

NR CONTRACT: 2987/11.10.2005

Programul:	Cercetare de Excelenta
Modul: II	Proiecte de Dezvoltare a Resurselor Umane pentru Cercetare
Tipul proiectului:	Proiecte de cercetare de excelenta pentru tinerii cercetători
Cod proiect:	ET 65/2005

Valoarea totala a proiectului este de 80000 RON

Valoarea totala a proiectului in 2006 este de 40000 RON

Denumirea Proiectului: MORFISME GENERALIZATE DE GRUPOIZI

Director de proiect:

conf. dr. Mădălina Roxana Buneci- Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

Membrii echipei de cercetare:

lector drd. Novac Claudiu Chiriac- Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

asistent drd. Dragoș Pătru Covei - Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

lector dr. Sorin-Mirel Stoian- Univ. Petroșani

Sinteza lucrării

1. Obiectivele științifice prevăzute

Ideea lui Alain Connes de a asocia o C^* -algebra $C^*(G)$ unui grupoid G joacă un rol important nu doar în geometria necomutativă ci și în fizică. În geometria necomutativă, $C^*(G)$ înlocuiește un spațiu cât patologic printr-un spațiu necomutativ potrivit, în timp ce în fizică, $C^*(G)$ dă algebra observabilelor unui sistem cuantic ale cărui simetrii sunt exprimate prin G . Se pune următoarea întrebare: este aplicația $G \rightarrow C^*(G)$ functorială?. Mai precis, care este noțiunea potrivită de morfism de grupoizi și care noțiune de C^* -categorie trebuie utilizată? Este cunoscut faptul că noțiunea standard de homomorfism de grupoizi (o aplicație ce satisface condiții evidente de compatibilitate cu structura grupoidului) nu poate fi utilizată. Argumentarea se bazează pe faptul că în cazul grupurilor C^* -functorul ar fi covariant, în timp ce în cazul spațiilor C^* -functorul ar fi contravariant.

Scopul acestui proiect este de a introduce noțiuni de morfisme de grupoizi (în sens generalizat) pentru a obține aplicații functoriale de la categorii de grupoizi (înzestrați cu diverse structuri) la categorii corespunzătoare de C^* -algebre.

Obiectivele acestui proiect în anul 2006 sunt introducerea unor noțiuni noi de morfisme de grupoizi (în context local compact și borelian) și studierea proprietăților grupoizilor local compacți sau borelieni care sunt conservate de izomorfisme, și care sunt transportate de morfismele în sens generalizat introduse.

2. Principalele rezultate științifice

Lucrarea:

M. Buneci and P. Stachura, *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*, trimisă spre publicare la Documenta Mathematica.

introduce o noțiune de morfism de grupoizi local compacți care poate fi privită ca o extindere a noțiunii de morfism ca relație introdusă de Zakrzewski în cazul algebric [*Quantum and Classical pseudogroups I*. Comm. Math. Phys. **134** (1990), 347-370]. Spre deosebire de lucrările lui Zakrzewski, morfismele sunt definite în termeni de acțiuni de grupoizi- un morfism de la un grupoid Γ la un grupoid G este dat de o acțiune la stânga a lui Γ pe G care comută cu multiplicarea pe G . De asemenea se introduce o nouă C^* -algebră asociată unui grupoid local compact (generalizându-se construcția făcută de P. Stachura în cazul grupoizilor diferențiali) și se construiește un functor covariant de la categoria grupoizilor local compacți Hausdorff înzestrați cu sisteme Haar la o C^* -categorie în sensul lui Woronowicz.

Colaborarea cu P. Stachura pentru realizarea acestei lucrări precum și motivațiile introducerii acestei noțiuni de morfism care decurg din fizica cuantică se datorează și grantului HPRN-CT-2002-0277 (în cadrul programului internațional Postdoctoral Training Program "Analysis and Quantum", finanțat în FP5). Finalizarea acestei lucrări a fost posibilă și datorită grantului CEEEX (modulul 3) PR-D11-PT00-48/2005 care a permis invitarea în iulie 2006 a lui P. Stachura la universitatea noastră. Acesta este motivul pentru care pe lucrare se precizează suport parțial din granturile MedC-ANCS ET65/2005, MedC-ANCS PR-D11-PT00-48/2005 și HPRN-CT-2002-0277.

Lucrarea

M. Buneci, *Groupoid categories*, acceptată pentru publicare în Proceedings of Operator Algebras and Mathematical Physics Conference, București, 2005.

conține următoarele rezultate:

- caracterizări ale noțiunii de morfism introdusă în lucrarea *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems* (M. Buneci și P. Stachura), exprimate în termeni de homomorfisme de produse semi-directe de grupoizi.

- se arată că noțiunea de izomorfism din noua categorie coincide cu noțiunea clasică de izomorfism de grupoizi (homomorfism care în plus, este aplicație bijectivă).

- se stabilesc condiții în care un morfism (în sens generalizat) transportă sistemele Haar

- se stabilesc condiții în care sistemul Haar obținut prin transport satisface o condiție de compatibilitate cu morfismul (condiție de compatibilitate utilizată în *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems* (M. Buneci și P. Stachura) pentru construcția unui functor covariant de la categoria grupoizilor local compacți Hausdorff înzestrați cu sisteme Haar la o C^* -categorie în sensul lui Woronowicz).

Condiția de compatibilitate între morfisme și sistemele Haar presupune existența unei funcții continue ale cărei restricții la diverși subgrupoizi să joace rol de derivate Radon-Nikodym. În lucrarea

M. Buneci, *Borel morphisms and C^* -algebras*, trimisă spre publicare în Proceedings of 21st International Conference on Operator Theory, Timișoara, 2006.

se înlocuiește acea condiție de compatibilitate (condiție ce era dificil de verificat, cu excepția unor clase particulare de grupoizi) cu o condiție mai slabă exprimată în termeni de măsuri cvasi-invariante. Se arată că oricărui morfism definit prin acțiuni boreliene (pe grupoizi local compacți Hausdorff cu bază numărabilă, priviți ca grupoizi borelieni), care

satisface în plus această condiție de compatibilitate mai slabă, și se poate asocia o familie de reprezentări. Utilizând aceste reprezentări se construiește o nouă C^* -algebră $C^*(G)$ asociată unui grupoid G în termeni de morfisme boreliene. În lucrarea

M. Buneci, *C^* -algebras obtained by completion of the space of Borel bounded compactly supported functions on a groupoid*. (în pregătire)

se definește o C^* -algebră $M^*(G)$ asociată unui grupoid G (local compact Hausdorff cu bază numărabilă) prin completarea algebrei funcțiilor boreliene mărginite cu suport compact pe G într-o C^* -normă definită în termeni de morfisme boreliene. De asemenea se arată că aplicația $G \rightarrow M^*(G)$ este functorială.

Comunicarea

Groupoid morphisms, ICM2006 (International Congress of Mathematicians) , Madrid 21-31 august 2006.

făcută de M. Buneci a avut la bază diversele noțiuni de morfisme de grupoizi introduse în lucrările descrise mai sus. S-au prezentat de asemenea rezultate privind caracterul functorial al diverselor aplicații de tip $G \rightarrow C^*(G)$ și s-au comparat noțiunile de morfism introduse cu cele lui Zakrzewski [*Quantum and Classical pseudogroups I*. Comm. Math. Phys. **134** (1990), 347-370], M. Macho-Stadler și M. O'uchi [*Correspondences and groupoids*. Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry si Physics, Publicaciones de la RSME, **3** (2000), 233-238] și N.P. Landsman [*Operator algebras si Poisson manifolds associated to groupoids*. Comm. Math. Phys. **222** (2001), 97-116].

Comunicarea

Haar systems compatible with groupoid morphisms, 4th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics, București, octombrie 2006.

făcută de M. Buneci s-a axat pe prezentarea unor condiții suficiente pentru existența sistemele Haar compatibile cu un morfism dat. De asemenea au fost expuse rezultate privind măsura în care C^* -norma definită în termeni de morfisme (continue sau boreliene) coincide cu C^* -norma universală.

În lucrarea

S.M. Stoian, *Functional Calculus for Quotient Bounded Operators*, trimisă spre publicare în Proceedings of International Workshop on "Operator Models and Applications" - OMA 2006, Timișoara, 2006

se prezintă o generalizare a calculului funcțional clasic (pentru operatorii mărginiți pe spații Banach) la elementele mărginite ale algebrei operatorilor q -mărginiți pe un spațiu local convex.

În lucrarea

S.M. Stoian, *Spectral properties for bounded operators on locally convex spaces*, trimisă spre publicare la Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

au fost îmbunătățite rezultatele privind caracterizarea razei spectrale pentru operatorii q -mărginiți (pe un spațiu local convex X) $Q_p(X)$. În lucrare se introduce noțiunea de rază spectrală $r_p(T)$ pentru operatorii T q -mărginiți pe spații local convexe și se arată că $|\sigma$ (

$Q_{\mathbf{P}}, T) = r_{\mathbf{P}}(T)$, iar dacă $|\lambda| > r_{\mathbf{P}}(T)$ seria Neumann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^n}{\lambda^{n+1}}$ este convergentă în $Q_{\mathbf{P}}(X)$ la

$R(\lambda, T)$. În plus, se studiază și operatorii mărginiți pe spații local convexe (în particular caracterizarea razei spectrale).

Alt grup de rezultate privesc geometria diferențială și mecanica relativistă. În lucrarea

N. Chiriac, *Normal Anti-Invariant Submanifolds Of Paraquaternionic Kähler Manifolds*, trimisă spre publicare în Proceedings of International Workshop on "Operator Models and Applications" - OMA 2006, Timișoara, 2006.

se definesc varietățile normal anti-invariante ale varietăților paracuaternionice Kähler și se studiază structurile geometrice induse pe ele. Se stabilesc condiții necesare și suficiente pentru integrabilitatea distribuțiilor definite pe o subvarietate normal anti-invariantă. De asemenea se prezintă caracterizări ale produselor local (global) anti-invariante. Lucrările

I. Chiriac și N. Chiriac, *Studiul mărimilor fizice cuadritensoriale în mecanica relativistă*. Sesiunea de comunicări științifice „Globalizare și identitate”, Universitatea „Constantin Brâncuși” Târgu-Jiu, 2-3 iunie 2006.

I. Chiriac și N. Chiriac, *Studiul legilor de conservare ale mărimilor relativiste*. Sesiunea de comunicări științifice „Globalizare și identitate”, Universitatea „Constantin Brâncuși” Târgu-Jiu, 2-3 iunie 2006.

sunt axate pe studiul legilor de conservare în mecanica relativistă.

Un alt grup de rezultate obținute în 2006 în acest proiect privesc studiul problemelor la limită semiliniare și cvasiliniare. Astfel comunicarea lui D. Covei

Semilinear and quasilinear problems, Euroconferences in Crete „Discontinuous change in behavior issues in partial differential equations” June 10-16, 2006, Anogia, Crete Greece.

a conținut rezultate de existență, unicitate insistând mai ales pe aplicații ale punctului critic și pe principii de maxim în studiul problemelor semiliniare și cvasiliniare.

Lucrarea

D. Covei, *Existence of positive solutions to a semilinear problem*. Proceedings of International Conference Several aspects of biology, chemistry, informatics, mathematics and physics, Oradea, 2005, Analele Universității din Oradea, Fascicula Matematică, Tom **XIII**, 2006, ISSN 1221-1265.

tratează o problema de tip Emden Fowler, iar

D. Covei, *Remark to a quasilinear problem in \mathbf{R}^N* , acceptată pentru publicare în Proceedings of MENP-4 (4th International Colloquium “Mathematics in Engineering and Numerical Physics), București, octombrie 2006

probleme de reacție difuzie.

Din cele de mai sus rezultă că obiectivele propuse au fost îndeplinite, obținându-se și rezultate suplimentare.

3. Dezvoltarea resursei umane

Abordarea temei propuse în acest an a necesitat combinarea unor elemente de analiză funcțională (în particular, teoria operatorilor și a algebrelor de operatori) cu analiză matematică, teoria măsurii și teoria categoriilor. De asemenea, rezultatele obținute au aplicații potențiale în fizica și geometria necomutativă. Ca urmare, proiectul a determinat lărgirea orizontului matematic. Pentru aprofundarea cunoștințelor în domeniile precizate mai sus (precum și pentru armonizarea cunoștințelor membrilor echipei), începând din luna octombrie 2005, la Departamentul de Matematică al Universității Constantin Brâncuși se desfășoară (săptămânal) un seminar despre *Algebre de convoluție asociate grupoizilor și aplicații*. În cadrul acestui seminar în anul 2006 au fost făcute expuneri privind:

- Grupoizi borelieni (standard și analitici); Sisteme de măsuri pe grupoizii borelieni; Descompuneri ale sistemelor de măsuri pe grupoizi; Acțiuni pe grupoizi; Grupoizii și geometria necomutativă; Noțiunile de echivalență Morita și de similaritate pentru grupoizi; Grupoizi borelieni echivalenți. (M. Buneci)
- Caracterizarea spectrului și a razei spectrale pentru operatorii universal mărginiți; Calcul funcțional pentru operatorii q-mărginiți. (M.S. Stoian)
- Probleme de reacție-difuzie (D. Covei).
- Morfisme de grupoizi și algebre de convoluție (P. Stachura)
- Mărimi fizice cuadritensoriale în mecanica relativistă (N. Chiriac)

O parte din fondurile din 2006 au fost destinate mobilităților (participări la manifestări științifice desfășurate în țară), urmărindu-se pe de o parte îmbunătățirea documentării, iar pe de altă parte creșterea capacității de comunicare, de prezentare a ideilor și rezultatelor.

Doctoranzii din echipa proiectului s-au pregătit și în cadrul programului lor de doctorat. Astfel, N. Chiriac a susținut în 2006 în cadrul programului de doctorat examenul “Elemente de topologie algebrică (omotopie, omologie și coomologie)”. De asemenea a pregătit referatul “Conexiuni liniare pe spații fibrante vectoriale” pentru a fi susținut în decembrie 2006. În plus, D. Covei și-a perfecționat pregătirea prin frecventarea cursurilor postuniversitare de „Tehnologia informațiilor și comunicațiilor”.

4. Mobilități (vizite de studiu , participări la manifestări științifice interne și internaționale în concordanță cu tematica grantului)

- 1) D. Covei, Euroconferences in Crete „Discontinuous change in behavior issues in partial differential equations” June 10-16, 2006, Anogia, Crete Greece. Titlul comunicării: *Semilinear and quasilinear problems*.

- 2) N. Chiriac, Sesiunea de comunicări științifice „Globalizare și identitate”, Universitatea „Constantin Brâncuși” Târgu-Jiu, 2-3 iunie 2006. Titlul comunicării: Studiul mărimilor fizice cuadritensoriale în mecanica relativistă
- 3) N. Chiriac, Sesiunea de comunicări științifice „Globalizare și identitate”, Universitatea „Constantin Brâncuși” Târgu-Jiu, 2-3 iunie 2006. Titlul comunicării: Studiul legilor de conservare ale mărimilor relativiste.
- 4) M. Buneci, Sesiunea de comunicări științifice „Globalizare și identitate”, Universitatea „Constantin Brâncuși” Târgu-Jiu, 2-3 iunie 2006. Titlul comunicării: Grupoizii în geometria necomutativă.
- 5) M. Buneci, OT21 (International Conference on Operator Theory) Timișoara, 29 iunie-4 iulie 2006. Titlul comunicării: *Borel morphisms and C*-algebras*.
- 6) M.S. Stoian, OT21 (International Conference on Operator Theory) Timișoara, 29 iunie-4 iulie 2006. Titlul comunicării: *Spectral properties of locally bounded operators*.
- 7) M. Buneci, Workshop OMA2006 (Operatorial Models and Applications). *Conference on Operator Theory*) Timișoara, 29 iunie-4 iulie 2006. Titlul comunicării: *Groupoid C*-algebras*.
- 8) M.S. Stoian, Workshop OMA2006 (Operatorial Models and Applications). Titlul comunicării: *Bounded elements of the algebra of quotient bounded operators*.
- 9) D. Covei, Workshop OMA2006 (Operatorial Models and Applications). Titlul comunicării: *A problem with differential equations*.
- 10) N. Chiriac, Workshop OMA2006 (*Operatorial Models and Applications*). Titlul comunicării: *Normal Anti-Invariant Submanifolds of Paraquaternionic Kahler Manifolds*.
- 11) M. Buneci, ICM2006 (International Congress of Mathematicians), Madrid 21-31 august 2006. Titlul comunicării: *Groupoid morphisms*.
- 12) D. Covei, MENP-4 (4th International Colloquium “Mathematics in Engineering and Numerical Physics), București, 6-8 octombrie 2006. Poster: *Remark to a quasilinear problem in \mathbf{R}^N* .
- 13) M. Buneci, MENP-4 (4th International Colloquium “Mathematics in Engineering and Numerical Physics), București, 6-8 octombrie 2006. Titlul comunicării: *Haar systems compatible with groupoid morphisms*.

5. Lista lucrărilor realizate în proiect în anul 2006

1. D. Covei, *Existence of positive solutions to a semilinear problems*. Proceedings of International Conference Several aspects of biology, chemistry, informatics, mathematics and physics, Oradea, 2005, Analele

- Universității din Oradea, Fascicola Matematică, Tom **XIII**, 2006, ISSN 1221-1265.
2. M. Buneci, *Groupoid categories*, acceptată pentru publicare în Proceedings of Operator Algebras and Mathematical Physics Conference, București, 2005.
 3. D. Covei, *Remark to a quasilinear problem in \mathbf{R}^N* , acceptată pentru publicare în Proceedings of MENP-4 (4th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics), București, octombrie 2006.
 4. M. Buneci and P. Stachura, *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*, trimisă spre publicare la Documenta Mathematica.
 5. S.M. Stoian, *Spectral properties for bounded operators on locally convex spaces*, trimisă spre publicare la Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.
 6. M. Buneci, *Borel morphisms and C^* -algebras*, trimisă spre publicare în Proceedings of 21st International Conference on Operator Theory, Timișoara, 2006.
 7. D. Covei, *Existence of positive solutions to a quasilinear elliptic problem in \mathbf{R}^N* , trimisă spre publicare în Proceedings of International Workshop on "Operator Models and Applications" - OMA 2006, Timișoara, 2006.
 8. N. Chiriac, *Normal Anti-Invariant Submanifolds of Paraquaternionic Kahler Manifolds*, trimisă spre publicare în Proceedings of International Workshop on "Operator Models and Applications" - OMA 2006, Timișoara, 2006.
 9. M. Buneci, *Groupoid C^* -algebras*, trimisă spre publicare în Proceedings of International Workshop on "Operator Models and Applications" - OMA 2006, Timișoara, 29 iunie-4 iulie 2006.
 10. S.M. Stoian, *Functional Calculus for Quotient Bounded Operators*, trimisă spre publicare în Proceedings of International Workshop on "Operator Models and Applications" - OMA 2006, Timișoara, 2006.

În pregătire

11. M. Buneci, *Haar systems compatible with groupoid morphisms*, în pregătire (va fi trimisă pentru Proceedings of the 4th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics, București, octombrie 2006).
12. M. Buneci, *C^* -algebras obtained by completion of the space of Borel bounded compactly supported functions on a groupoid*.

Târgu-Jiu, 14 noiembrie 2006

Director de proiect,
Conf. dr. Mădălina Roxana Buneci