

Capitolul IV

SERII FOURIER

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = \frac{\cos x}{5 + 4\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Observăm că funcția $f(x)$ este pară. Deci $b_n = 0$.

Seria Fourier este:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1)$$

unde:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{și} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (2)$$

Pentru calculul lui a_n observăm că: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$.

Să considerăm și integrala: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$ și să calculăm:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos x e^{inx}}{5 + 4\cos x} dx. \quad \text{Să notăm } e^{ix} = z \Rightarrow dz = iz dx \quad \text{de unde}$$

$$dx = \frac{dz}{iz}. \quad \text{Observăm că } \cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}.$$

Avem:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) z^n}{5 + 4 \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz}$$

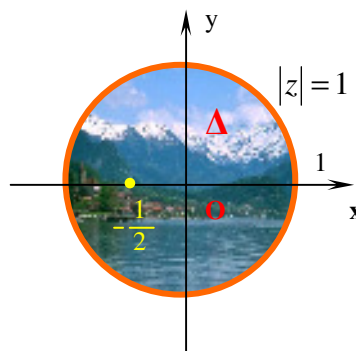
sau

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)z^{n-1}}{2z^2 + 5z + 2} dz. \quad (3)$$

Singularitățile funcției $g(z) = \frac{(z^2 + 1)z^{n-1}}{2z^2 + 5z + 2}$ sunt polii simpli $z_1 = -\frac{1}{2}$ și $z_2 = -2$. Observăm că doar $z_1 = -\frac{1}{2}$ aparține interiorului cercului $|z| = 1$ (Δ)

. Din (3) obținem:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{rez} g\left(-\frac{1}{2}\right)$$



$$\text{Observăm că: } \operatorname{rez} g\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{\substack{P(a) \\ Q'(a)}}{=} \frac{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{4\left(-\frac{1}{2}\right) + 5} = (-1)^{n-1} \frac{5}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$

Formula (4) devine:

$$a_n + ib_n = (-1)^{n-1} \frac{5}{3 \cdot 2^{n+1}} \quad (5)$$

de unde $a_n = (-1)^{n-1} \frac{5}{3 \cdot 2^{n+1}}, a_0 = -\frac{5}{6}$.

Seria Fourier (1) se scrie astfel:

$$f(x) = -\frac{5}{12} + \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \cos nx \quad (6)$$

2. Să se scrie seria Fourier trigonometrică și apoi egalitatea lui Parseval pentru funcția:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |x| < 1 \\ 0, & \text{pentru } 1 \leq |x| < \pi \end{cases}.$$

Să se deducă apoi sumele seriilor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$.

Soluție:

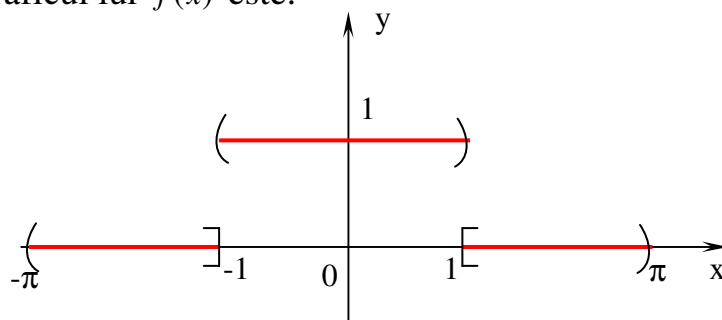
Seria Fourier este:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \text{ și } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (2)$$

Graficul lui $f(x)$ este:



Avem $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx$, de unde rezultă:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad (3)$$

Apoi, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin n}{\pi n}$, adică:

$$a_n = \frac{2 \sin n}{\pi n} \quad (4)$$

și: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n} \cos nx \Big|_{-1}^1 = 0$ adică:

$$b_n = 0 \text{ (} f(x) \text{ pară!)} \quad (5)$$

Deci seria Fourier atașată funcției $f(x)$ este:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos nx. \quad (6)$$

Egalitatea lui Parseval este:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (7)$$

sau

$$\frac{2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx \quad (8)$$

de unde:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = 1 \quad (9)$$

Rezultă suma cerută:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}. \quad (10)$$

Pentru calcul $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ scriem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

$$\text{Știm că: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \text{ deci } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi - 1}{2}.$$

3. Să se determine seria Fourier trigonometrică a funcției

periodice $f(x) = \frac{\pi}{2sh\pi} e^x, x \in (-\pi, \pi)$, de perioadă 2π . Din dezvoltarea

obținută și din relația de închidere a lui Parseval să se calculeze

sume: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Soluție:

Seria Fourier atașată funcției este:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

unde:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \text{ și } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (2)$$

$$\text{Avem: } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2sh\pi} e^x dx = \frac{1}{2sh\pi} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{sh\pi} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{1}{sh\pi} sh\pi = 1$$

deci:

$$a_0 = 1 \quad (3)$$

Pentru calculul lui a_n integrăm de două ori prin părți și obținem:

$$a_n = \frac{\pi}{2sh\pi} \left(\frac{1}{n} e^x \sin n\pi \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nxdx \right) \text{ sau}$$

$$a_n = -\frac{\pi}{2nsh\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nxdx \quad (4)$$

$$\text{de unde: } a_n = -\frac{1}{2nsh\pi} \left(-e^x \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nxdx \right) \text{ sau}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \frac{(-1)^n}{2sh\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) - \frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2sh\pi} e^x \cos nxdx$$

$$\text{și deci: } a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} a_n \text{ de unde}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \quad (5)$$

Observăm că relația (4) mai poate fi scrisă astfel:

$$a_n = -\frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2sh\pi} e^x \sin nxdx \quad (4')$$

sau

$$a_n = -\frac{1}{n} b_n \quad (6)$$

de unde

$$b_n = -na_n \quad (7)$$

sau

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \quad (8)$$

Seria Fourier atașată funcției $f(x)$ va fi:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \sin nx \right) \quad (9)$$

Relația de închidere a lui Parseval este:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (10)$$

Înlocuind a_0, a_n și b_n , relația (10) devine:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2 + 1)^2} + \frac{n^2}{(n^2 + 1)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{4sh^2\pi} e^{2x} dx \quad (11)$$

sau

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{4sh^2\pi} \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \quad (12)$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} (\pi ch\pi - 1) \quad . \quad (13)$$

Pentru calculul sumei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ folosim teorema lui Dirichlet

pentru relația (9); astfel, considerând $x = 2\pi$ în (9) (2π este punct de continuitate al funcției $f(x)$), obținem:

$$f(2\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos 2n\pi + \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 + 1} \sin 2n\pi \right)$$

de unde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e^{2\pi}}{sh\pi} - 1 \right) \quad . \quad (14)$$