

**NR CONTRACT: 2987/11.10.2005**

Programul:	Cercetare de Excelenta
Modul: II	Proiecte de Dezvoltare a Resurselor Umane pentru Cercetare
Tipul proiectului:	Proiecte de cercetare de excelenta pentru tinerii cercetători
Cod proiect:	ET 65/2005

**Valoarea totala a proiectului este de 80000 RON**

**Valoarea totala a proiectului in 2007:**

**27500 lei (RON) (antecalcul); 27499,72 lei (RON) (postcalcul)**

**Denumirea Proiectului: MORFISME GENERALIZATE DE GRUPOIZI**

**Director de proiect:**

conf. dr. Mădălina Roxana Buneci- Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

**Membrii echipei de cercetare:**

lector drd. Novac Claudiu Chiriac- Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

asistent drd. Dragoș Pătru Covei - Univ. Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

lector dr. Sorin-Mirel Stoian- Univ. Petroșani

## **Sinteza lucrării**

### **1. Obiectivele științifice prevăzute**

Ideea lui Alain Connes de a asocia o  $C^*$ -algebra  $C^*(G)$  unui grupoid  $G$  joacă un rol important nu doar în geometria necomutativă ci și în fizică. În geometria necomutativă,  $C^*(G)$  înlocuiește un spațiu cât patologic printr-un spațiu necomutativ potrivit, în timp ce în fizică,  $C^*(G)$  dă algebra observabilelor unui sistem cuantic ale cărui simetrii sunt exprimate prin  $G$ . Se pune următoarea întrebare: este aplicația  $G \rightarrow C^*(G)$  functorială?. Mai precis, care este noțiunea potrivită de morfism de grupoizi și care noțiune de  $C^*$ -categorie trebuie utilizată? Este cunoscut faptul că noțiunea standard de homomorfism de grupoizi ( o aplicație ce satisface condiții evidente de compatibilitate cu structura grupoidului) nu poate fi utilizată. Argumentarea se bazează pe faptul că în cazul grupurilor  $C^*$ -functorul ar fi covariant, în timp ce în cazul spațiilor  $C^*$ -functorul ar fi contravariant.

Scopul acestui proiect este de a introduce noțiuni de morfisme de grupoizi (în sens generalizat) pentru a obține aplicații functoriale de la categorii de grupoizi (înzestrați cu diverse structuri) la categorii corespunzătoare de  $C^*$ -algebre.

Obiectivele acestui proiect în anul 2007 sunt introducerea unor noțiuni noi de morfisme de grupoizi în contextul grupoizilor topologici non-Hausdorff și studierea aplicațiilor noțiunilor introduse.

## 2. Principalele rezultate științifice

În etapele precedente am introdus o noțiune de morfism de grupoizi local compacți care poate fi privită ca o extindere a noțiunii de morfism ca relație introdusă de Zakrzewski în cazul algebric [*Quantum and Classical pseudogroups I*. Comm. Math. Phys. **134** (1990), 347-370]. Spre deosebire de lucrările lui Zakrzewski, morfismele sunt definite în termeni de acțiuni de grupoizi- un morfism de la un grupoid  $\Gamma$  la un grupoid  $G$  este dat de o acțiune la stânga a lui  $\Gamma$  pe  $G$  care comută cu multiplicarea pe  $G$ . În lucrarea

M. Buneci, *C\*-Norms on the Algebra of Continuous Functions with Compact Support on a Locally Compact Groupoid*, An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform., **45**(2007) no. 1, 91-108 [ISSN 1224-970X].

se definesc, în termeni de morfisme, C\*-norme pe algebra funcțiilor continue cu suport compact pe un grupoid local compact înzestrat cu un sistem Haar (văzută ca algebră în raport cu convoluția și involuția obișnuite) și de asemenea se stabilesc diverse relații între C\*-normele introduse.

Pentru ca unui morfism să i se poată asocia o C-seminormă trebuie să fie îndeplinită o anumită condiție de compatibilitate cu sistemele Haar, condiție ce a fost utilizată în etapele precedente pentru construcția unui functor covariant de la categoria grupoizilor local compacți Hausdorff înzestrați cu sisteme Haar la o C\*-categorie în sensul lui Woronowicz. În lucrarea

M. Buneci, *Haar systems compatible with groupoid morphisms*, An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform., **44**(2006) no. 2, 19-32 [ISSN 1224-970X].

se stabilesc condiții topologice astfel încât dându-se o acțiune continuă a unui grupoid  $\Gamma$  pe un grupoid  $G$  ce comută cu multiplicarea pe  $G$  și un sistem Haar  $\lambda$  pe  $\Gamma$  să existe un sistem Haar  $\nu$  pe  $G$  astfel încât morfismul definit de acțiune să fie compatibil cu cele două sisteme Haar. Spre deosebire de lucrarea

M. Buneci, *Groupoid categories*, acceptată pentru publicare în Proceedings of Operator Algebras and Mathematical Physics Conference, București, 2005

unde condițiile topologice erau impuse spațiului orbitelor grupoidului acțiune în această lucrare, condițiile care asigură compatibilitate cu sistemele Haar sunt impuse spațiului orbitelor lui  $G$ .

În lucrarea

M. Buneci, *A category of singly generated dynamical systems*, trimisă spre publicare în Proceedings of ICDS International Conference on Dynamical Systems 2007, Bolu (Turcia).

Am considerat categoria sistemelor dinamice de forma  $(S, \sigma)$ , unde  $S$  este un spațiu local compact iar  $\sigma : S \rightarrow S$  este un homeomorfism local. Unui astfel de sistem dinamic Renault i-a asociat un grupoid r-discret  $G(S, \sigma)$  ["Cuntz-like algebras" in Operator

theoretical methods (Timișoara, 1998)]. În categoria acestor sisteme dinamice am considerat drept morfism  $G(S_1, \sigma_1) \xrightarrow{h} \Gamma(S_2, \sigma_2)$  o acțiune continuă la stânga a lui  $\Gamma(S_2, \sigma_2)$  pe  $G(S_1, \sigma_1)$  ce comută cu multiplicarea pe  $G(S_1, \sigma_1)$  (cu alte cuvinte un morfism topologic de la  $\Gamma(S_2, \sigma_2)$  la  $G(S_1, \sigma_1)$  în sensul introdus în etapele precedente). Am arătat că

1. orice morfism  $G(S, \sigma) \xrightarrow{h} \Gamma$  este determinat de o acțiune (la stânga) continuă a lui  $\Gamma$  pe  $S$  cu aplicația moment  $\rho_h$  și de un homomorfism de grupoizi  $\theta: \Gamma * S \rightarrow Z$ :

$$\gamma \bullet_h(s, m, t) = (\gamma \bullet s, \theta(\gamma, s) + m, t),$$

unde

$$\Gamma * S = \{(\gamma, s) \in \Gamma \times X: d(\gamma) = \rho_h(s)\}$$

este grupoidul acțiune.

2. pentru astfel de grupoizi condiția de compatibilitate cu sistemele Haar pe  $G$  și  $\Gamma$  este întotdeauna îndeplinită.
3. pentru orice morfism  $G(S, \sigma) \xrightarrow{h} \Gamma(X, \gamma)$  și orice  $f$  funcție continuă cu suport compact  $f$  pe  $\Gamma(X, \gamma)$  aplicația

$$\hat{h}(f)(s, m, t) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma, r(\gamma) = \rho_h(s) \\ \gamma^{-1} \bullet s = t, \theta(\gamma^{-1}, s) = -m}} f(\gamma), (s, m, t) \in G(S, \sigma)$$

se extinde la un \*-homomorphism  $C^*(h): C^*_{\text{full}}(\Gamma) \rightarrow C^*_{\text{full}}(G)$ .

Am construit astfel un functor  $G(S, \sigma) \rightarrow C^*_{\text{full}}(G)$  de la categoria grupoizilor ce provin din astfel de sisteme dinamice la categoria  $C^*$ -algebrelor.

Foarte multe exemple naturale de grupoizi topologici (ca de exemplu, grupoizii proveniți din foliații) sunt non-Hausdorff. Noțiunilor de morfisme topologice definite în etapele precedente ale proiectului pot fi extinse fără dificultate în contextul non-Hausdorff. Ceea ce pune probleme este obținerea unei aplicații functoriale de la categoria grupoizilor non-Hausdorff la o categorie de  $C^*$ -algebre. Pentru a obține o astfel de aplicație functorială este necesară introducerea unei noi  $C^*$ -algebre asociate grupoidului, iar definirea  $C^*$ -normei impune condiții de compatibilitate cu sistemele Haar. Construcția  $C^*$ -algebrei asociată unui grupoid local compact Hausdorff (introdusă în prima etapă a acestui proiect) se bazează pe faptul că în raport cu convoluția (asociată unui sistem Haar) și involuția uzuală spațiul funcțiilor continue cu suport compact pe un grupoid devine \*-algebră. În cazul non-Hausdorff spațiul funcțiilor continue cu suport compact nu poate fi transformat în mod natural într-o algebră de convoluție și este prea mic pentru a captura structura topologică grupoidului. În lucrarea

M. Buneci, *Measurable morphism*, manuscris.

s-a construit o de  $C^*$ -algebră, într-un context mai general și anume cel al grupoizilor cu măsură. Fiecare grupoid a fost înzestrat cu o  $\sigma$ -algebră de submulțimi și suplimentar cu o familie de mulțimi numite mulțimi „mărginite”. Grupoidul măsurabil a fost definit ca

fiind un grupoid a cărui structură este compatibilă cu  $\sigma$ -algebra și în plus, având aplicațiile produs și inversare „mărginite pe mulțimile mărginite”. De asemenea grupoidul a fost înzestrat cu un sistem de măsuri având proprietăți similare unui sistem Haar borelian la care se adaugă condiția de „mărginire pe mulțimi mărginite”. Fiecărui grupoid măsurabil înzestrat cu un astfel de sistem Haar și o măsură cvasi invariantă i s-a asociat o  $C^*$ -algebră și s-a arătat că asocierea respectivă are un caracter functorial. Un grupoid topologic local-compact local Hausdorff poate fi privit ca un grupoid măsurabil în sensul de mai sus considerând  $\sigma$ -algebra generată de mulțimile deschise și luând drept familie de mulțimi „mărginite” mulțimile relativ compacte.

În lucrarea

S. Stoian, *Quasi-nilpotent operators on locally convex spaces*, arXiv: math.FA/0708.1819

se prezintă extinderea noțiunii de echivalență de operatori cvasi-nilpotenți introdusă de Colojoară și Foiș [Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, 1968] la spațiile local convexe.

Rezultate privind existența soluțiilor unor probleme eliptice au fost stabilite în

D. Covei, *Existence results for semilinear elliptic boundary value problems*, pentru Proceedings of Equadiff conference, Viena 2007.

D. Covei, *Entire solution of quasilinear elliptic problem*, trimisă spre publicare

Din cele de mai sus rezultă că obiectivele propuse au fost îndeplinite, obținându-se și rezultate suplimentare.

### 3. Dezvoltarea resursei umane

Abordarea temei propuse în acest an a necesitat combinarea unor elemente de analiză funcțională (în particular, teoria operatorilor și a algebrelor de operatori) cu geometrie diferențială, analiză matematică, teoria măsurii și teoria categoriilor. De asemenea, rezultatele obținute au aplicații potențiale în fizica și geometria necomutativă. Ca urmare, proiectul a determinat lărgirea orizontului matematic. Pentru aprofundarea cunoștințelor în domeniile precizate mai sus (precum și pentru armonizarea cunoștințelor membrilor echipei), începând din luna octombrie 2005, la Departamentul de Matematică al Universității Constantin Brâncuși se desfășoară (săptămânal) un seminar despre *Algebre de convoluție asociate grupoizilor și aplicații*.

O parte din fondurile din 2007 au fost destinate mobilităților (participări la manifestări științifice desfășurate în țară), urmărindu-se pe de o parte îmbunătățirea documentării, iar pe de altă parte creșterea capacității de comunicare, de prezentare a ideilor și rezultatelor.

Doctoranzii din echipa proiectului s-au pregătit și în cadrul programului lor de doctorat. Astfel, N. Chiriac a pregătit pentru programul de doctorat referatul “*Coomologia varietăților diferențiale, teorie Hodge- de Rham, teoreme de anulare*”.

#### **4. Mobilități (vizite de studiu , participări la manifestări științifice interne și internaționale în concordanță cu tematica grantului)**

1. M.S. Stoian, Colocviul săptămânal al Departamentului de Analiză Matematică de la Facultad de Ciencias Matematicas, Universidad Complutense de Madrid, 11 ianuarie 2007. Titlul prezentării: *Spectral Properties for bounded Operator son Locally Convex Spaces.*
2. M.S. Stoian, „Seminario de Analisis Matematico”, 22 februarie 2007, Universitatea din Valencia (Spania). Titlul prezentării: *Bounded operators on locally convex spaces.*
3. M. Buneci, ICDS International Conference on Dynamical Systems 2007, 25-30 iunie 2007 Bolu (Turcia). Titlul comunicării: *A category of singly generated dynamical systems.*
4. D. Covei, Equadiff conference EQUADIFF07” 5-11 august 2007 „Vienna University of Technology”, Viena. Titlul comunicării: *Existence Results for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems.*

#### **5. Lista lucrărilor realizate în proiect în anul 2007**

*Lucrări publicate/acceptate pentru/trimise spre publicare în această etapă:*

1. M. Buneci, *C\*-Norms on the Algebra of Continuous Functions with Compact Support on a Locally Compact Groupoid*, An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform., **45**(2007) no. 1, 91-108 [ISSN 1224-970X].
2. M. Buneci, *Haar systems compatible with groupoid morphisms*, An. Univ. Timisoara Ser. Mat.-Inform., **44**(2006) no. 2, 19-32 [ISSN 1224-970X].
3. M. Buneci, *A category of singly generated dynamical systems*, trimisă spre publicare în Proceedings of ICDS International Conference on Dynamical Systems 2007.
4. D. Covei, *Existence results for semilinear elliptic boundary value problems*, pentru Proceedings of Equadiff conference, Viena 2007.
5. D. Covei, *Entire solution of quasilinear elliptic problem*, trimisă spre publicare
6. S. Stoian, *Quasi-nilpotent operators on locally convex spaces*, arXiv: math.FA/0708.1819 (13 pagini).

*Lucrări acceptate spre publicare/publicate în această etapă (trimise spre publicare în etapele precedente):*

1. D. Covei, *Existence of positive solutions to a quasilinear elliptic problem in  $\mathbf{R}^N$* , Surveys in Mathematics and its Applications, **1** (2006), 111-116.
2. N. Chiriac, *Normal Anti-Invariant Submanifolds of Paraquaternionic Kahler Manifolds*, Surveys in Mathematics and its Applications, **1** (2006), 99-110.
3. M. Buneci, *Groupoid  $C^*$ -algebras*, Surveys in Mathematics and its Applications, **1** (2006), 71-98.
4. M. Stoian, *A Functional Calculus for Quotient Bounded Operators*, Surveys in Mathematics and its Applications, **1** (2006), 61-70.
5. M. Buneci, *Borel morphisms and  $C^*$ -algebras*, acceptată pentru publicare în Proceedings of 21st International Conference on Operator Theory, Timișoara, 2006. (Theta, Bucharest) (eds. R.G. Douglas, J. Esterle, D. Gaspar, D. Timotin and F.-H. Vasilescu).

#### **În pregătire**

1. M. Buneci, *Measurable morphisms*.
2. N. Chiriac, *The principle of the minimum action in true time*

Rezultatele proiectului sunt prezentate pe pagina web

<http://www.utgjiu.ro/math/mbuneci/project/et65.html> (versiune în limba engleză)

[http://www.utgjiu.ro/math/mbuneci/project/et65\\_ro.html](http://www.utgjiu.ro/math/mbuneci/project/et65_ro.html) (versiune în limba română)

Târgu-Jiu, 13 septembrie 2007

Director de proiect,  
Conf. dr. Mădălina Roxana Buneci