

Raport de Cercetare

**Grant: (AT19) ABORDAREA NOTIUNILOR DE SIMETRIE SI SPATIU DIN PERSPECTIVA GRUPOIZILOR
(AT127/2004)**

Autor: Mădălina Roxana Buneci

Universitatea: Constantin Brâncuși din Târgu-Jiu

Domeniul abordat și obiectivele proiectului

Geometria necomutativă (inventată de A. Connes) este un domeniu nou în matematică cu o dezvoltare rapidă ce leagă între ele diverse ramuri ale matematicii și fizicii. Ideea de bază în geometria necomutativă este de a trata anumite clase de algebre necomutative pe post de spații (în sens geometric) și de a extinde instrumentele matematicii comutative (topologie, geometrie, analiză, algebră comutativă) în acest nou context. În geometria clasică spațiul este considerat ca fiind o mulțime de puncte înzestrată cu o structură suplimentară (de exemplu, structură topologică dată printr-o familie de mulțimi deschise sau structură diferențiable dată prin intermediul unui atlas). În cazul clasic fiecărui spațiu local compact (Hausdorff) X i se poate asocia C^* -algebra (comutativă) $C(X)$ a funcțiilor continue care se anulează la infinit. Binecunoscutul rezultat Gelfand-Naimark stabilește reciproca: dându-se o C^* -algebră comutativă A se poate construi un spațiu local compact (Hausdorff) X astfel încât $A = C(X)$. Punctele lui X sunt caracterizate de idealele maximale ale lui A (sau echivalent de caracterele lui A), și deci se poate reconstrui structura geometrică a lui X plecând de la A . Abordarea bazată pe geometria necomutativă presupune regăsirea geometriei unui spațiu plecând de la o C^* -algebră necomutativă. Prin analogie cu cazul comutativ, C^* -algebrele necomutative sunt interpretate ca algebre de funcții pe un spațiu necomutativ. Este important de menționat că există două interpretări diferite privind relația dintre spațiile necomutative și C^* -algebrele asociate. Una presupune că spațiile determină algebrele (până la un izomorfism) și algebrele determină spațiile. Cealaltă (propusă inițial de Connes) presupune că geometria este determinată de clase de C^* -algebre Morita echivalente în sens tare (noțiune introdusă și studiată de M. Rieffel în [*Induced representations of C^* -algebras*, Adv. in Math. **13**(1974), 176-254] și în [*Strong Morita equivalence of certain transformation group C^* -algebras*, Math. Ann. **222**(1976), 7-22] pe baza noțiunii de C^* -modul Hilbert). Cu alte cuvinte această a doua abordare presupune că C^* -algebre neizomorfe, dar Morita echivalente în sens tare descriu același spațiu necomutativ.

Algebrele de convoluție asociate unui grupoid joacă un rol major în domeniul geometriei necomutative. Spațiile necomutative pot fi caracterizate deseori ca spațiul orbitelor unui grupoid. Spațiul orbitelor poate fi un spațiu patologic din punct de vedere topologic. De aceea pentru studiul spațiului respectiv se utilizează (pe post de algebră de funcții pe spațiu necomutativ) o C^* -algebră asociată grupoidului din care provine spațiul orbitelor. Pentru definirea produsului de convoluție pe un grupoid este necesar un analog al măsurii Haar pe grupurile locale compacte. Acest analog constă dintr-un sistem de măsuri indexate după spațiul unităților grupoidului și care îndeplinesc condiții de invarianță și continuitate. Spre deosebire de grupurile locale compacte, nu toți grupoidii locali compacți admit sisteme Haar (continue), și de asemenea sistemele Haar nu sunt neapărat unice. Condiția de continuitate impusă sistemului Haar are consecințe topologice (aplicațiile de proiecție ale grupoidului trebuie să fie deschise). Pe de altă parte această condiție de continuitate este crucială în construcția C^* -algebrei asociate grupoidului (introdusă de J. Renault în [*A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, **793**, 1980]), după cum a arătat Seda în [*On the continuity of Haar measure on topological groupoids*, Proc. Amer. Math. Soc., **96** (1986), 115-120]. Deci grupoidilor pentru care aplicațiile de proiecție nu sunt deschise, nu li se poate asocia o C^* -algebră (în sensul lui Renault).

Obiectivul de bază al acestui proiect pentru anul I de derulare (2004) a fost studiul modului în care C^* -algebra asociată unui grupoid depinde de sistemul Haar ales. Acest studiu este relevant datorită rolului C^* -algebrelor asociate grupoidilor în geometria necomutativă, unde grupoidii reprezintă o sursă de spații necomutative. Nu se cunoaște dacă C^* -algebrele asociate cu două sisteme Haar diferite sunt sau nu $*$ -izomorfe. Un rezultat asupra independenței C^* -algebrei de sistemul Haar este cel al lui Muhly, Renault și Williams (din [*Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras*, J. Operator Theory **17**(1987), 3-22]) conform căruia la sisteme Haar diferite corespund C^* -algebre Morita echivalente în sens tare. Tot Muhly, Renault și Williams au arătat că C^* -algebra $C^*(G)$ asociată unui grupoid tranzitiv local compact G (înzestrat cu un sistem Haar) este izomorfă cu $C^*(H) \otimes K(L^2(G^{(0)}, \mu))$, unde H este un grup de izotropie a grupoidului, $G^{(0)}$ este spațiul unităților, μ este o măsura Radon cu suportul egal cu $G^{(0)}$, $C^*(H)$ este C^* -algebra asociată grupului H , iar $K(L^2(G^{(0)}, \mu))$ este algebra operatorilor compacți pe $L^2(G^{(0)}, \mu)$. Pentru a demonstra această teoremă ei au arătat mai

întâi că $C^*(G)$ și $C^*(H)$ sunt Morita echivalente în sens tare via un C^* -modul Hilbert X_1 . În consecință, $C^*(G)$ este $*$ -izomorfă cu algebra de imprimitivitate a lui X_1 . Apoi au construit un alt C^* -modul Hilbert X_2 peste $C^*(H)$ a cărui algebră de imprimitivitate este $C^*(H) \otimes K(L^2(G^{(0)}, \mu))$ pentru o anumită măsură μ . De aici a rezultat izomorfismul dintre $C^*(G)$ și $C^*(H) \otimes K(L^2(G^{(0)}, \mu))$ și mai mult a rezultat independența de sistemul Haar.

Abordarea propusă în acest proiect pentru studiul dependenței C^* -algebrelor de sistemele Haar este diferită de cea a lui Muhly, Renault și Williams. Mai precis, este vorba despre utilizarea descompunerilor sistemelor Haar în raport cu grupoidul principal asociat sau unor descompuneri mai fine. Studiul sistemelor Haar și a descompunerilor sistemelor Haar pe un grupoid a adus informații suplimentare și asupra topologiei grupoidului.

Studiul mediilor invariante pe grupuri a fost început de J. von Neumann în 1929. Începând de atunci s-au demonstrat multe proprietăți echivalente cu existența unei medii invariante pe un grup local compact. Day a introdus denumirea de grupuri amenabile pentru grupurile cu aceste proprietăți. Această noțiune remarcabilă a fost extinsă și în alte ramuri ale matematicii: există semi-grupuri amenabile, algebre Banach amenabile, C^* -algebre amenabile, grupuri cuantice amenabile, etc. Extinderea de la grupuri la grupoizii a conceptului de amenabilitate îi aparține lui J. Renault [A *groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, **793**, 1980]. Acest concept a fost studiat detaliat de către C. Anantharaman-Delaroche și J. Renault în [Amenable Groupoids, Monographie de L'Enseignement Mathématique **36**, Geneve, 2000]. În aceasta monografie sunt studiate diferite noțiuni de amenabilitate, atât pentru grupoizii măsurabili cât și pentru a grupoizii local compacți. Sunt stabilite condiții necesare și condiții suficiente pentru amenabilitate, demonstrația echivalenței anumitor condiții fiind încă o problemă deschisă. De exemplu, C. Anantharaman-Delaroche și J. Renault au arătat că dacă grupoidul este amenabil (relativ la orice măsură cvasi-invariantă), atunci C^* -algebra și C^* -algebra redusă asociate grupoidului sunt egale. Reciproca acestei teoreme constituie o problema deschisă.

Obiectivul principal al acestui proiect pentru anul al II-lea de derulare (2005) a fost determinarea unor condiții echivalente cu amenabilitatea în contextul grupoizilor local compacți, cu accent pe legătura cu morfismele, reprezentările și C^* -algebrele asociate.

Un obiectiv secundar al acestui proiect a fost familiarizarea studenților din proiect (C. Cercel și A. Dincă) cu felul în care grupoizii pot măsura simetria precum și acumularea unor noțiuni matematice (avansate) folosite în grafica pe calculator.

Principalele rezultate științifice obținute în proiect

Studiul continuității sistemelor Haar și a continuității descompunerilor sistemelor Haar în raport cu grupoidul principal asociat a condus la obținerea unui răspuns negativ la o întrebare pusă de Kirill Mackenzie în [Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, LMS Lecture Note Ser., vol. **124**, Cambridge Univ. Press, 1987]: „Fiind dat un morfism $\varphi : G \rightarrow H$ de grupoizi topologici, continuitatea lui φ pe o vecinătate a bazei lui G (spațiului unităților lui G), atrage după sine continuitatea lui φ în orice punct din G ?” Mai mult, s-au caracterizat grupoizii pentru care problema pusă de Mackenzie are răspuns pozitiv (mai precis, s-a demonstrat că dacă G este un grupoid în care fiecare orbită conține cel puțin două elemente și dacă aplicațiile de proiecție asociate lui G sunt deschise, atunci continuitatea oricărui morfism φ de grupoizi topologici într-o vecinătate a bazei lui G atrage după sine continuitatea lui φ pe G , dacă și numai dacă G este local tranzitiv). Aceste rezultate se găsesc în lucrarea :

M. Buneci, *Morphisms that are continuous on a neighborhood of the base of a groupoid*, Studia Sci. Math. Hungar **42**(3) (2005), 265-276.

Un alt rezultat obținut în acest proiect este construcția unei C^* -algebre, notată $M_\sigma^*(G, \nu)$, asociată unui grupoid local compact G care este independentă de sistemul Haar ν (până la un $*$ -izomorfism). Indicele σ reprezintă o secțiune (cu anumite proprietăți) a aplicației $d_F: G^F \rightarrow G^{(0)}$, unde F este o submulțime a lui $G^{(0)}$ care conține exact un element din fiecare orbită a grupoidului G . Pentru grupoizii local tranzitivi această nouă C^* -algebră coincide cu C^* -algebra uzuală (introdusă de Renault în [A *groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, **793**, 1980]). Ca o consecință, se regăsește (într-o variantă mai generală) rezultatul lui Muhly, Renault și Williams privind izomorfismul dintre C^* -algebrele asociate unor sisteme Haar diferite pe un grupoid local compact tranzitiv. Spre deosebire de abordarea lui Muhly, Renault și Williams, izomorfismul dintre C^* -algebrele asociate unor sisteme Haar diferite este explicit pus în evidență. În cazul grupoizilor proprii principali

această nouă C^* -algebră conține C^* -algebra uzuală. De asemenea, s-a arătat că în cazul unui grupoid propriu principal înzestrat cu două sisteme Haar ale căror descompuneri induc fibrare Hilbert cu "baze" continue, C^* -algebrele uzuale (introduse de Renault) asociate celor două sisteme Haar sunt $*$ -izomorfe. Aceste rezultate se găsesc în lucrarea :

M. Buneci, *Isomorphic groupoid C^* -algebras associated with different Haar systems*, New York J. Math. **11** (2005), 225-245.

O prezentare a acestor rezultate precum și a faptului că noua C^* -algebră construită poate fi privită ca o subalgebră a C^* -algebrei introduse de A. Ramsay și M. E. Walter (în [*Fourier-Stieltjes algebras of locally compact groupoids*, J. Functional Analysis **148** (1997), 314-367]) s-a făcut prin intermediul posterului

"Groupoid C^* -algebras which are independent of the Haar systems" prezentat de M. Buneci la 4 ECM (Fourth European Congress of Mathematics), Stockholm, 27 iunie - 2 iulie 2004.

Construcția C^* -algebrei $M_\sigma^*(G, \nu)$, independente de sistemul Haar ν , s-a făcut plecând de la o secțiune $\sigma : G^{(0)} \rightarrow G^F$ a aplicației $d_F : G^F \rightarrow G^{(0)}$, $d_F(x) = x^{-1}x$, unde F este o submulțime a spațiului unităților care conține exact un element din fiecare orbită. Independența (până la un $*$ -izomorfism) a C^* -algebrei $M_\sigma^*(G, \nu)$ de secțiunea $\sigma : G^{(0)} \rightarrow$ a fost demonstrată în lucrarea:

M. Buneci, *C^* -algebras associated to groupoids with proper orbit space*, acceptată pentru publicare în Proceedings of OT20 (20th International Conference on Operator Theory), Timișoara (Romania), June 30 -July 5 2004.

Dacă aplicația d_F este deschisă se pot demonstra o serie de proprietăți ale descompunerilor sistemelor Haar și ale C^* -algebrelor asociate. În

M. Buneci, *An application of Mackey's selection lemma*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Matematica vol. L(4) (2005), 23-32.

s-a demonstrat că dacă restricția aplicației de proiecție r a grupoidului la fibratul grupurilor de izotropie este deschisă, atunci d_F este deschisă dacă și numai dacă d_F admite o secțiune regulată (un invers la dreapta care transportă mulțimile compacte în mulțimi relativ compacte în G^F).

În monografia [*Amenable Groupoids*, Monographie de L'Enseignement Mathematique **36**, Geneve, 2000] C. Anatharaman-Delaroche și J. Renault au introdus noțiunea de aplicație echivariantă amenabilă și au definit grupoizii amenabili prin amenabilitatea aplicației r (range map) asociate. Referitor la aplicațiile amenabile s-au obținut în acest proiect două rezultate. Primul dintre ele se găsește în lucrarea:

M. Buneci, *Amenable equivariant maps defined on a groupoid*, în curs de apariție în Proceedings of the Operator Algebras and Mathematical Physics conference, Sinaia, June 26-July 4, 2003, Theta Foundation

lucrare ce a fost doar îmbunătățită și scrisă în formă finală în timpul derulării proiectului, trimiterea ei spre publicare (într-o primă formă) realizându-se în 2004, iar o parte din rezultatele din ea fiind prezentate la conferință în 2003. În lucrare am arătat echivalența dintre amenabilitatea unei aplicații definite pe un grupoid și amenabilitatea unui produs semidirect. De asemenea, lucrarea conține o variantă de extindere la grupoizi a binecunoscutului rezultat al lui Pier (21.2, [*Amenable locally compact group*, Wiley, New York, 1984]) din cazul grupurilor: Dacă G este un grup amenabil local compact dar necompact, atunci orice medie invariantă pe $L^\infty(G)$ se anulează pe funcțiile continue care se anulează la infinit. În cazul grupoizilor rezultatul stabilit este: Dacă (G, λ, μ) este un grupoid local compact cu măsură în care μ -aproape toate grupurile de izotropie nu sunt compacte și cu proprietatea că aplicația $\theta : G \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta(x) = (r(x), d(x))$ este amenabilă, atunci orice medie invariantă (indusă de o medie aproximativă tare invariantă) pentru θ se anulează pe toate funcțiile continue cu suport compact. Un analog necomutativ al acestui rezultat încheie această lucrare.

Al doilea rezultat privind condițiile necesare și suficiente ca o aplicație să fie amenabilă se găsește în

M. Buneci, *Amenable map and semi-direct products*, trimisă pentru Proceedings of the 9th National Conference of the Romanian Mathematical Society, Lugoj, May, 2005.

și este stabilit în următorul context. Fie G un grupoid cu măsură, S și T două G -spații boreliene și $\pi: T \rightarrow S$ o aplicație G -echivariantă boreliană. Am arătat că dacă π este amenabilă, atunci S este un G -spațiu amenabil. Reciproc, dacă S este un G -spațiu amenabil și dacă există o aplicație G -echivariantă $\rho: T \rightarrow G$ (nu neapărat amenabilă), atunci π este amenabilă. Pentru obținerea acestui rezultat am definit o reprezentare analoagă reprezentării regulate și am stabilit legătura dintre amenabilitate acestei reprezentări și amenabilitatea aplicației echivariante.

Principalul rezultat al lucrării

M. Buneci, *A notion of open generalized morphism that carries amenability*, acceptată pentru Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2005). Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 10(2005).

este introducerea unei noțiuni de morfism deschis (în sens generalizat) care transportă amenabilitatea. Diferența principală față de noțiunea de corespondență (pereche de acțiuni ce satisfac anumite condiții) folosită de C. Anatharaman-Delaroche și J. Renault este că renunțăm pentru una dintre acțiuni la condiția de a fi proprie, dar cerem ca cealaltă acțiune să fie obținută prin translație (multiplicare).

Un obiectiv secundar al acestui proiect a fost familiarizarea studenților (din echipă) cu felul în care grupoizii pot măsura simetria. Am realizat împreună o lucrare. În

M. Buneci, C. Cercel, A. Dincă, *A program for obtaining the symmetry groupoid associated to a labeled graph*, Proceedings of the International Scientific Conference "Economy and Globalization", June 4-5, 2004, Târgu-Jiu, România, 289-294

s-au asociat diverși grupoizi unui graf orientat etichetat pornind de la construcția grupoidului simetric definit de Stewart, M. Golubitsky and M. Pivato în [*Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks*, SIAM J. Appl. Dynam. Sys. 2 (4) (2003) 609-646].

În lucrările

M. Buneci și V. Ungureanu, *Symmetry groupoids associated to a labeled graph*, Proceedings of 2nd the International Scientific Conference Economy and Globalization, June 3-4, 2005, Targu-Jiu (Romania), Ed. Universitaria, Craiova, 2005, 373-376.

M. Buneci și V. Ungureanu, *Coloring of graphs-an approach using symmetry*, Proceedings of the 2nd International Scientific Conference Economy and Globalization, June 3-4, 2005, Targu-Jiu (Romania), Ed. Universitaria, Craiova, 2005, 393-398

au fost studiate posibilități de a reformula probleme legate de grafuri în termeni de grupoizi.

De asemenea este în curs de finalizare o carte în care sunt expuse noțiuni matematice utilizate în grafica pe calculator. Ne-am limitat la expunerea unor elemente de topologie computațională. Cartea este destinată studenților și tinerilor care încep cercetarea în domeniul graficii pe calculator. Cartea conține și prezentarea unor elemente de topologie generală. Am considerat utilă expunerea acestor noțiuni de topologie generală deoarece studenții de la facultățile de inginerie le cunosc într-o măsură mai mică (nu toate fac parte din programa unui curs de analiza matematica destinat studenților facultăților de inginerie). În selectarea noțiunilor expuse un rol important au jucat studenții la automatică Alina Dincă și Constantin Cercel, membrii în echipa acestui proiect. De asemenea în carte se prezintă și modul în care pot fi utilizați grupoizii în topologia computațională

Dezvoltarea resursei umane

Proiectul a determinat lărgirea orizontului matematic, având în vedere că tema propusă este la intersecția mai multor domenii ale matematicii (analiza funcțională, teoria măsurii, teoria categoriilor, teoria reprezentărilor). Deși o parte din activitățile din proiect s-ar fi desfășurat și în absența finanțării, existența acesteia a permis o mai bună documentare și valorificare/diseminare a rezultatelor. O parte din fondurile din acest proiect au fost destinate mobilităților (participări la manifestări științifice interne și internaționale), urmărindu-se pe de o parte îmbunătățirea documentării, iar pe de altă parte creșterea capacității de comunicare, de prezentare a ideilor și rezultatelor. De asemenea participarea la conferințe interdisciplinare a oferit posibilitatea discutării cu experți din alte domenii și găsirea unor noi domenii în care tema propusă ar putea avea aplicații.

Principala realizare în ceea ce-i privește pe studenții Alina Dincă și Constantin Cercel (membri ai echipei acestui proiect) este că au acumulat cunoștințe matematice avansate și le-au aplicat în

domeniul lor de interes (menționăm că Alina Dincă și Constantin Cercel sunt studenți la Automatică). De asemenea ei au fost încurajați să participe la manifestări științifice. Este remarcabil faptul că la două dintre ele au obținut premii. Astfel ei au luat premiul a II-lea la sesiunea studențească de comunicări științifice *StudIT 26* - 28 martie 2004 de la Universitatea de Vest Timișoara. Iar la competiția care s-a organizat în cadrul școlii de vară *13th Summer School for Image Processing* (30 iunie-8 iulie 2005, Szeged, Ungaria) proiectul la care au lucrat ei împreună cu Csaba Domokos, László Papp (Universitatea din Szeged, Ungaria) și Adrian Ulges (Technical University of Kaiserslautern, Germania) a obținut premiul întâi.

Mobilități (vizite de studiu , participări la manifestări științifice interne și internaționale în concordanță cu tematica grantului) / Expuneri în seminarii

1. C. Cercel și A. Dincă, premiul II. la sesiunea de comunicări științifice StudIT 26 - 28 martie 2004, Universitatea de Vest Timișoara .
2. M. Buneci, C. Cercel, A. Dincă, International Scientific Conference "Economy and Globalization", June 4-5, 2004, Târgu-Jiu- titlul comunicării: *A program for obtaining the symmetry groupoid associated to a labeled graph*
3. M. Buneci, 4 ECM (Fourth European Congress of Mathematics), Stockholm, June 27 -July 2 2004 - Poster: *Groupoid C^* -algebras which are independent of the Haar systems.*
4. M. Buneci, OT20 (20th International Conference on Operator Theory), Timișoara, June 30 -July 5 2004-Titul comunicării: *C^* -algebras associated to groupoids with proper orbit space*
5. A. Dincă, Summer School for Image Processing 2004, July 05 - 15 2004, Graz, Austria.
6. M. Buneci, ICNODEA-2004 (International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications), Cluj Napoca (Romania), August 24-27 2004, -Poster : *An application of Mackey's selection lemma.*
7. M. Buneci, Analysis and Applied Mathematics Summer School, Rome, University "La Sapienza", September 20-24, 2004.
8. M. Buneci, expuneri în Seminar on Operator algebras and quantum groups, Universitatea din Varșovia (Department of Mathematical Methods in Physics), 2 și 9 Decembrie, 2004-titulurile prezentărilor: *C^* -algebras associated to locally compact groupoids I, C^* -algebras associated to locally compact groupoids II.*
9. M. Buneci - 4th International Conference on Analysis and Quantum, April 9-11, 2005 (Mathematics Institute of LMU, Munich, Germany)-Titlul comunicării: *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems.*
10. M. Buneci -A IX-a conferință națională a Societății de Științe Matematice din România, Lugoj, 6-7 mai, 2005- Titlul comunicării: *Amenable map and semi-direct products.*
11. C. Cercel și A. Dincă - Zilele Tehnice Studențești, Timișoara, 16-22 mai, 2005.
12. C. Cercel și A. Dincă - 13th Summer School for Image Processing (June 30-July 8, Szeged, Hungary).
13. M. Buneci - ICTAMI 2005 (International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics), Albac (România), September 15-18, 2005- Titlul comunicării: *A notion of open generalized morphism that carries amenability.*
14. M. Buneci - Conferința Națională de Analiză Matematică și Aplicații, Craiova (Romania), 22-24 septembrie, 2005- Titlul comunicării: *C^* -algebras and amenable groupoids.*

Nu toate aceste mobilități au fost suportate din grant dar au dat posibilitatea de diseminare a unor rezultate obținute în proiect. O parte din mobilități au parțial suportate din grant, parțial de către organizatorii manifestărilor sau parțial de către universitate.

Lista lucrărilor legate de tematica grantului

1. M. Buneci, *Morphisms which are continuous on a neighborhood of the base of a groupoid*, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **42**(3) (2005), 265-276. [ISSN 0081-6906].
2. M. Buneci, *Isomorphic groupoid C^* -algebras associated with different Haar systems*. *New York J. Math.* **11**, 225-245 (2005). [ISSN 1076-9803].
3. M. Buneci, *An application of Mackey's selection lemma*, *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Matematica* vol. **L(4)** (2005), 23-32. [ISSN 0252-1938].
4. M. Buneci, *A notion of open generalized morphism that carries amenability*, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.* No. **10** (2005). - Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2005)-Part A, 177-187. [ISSN 1582-5329].
5. M. Buneci, *C^* -algebras associated to groupoids with proper orbit space*, acceptată pentru publicare în Proceedings of OT20 (20th International Conference on Operator Theory), Timișoara (Romania), June 30 -July 5 2004.
6. M. Buneci, *Amenable equivariant maps defined on a groupoid*, în curs de apariție în Proceedings of Operator algebras and mathematical physics conference (Sinaia, June 26-July 4, 2003)(eds. O. Bratteli, R. Longo, H. Siedentop), Theta Foundation.
7. M. Buneci, C. Cercel și A. Dincă, *A program for obtaining the symmetry groupoid associated to a labeled graph*, Proceedings of the International Scientific Conference "Economy and Globalization", June 4-5, 2004, Târgu-Jiu, Romania, 289-294 [ISBN 973-8436-97-4]
8. M. Buneci, *Amenable map and semi-direct products*, Proceedings of the 9th National conference of the Romanian Mathematical Society, Lugoj, 6-7 mai 2005, Editura Universitatii de Vest, Seria Alef, Timisoara 2005, 69-80. [ISBN 973-7608-37-2].
9. M. Buneci, *The equality of the reduced and the full C^* -algebras and the amenability of a topological groupoid*, Recent advances in operator theory, operator algebras, and their applications, 61-78. *Oper. Theory Adv. Appl.*, **153**, Birkhauser, Basel, 2005. [ISBN 3-7643-7127-7/hbk].
10. M. Buneci, *Necessary and sufficient conditions for the continuity of a pre-Haar system at a unit with singleton orbit*. *Quasigroups Related Systems* **12** (2004), 29-38. [ISSN 1561-2848].
11. M. Buneci și V. Ungureanu, *Symmetry groupoids associated to a labeled graph*, Proceedings of 2nd the International Scientific Conference Economy and Globalization, June 3-4, 2005, Targu-Jiu (Romania), Ed. Universitaria, Craiova, 2005, 373-376. [ISBN 973-742-094-2].
12. M. Buneci și V. Ungureanu, *Coloring of graphs-an approach using symmetry*, Proceedings of the 2nd International Scientific Conference Economy and Globalization, June 3-4, 2005, Targu-Jiu (Romania), Ed. Universitaria, Craiova, 2005, 393-398. [ISBN 973-742-094-2].

Lucrările [1], [3], [4], [5], [7], [8] prezintă integral rezultate obținute prin prezentul grant. Lucrarea [2] prezintă rezultate parțiale obținute prin prezentul grant și rezultate parțiale obținute cadrul programului internațional "Analysis and Quantum" (Contract No. HPRN-CT-2002-00277) finanțat în FP5. Lucrările [6], [9], [10] au fost doar îmbunătățite și redactate în formă finală în timpul derulării proiectului, trimiterea lor spre publicare (într-o primă formă) sau comunicarea unor rezultate parțiale (în cadrul unor conferințe) realizându-se anterior. Lucrările [11] și [12] reprezintă punctul de plecare pentru dezvoltări ulterioare.

Majoritatea lucrărilor sunt disponibile integral pe pagina WEB a proiectului: www.utgjiu.ro/math/mbuneci/project/at127_ro.html. Lucrările [1] și [2] sunt publicate și pe serverul de preprinturi arXiv.

Concluzii

În acest proiect

- s-au obținut rezultate parțiale privind rezolvarea problemei deschise (Este sau nu C^* -algebra asociată unui grupoid local compact independentă (până la un $*$ -izomorfism) de sistemul Haar ?);
- s-a dat un răspuns (negativ) la o problemă ridicată de Mackenzie în 1987, și s-au caracterizat grupoizii pentru care întrebarea pusă de Mackenzie are răspuns afirmativ;
- s-au stabilit noi condițiile necesare și suficiente ca o aplicație să fie amenabilă;
- rezultatele obținute au fost publicate în jurnale sau în volumele unor conferințe, și pe pagina WEB: www.utgjiu.ro/math/mbuneci/project/a127_ro.html.
- studenții din echipă au fost încurajați să înțeleagă și să aplice în domeniul lor de interes concepte matematice noi, și să participe la manifestări științifice (la care au reușit să obțină premii);
- s-a dezvoltat infrastructura de cercetare și documentare pentru matematicienii din Universitatea Constantin Brâncuși (prin achiziționarea de cărți, abonamente și a unei imprimante);
- au fost deschise direcții de cercetare noi ce vor fi dezvoltate în proiecte viitoare;
- participarea la manifestările științifice internaționale a dus la sporirea contactelor academice având efect benefic asupra unor colaborări viitoare.

Director de proiect,
Conf. dr. Mădălina Roxana Buneci