

CAPITOLUL VIII**PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE
MATEMATICĂ**

“*TRAIAN LALESCU*”- anul II (Politehnică)
(fazele naționale - 1980- 1996) (selectiv).

1. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+1)^3} dx .$$

= 1980 =

2. Să se determine soluția pe $[0, \infty)$ a ecuației diferențiale $xy'' + 2y' = x^2$ care satisface condițiile $y(0)=0$ și este mărginită în vecinătatea originii folosind transformata Laplace.

= 1981 =

3. Fie $f(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{t}{2})}$ olomorfă pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat și $0 < |t| < \infty$. Dacă $f(x,t)$ admite o dezvoltare în serie Laurent de forma $f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot t^n$ atunci

$f(x,t)$ verifică următoarele relații:

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

$$= 1981 =$$

3. Folosind metoda separării variabilelor să se afle soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 u, \quad a > 0$$

care satisface condițiile:

$$(1) \quad u(x, t) = u(x, t + 2\pi), \quad x \in \mathbb{R}^*, t \geq 0$$

$$(2) \quad u(0, t) = \frac{1}{5 - 3 \cos t}.$$

$$= 1982 =$$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad a > 1.$$

$$= 1983 =$$

5. Se dă ecuația cu derivatele parțiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- a) Să se determine tipul ecuației și să se aducă la forma canonică;
 b) Să se determine soluția generală;
 c) Să se determine soluția particulară care satisface condițiile: $u(0,y) = 2y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 2.$$

$$=1984 =$$

6. a) Să se determine funcția olomorfa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ pentru care
 $u(x,y) = e^x \cos y + x \sin x \cos y - y \sin x \cos x$;

b) Să se calculeze:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5 - 4 \cos x} dx.$$

$$=1985 =$$

7. Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului de coordonate $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ și
 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție armonică într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$.

- a) Să se determine parametrii reali a, b astfel încât

$$\text{grad}(\vec{r} \text{grad} \varphi) + a \text{rot}(\vec{r} \times \text{grad} \varphi) + b \text{grad} \varphi = 0$$

pentru orice funcție armonică φ .

- b) Să se exprime printr-o integrală de suprafață integrală triplă:

$$I = \iiint_{\Omega} [\text{grad} \varphi + (\vec{r} \nabla) \text{grad} \varphi] dw$$

unde Ω este un domeniu cu frontiera suficient de regulată, $\Omega \subset D$,

$$\vec{r} \nabla = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$= 1986 =$$

8. a) Să se determine funcția monogenă f știind că $f(z) = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
 φ derivabilă.

- c) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_{|z|=R} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)} dz, R \neq 1.$$

$$= 1987 =$$

9. a) Să se determine funcțiile olomorfe $f: C \rightarrow C$ pentru care
 $u(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ cu φ și ψ de clasă $C^2(R)$ unde $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$,
 $z = x + iy$.

- b) Să se calculeze:

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx,$$

unde $a, b, c \in R$.

$$= 1988 =$$

10. Se dă funcția complexă

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)[(p+1)^2 + \omega^2]}, \omega > 0,$$

$p \in \mathbb{Z}$. Se cere:

a) Să se determine funcția original $f(t)$;

b) Să se rezolve ecuația integrală:

$$\int_0^t g(u) f(t-u) du = e^{-t} (\omega t - \sin \omega t).$$

c) Să se calculeze $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$.

d) Pentru $\omega = 2$ să se calculeze:

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} e^t f(t) \cos^6 t dt.$$

= 1993 = (Universitatea C. Brâncuși Tg-Jiu)

12. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n}, \quad a, b, \text{ reale, strict pozitive.}$$

Folosind rezultatul obținut să se calculeze:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{1993}}.$$

= 1996 = (Universitatea Tehnică Cluj-Napoca)

13. Să se calculeze integrala:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{5 - 4 \cos x} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$