D. Covei, ICTAMI 2005 (International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics), Albac (România), septembrie 2005- Titlul comunicării: *A few results about the p -Laplace's operator*.
- 2) D. Covei, International Conference Several aspects of biology, chemistry, informatics, mathematics and physics, Oradea, noiembrie 2005- Titlul comunicării: *Existence of positive solutions to a semilinear problems*.

5. Lista lucrărilor realizate în proiect în anul 2005

1. M. Buneci și P. Stachura, *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*, arXiv: math.OA/0511613 (31 pagini)
2. D. Covei, *A few results about the p -Laplace's operator*, acceptată pentru publicare în Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2005). *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.* No. **10**(2005). [ISSN 1582-5329].
3. D. Covei, *Existence and uniqueness of positive solutions to a quasilinear elliptic problem in \mathbf{R}^N* acceptată spre publicare în Electronic Journal of Differential Equations [ISSN 1072-6691].
4. S. Stoian, *Spectral sets for universally bounded operators*, arXiv: math.FA/0511671 (23 pagini).

În pregătire

5. M. Buneci, *Groupoid categories*, în pregătire (va fi trimisă pentru Proceedings of Operator Algebras and Mathematical Physics Conference, București, July 10-17, 2005)

Târgu-Jiu, 28 noiembrie 2005

Director de proiect,
Conf. dr. Mădălina Roxana Buneci